



Universidad  
del Zulia

# Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392

ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Vol. 17 - No. 1 - 2016

Facultad  
Experimental  
de Ciencias



# Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia  
Facultad Experimental de Ciencias  
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

## Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)      Dr. Wilson Pacheco (LUZ)  
Dr. Deivi Luzardo (LUZ)    MSc. Edixo Balzán (LUZ)

**Editor Jefe:** Dr. Alirio J. Peña P. ([apena@demat-fecluz.org](mailto:apena@demat-fecluz.org))

**Editor Adjunto:** Dr. Tobías Rosas Soto ([trosas@demat-fecluz.org](mailto:trosas@demat-fecluz.org))

**Editores Asociados:** Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

**Editores Eméritos:** Ángel V. Oneto R., José H. Nieto S., Genaro González, Daniel Núñez.

**Editore Fundadores:** Alirio J. Peña P., Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de de Javier Adolfo Ortiz.

## Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526  
Maracaibo, Estado Zulia  
Venezuela

Correo electrónico: [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org)

URL: <http://DivMat.demat-fecluz.org>

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X y  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad de LUZ.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES  
MATEMÁTICAS

---

---

Vol. 17

2016

No. 1

---

---

Esta publicación ha sido posible  
gracias al apoyo brindado  
principalmente por:

**FEC-LUZ**

Facultad Experimental de Ciencias de la Universidad del  
Zulia

# Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 17, No. 1, 2016**, volumen de reactivación de la revista. En el presente número están contenidos los artículos procesados durante el período **2008-2015** que fueron evaluados y aceptados para su publicación.

Ante el silencio administrativo y la no emisión de respuestas por parte de la revista a los autores que sometieron artículos en el período antes mencionado, la gran mayoría de éstos retiraron sus trabajos de *Divulgaciones Matemáticas*. Sin embargo, quedaron algunos casos donde se habían emitido cartas de aceptación para ciertos manuscritos. Ante esta situación, dada la reorganización y reestructuración de la revista, y buscando enmendar en lo posible los inconvenientes causados, el Comité Editorial decidió consultar a los autores de los mencionados trabajos, si habían publicado sus artículos y si aún deseaban publicarlos con nosotros. Estos son los trabajos que se presentan en este número.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado del esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias y al apoyo técnico de la mencionada facultad. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número. A los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la nueva directiva de la revista. A la labor desinteresada de los árbitros que evaluaron los artículos: su trabajo permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos. Al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*, y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de *Problemas y soluciones*. A todos, mil gracias.

Por último, el nuevo Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* quiere pedirle disculpas a toda la comunidad matemática venezolana por los posibles inconvenientes causados y los invitamos a darnos un voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

Dr. Alirio Peña<sup>1</sup>

Dr. Tobías Rosas Soto.<sup>2</sup>

Dr. Vinicio Ríos<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>2</sup>Editor del presente número y Editor Adjunto de *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>3</sup>Editor Asociado y Miembro del Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas*

# Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 17, No. 1, 2016** reactivation volume of the journal. Articles contained in this issue are those processed during the period **2008-2015** and were evaluated and accepted for publication.

Given the administrative silence and no response from the journal to the authors who submitted their articles in the mentioned period, the vast majority of them withdrew their works from *Divulgaciones Matemáticas*. However, there were some cases where letters of acceptance had been previously emitted for certain manuscripts. In that situation, given the reorganization and restructuring of the journal, and looking forward to amending the inconvenience caused as far as possible, the Editorial Board asked those authors with letters of acceptance if they still wished to have their works published with us, as long as the same were not published elsewhere. The articles of those authors who gave positive answers are the works presented in this number.

The editorial work fulfilled in this issue is an outcome of the effort of some Faculty members from the Mathematics Department of the Experimental Faculty of Sciences at The University of Zulia. Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible. To the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the new policy of the journal. To the selfless work of the referees who evaluated the articles: their work guaranteed the quality standards of the journal and significantly improved the way of working. To the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*, and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the *Problems and Solutions* section. To all of you, thanks a lot.

Finally, the new Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* want to apologize to all Venezuelan mathematical community for the caused inconvenience and invite you to give us a vote of confidence by submitting their work to our journal for evaluation and possible publication.

Dr. Alirio Peña<sup>4</sup>

Dr. Tobías Rosas Soto.<sup>5</sup>

Dr. Vinicio Ríos<sup>6</sup>

---

<sup>4</sup>Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>5</sup>Editor of the present issue and Adjunct Editor of *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>6</sup>Associate Editor and Member of the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas*

# DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 17, No. 1, 2016

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación (Research papers)

- Aproximación de operadores no lineales por polinomiales de Volterra-Stieltjes.**  
Approximation of nonlinear operators by Volterra-Stieltjes polynomials.  
*Nelson Vilorio* 1–13
- Perfect Measures, Nuclear Spaces and the Convex Compactness Property.**  
Medidas Perfectas, Espacios Nucleares y la Propiedad de Compacidad Convexa.  
*Jorge Vielma* 14–17
- Simulaciones numéricas para la estabilización de sistemas mecánicos subactuados de grado uno, usando el método IDA-PBC: el caso del sistema TORA.**  
Numerical simulations for stabilization of underactuation mechanical systems of degree one, using IDA-PBC method: the TORA system example.  
*Maribel C. Pérez P.-Atilio Morillo Piña* 18–45
- Existence of positive solutions of BVPs for coupled impulsive differential equations on whole line with mixed boundary conditions**  
Existencia de soluciones positivas de problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales con impulso acopladas sobre toda la recta con condiciones de frontera mixta.  
*Yuji Liu* 46–74

### Artículos sobre Enseñanza Matemática (Mathematical Teaching papers)

- Errores, Dificultades y Conflictos Semióticos Presentes en la Enseñanza de las Derivadas.**  
Errors, Difficulties and Semiotic Conflicts Present in the Teaching of Derivatives.  
*Mario Arrieche-Albéniz A. Meléndez Q.* 76–87

### Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

- José H. Nieto S.* (Editor) 88–92





# Aproximación de operadores no lineales por polinomiales de Volterra-Stieltjes

*Approximation of nonlinear operators by Volterra-Stieltjes polynomials*

Nelson Viloría (nelson@ula.ve)

Departamento de Matemáticas.  
Facultad de Ciencias. Universidad de Los Andes.  
Mérida - Venezuela.

## Resumen

Establecemos una aproximación (tipo Weierstrass) para operadores definidos sobre el espacio de funciones regladas,  $G[a, b]$ , vía la representación integral (tipo Riesz) de operadores no lineales.

**Palabras y frases clave:** operadores no lineales, operadores polinomiales, aproximación, Weierstrass, funciones regladas, integral de Dushnik.

## Abstract

We establish a Weierstrass approximation for operators defined in the space of regulated functions,  $G[a, b]$ , via Riesz integral representation of nonlinear operators.

**Key words and phrases:** nonlinear operators, polynomials operators, approximation, Weierstrass, regulated functions, Dushnik integral.

## 1 Introducción

La aproximación de operadores (funcionales) no lineales por operadores (funcionales) polinomiales, es decir, los Teoremas de Weierstrass en espacios de Banach, fue obtenida por Istratescu [5]. Posteriormente, Baesler-Dauvaget [2] trataron el problema análogo donde los espacios de Banach son espacios de funciones ( $C[a, b]$  y  $L_p[a, b]$ ) y los operadores polinomiales son sumas parciales de series de Volterra.

En este trabajo, mostraremos dos resultados: primero, que todo funcional continuo, definido sobre un subconjunto compacto de funciones regladas por la izquierda, es aproximable por funcionales polinomiales de Volterra-Stieltjes. Y luego, que todo operador continuo, definido sobre un subconjunto compacto de funciones regladas por la izquierda, es aproximable por operadores polinomiales de Volterra-Stieltjes. En ambos casos, procedemos vía la representación integral (tipo Riesz) de operadores y funcionales no lineales. Con ese propósito fue necesario generalizar, al caso multilineal, las representaciones integrales realizadas por Hönl [4], caso lineal, y Prandini [6], caso bilineal.

## 2 Funciones Regladas

Consideremos  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y  $X, W$  espacios de Banach.

**Definición.**  $x : [a, b] \rightarrow X$  es una **función reglada** si  $x$  solo tiene discontinuidades de primera especie, esto es, si

$$i) \text{ Para todo } t \in [a, b) \text{ existe } x(t^+) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} x(t + \epsilon),$$

$$ii) \text{ Para todo } t \in (a, b] \text{ existe } x(t^-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} x(t - \epsilon).$$

Por  $G([a, b], X)$  designamos el espacio de Banach de las funciones regladas de  $[a, b]$  en  $X$ , considerado con la norma del supremo.

Es directo de la definición que toda función continua es reglada. Otros espacios de funciones de uso frecuente (de variación acotada, monótonas, Lipschitz, absolutamente continuas, Darboux, con primitiva, etc.) están estrechamente relacionadas con el espacio de las funciones regladas.

**Definición.**  $x : [a, b] \rightarrow X$  es una **función reglada por la izquierda** si

$$i) x(a) = 0,$$

$$ii) x(t^-) = x(t), \text{ para todo } t \in (a, b].$$

El espacio de las funciones regladas por la izquierda,  $G^-([a, b], X)$ , es un sub-espacio cerrado de  $G([a, b], X)$ .

**Definición.**  $x : [a, b] \rightarrow L(W, X)$  es una **función simplemente reglada** si, para todo  $w \in W$ , la función

$$\begin{aligned} x \cdot w : [a, b] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x(t)w, \text{ es reglada.} \end{aligned}$$

En Arbex [1] se muestra que el espacio de las funciones regladas,  $G([a, b], L(W, X))$ , está contenido en el de las simplemente regladas,  $G^\sigma([a, b], L(W, X))$ , y son iguales si, y solo si,  $W$  es de dimensión finita.

## 3 Funciones de semivariación acotada

Consideremos  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}$  y  $X_1, X_2, \dots, X_m, Y, Z$  espacios de Banach.

**Definición.** Una **partición de un  $m$ -bloque**,  $\prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \subset \mathbb{R}^m$ , es un conjunto finito del tipo

$$P = \prod_{r=1}^m P_r, \text{ con } P_r \text{ una partición de } [a_r, b_r], \text{ donde los puntos de esta verifican que } a_r = t_{o(r)} <$$

$$\dots < t_{n(r)} = b_r. \text{ Hacemos } n(P) = \prod_{r=1}^m n(r) \text{ y } |P| = \prod_{r=1}^m |P_r|, \text{ con } |P_r| \text{ la norma de la partición } P_r.$$

Denotamos por  $\mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]\right)$  al conjunto de todas las particiones del  $m$ -bloque.

**Definición.** Sean  $z : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \longrightarrow Z$  y  $P = \prod_{r=1}^m P_r$ , con  $P \in \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]\right)$  y  $a_r = t_{o(r)} < \dots < t_{n(r)} = b_r$ . Fijando  $r$ , consideramos un entero positivo  $i(r)$  con  $1 \leq i(r) \leq n(r)$  y definimos: Para  $m = 1$ ,

$$\Delta_i z = z(t_i) - z(t_{i-1}) \in Z.$$

Para  $m \geq 2$ ,

$$\Delta_{i(r)} z : \prod_{j=1}^{r-1} [a_j, b_j] \times \prod_{j=r+1}^m [a_j, b_j] \longrightarrow Z$$

por

$$\begin{aligned} & (\Delta_{i(r)} z)(s_1, \dots, s_{r-1}, s_{r+1}, \dots, s_m) = \\ & z(s_1, \dots, s_{r-1}, t_{i(r)}, s_{r+1}, \dots, s_m) - z(s_1, \dots, s_{r-1}, t_{i(r)-1}, s_{r+1}, \dots, s_m) \end{aligned}$$

Considerando  $q$ ,  $1 \leq q \leq m$ , podemos calcular

$$\Delta_{i(1)}(\Delta_{i(2)}(\dots \Delta_{i(q)} z) \dots)(s_{q+1}, \dots, s_m)$$

al que denotamos por

$$\Delta_{i(1)} \Delta_{i(2)} \dots \Delta_{i(q)} z.$$

**Definición.** Un operador  $\Lambda : \prod_{r=1}^m X_r \longrightarrow Y$  es *m-lineal* o *multilineal* si es lineal en cada variable. Escribimos  $\Lambda \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$  si  $\Lambda$  es *m-lineal* y continuo (i.e., existe  $M \geq 0$  tal que  $\|\Lambda(x_1, \dots, x_m)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_m\|$ ).

**Definición.** Sea  $K : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \longrightarrow Z$ . La *variación Vitali* de  $K$  en  $\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]$  está dada por

$$V[K] = \sup_P V_P[K],$$

donde

$$V_P[K] = \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} |\Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K|, P \in \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]\right).$$

Si  $V[K] < \infty$ , diremos que  $K$  es de *variación acotada* en  $\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]$  y escribimos

$$K \in BV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], Z\right).$$

**Definición.** Sea  $K : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \longrightarrow L(X, Y)$ . La *semivariación de Vitali* de  $K$  en  $\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]$  está dada por

$$SV[K] = \sup_P SV_P[K],$$

donde

$$SV_P[K] = \sup_{\|x_{i(1)\dots i(m)}\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_{i(1)\dots i(m)}) \right\| : x_{i(1)\dots i(m)} \in X \right\}.$$

Si  $SV[K] < \infty$ , diremos que  $K$  es de **semivariación de Vitali acotada** y escribimos

$$K \in SV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X, Y)\right).$$

**Teorema 1.**  $BV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X, Y)\right) \subset SV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X, Y)\right)$ . Además, si

$K \in BV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X, Y)\right)$ , entonces  $SV[K] \leq V[K]$ .

*Demostración.* Dados  $K \in BV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X, Y)\right)$ ,  $P \in \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]\right)$  y  $x_{i(1)\dots i(m)} \in X$ ,  $1 \leq i(r) \leq n(P_r)$ ,  $r = 1, \dots, m$ , tales que  $\|x_{i(1)\dots i(m)}\| \leq 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_{i(1)\dots i(m)}) \right\| &\leq \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \|\Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K\| \\ &\leq V[K]. \end{aligned}$$

Luego,  $SV[K] \leq V[K]$ . □

**Definición.** Sea  $K : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \rightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y)$ . La **semivariación de Fréchet** de  $K$  en  $\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]$  está dada por

$$SF[K] = \sup_P SF_P[K],$$

donde

$$SF_P[K] = \sup_{\|x_{i(r)}\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_{i(1)}, \dots, x_{i(m)}) \right\| : x_{i(r)} \in X_r \right\}.$$

Si  $SF[K] < \infty$ , diremos que  $K$  es de **semivariación de Fréchet acotada** y escribimos

$$K \in SF\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right).$$

De forma análoga al teorema anterior se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 2.**  $BV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right) \subset SF\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right)$ . Además, si  $K \in BV\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right)$ , entonces  $SF[K] \leq V[K]$ .

## 4 Integral de Dushnik

**Definición.** Sean  $e, (e_P)_{P \in \mathbb{P}}$  puntos de un espacio topológico  $E$ . Escribimos  $e = \lim_{P \in \mathbb{P}} e_P$  cuando, para toda vecindad  $V$  de  $e$ , existe  $P_V \in \mathbb{P}$  tal que

$$P \geq P_V \Rightarrow e_P \in V.$$

**Definición.** Sean  $K : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \rightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y)$  y  $x_r : [a_r, b_r] \rightarrow X_r; r = 1, \dots, m$ . Si existe

$$\lim_{P \in \mathbb{P}} \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(x_1(\xi_{i(1)}), \dots, x_m(\xi_{i(m)}))$$

con  $\xi_{i(r)} \in (t_{i(r)-1}, t_{i(r)})$  y  $\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]\right)$ , este límite es llamado la **integral de Dushnik** de  $x = (x_1, \dots, x_m)$  con respecto a  $K$  y la denotamos por

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} d_{s_1 \dots s_m} K(s_1, \dots, s_m)(x_1(s_1), \dots, x_m(s_m)).$$

En Höning [3] se muestra que, para funciones continuas, la integral de Dushnik y la integral de Riemann-Stieltjes coinciden.

**Definición.**  $x \in \Omega_0([a, b], X)$  si, y solo si, para todo  $\epsilon > 0$  el conjunto  $\{t \in [a, b] \mid \|x(t)\| \geq \epsilon\}$  es finito.

En Höning [3] se muestra que el espacio de las funciones regladas se puede descomponer como suma directa de las regladas por la izquierda y  $\Omega_0$ .

**Teorema 3.** Si  $K \in SF\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right)$  y  $x_r \in G([a_r, b_r], X_r), r = 1, \dots, m$ , entonces

i) Existe  $\Lambda_K x = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} d_{s_1 \dots s_m} K(s_1, \dots, s_m)(x_1(s_1), \dots, x_m(s_m)),$

ii)  $\Lambda_K$  es  $m$ -lineal,

iii)  $\|\Lambda_K x\| \leq SF[K] \|x_1\| \dots \|x_m\|,$

iv) Si  $x_r \in \Omega_0([a_r, b_r], X_r)$ , para algún  $r = 1, \dots, m$ , tenemos que  $\Lambda_K x = 0$ .

*Demostración.* Si  $x_r = 0$ , para algún  $r$ , o  $K = 0$ , el resultado es inmediato. Por tanto, consideremos  $x_r \neq 0, r = 1, \dots, m$ , y  $K \neq 0$ .

i) Veamos que el criterio de Cauchy se verifica.

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces para todo  $r, r = 1, \dots, m$ , por caracterización de las funciones regladas, existe  $P_r(\epsilon) \in \mathbb{P}[a_r, b_r]$  tal que

$$\omega_{P_r(\epsilon)}(x_r) < \frac{\epsilon \|x_r\|}{2SF[K] \|x_1\| \cdots \|x_m\|}.$$

Si  $P \geq P(\epsilon) = \prod_{r=1}^m P_r(\epsilon)$ , podemos obtener  $P$  de  $P(\epsilon)$  intercalando un número finito de puntos en las particiones  $P_r(\epsilon)$ . Inductivamente, todo se reduce al caso en el cual  $P$  se obtiene insertando un punto en alguna partición  $P_k(\epsilon)$  para algún  $k, k = 1, \dots, m$ . Sea  $\mathcal{O}_k$  el punto considerado, en algún intervalo de  $P_k(\epsilon)$ . Así,

$$\begin{aligned} \sigma_P - \sigma_{P(\epsilon)} &= \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \cdots \Delta_{i(m)} K \left( x_1(\xi_{i(1)}), \dots, x_{k-1}(\xi_{i(k-1)}), \right. \\ &\quad \left. x_k(\xi_{i(k)}) - x_k(\xi_{\mathcal{O}_k}), x_{k+1}(\xi_{i(k+1)}), \dots, x_m(\xi_{i(m)}) \right) \\ &+ \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \cdots \Delta_{i(m)} K \left( x_1(\xi_{i(1)}), \dots, x_{k-1}(\xi_{i(k-1)}), \right. \\ &\quad \left. x_k(\xi_{\mathcal{O}_k}) - x_k(\xi_{i(k)-1}), x_{k+1}(\xi_{i(k+1)}), \dots, x_m(\xi_{i(m)}) \right) \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \sigma_P - \sigma_{P(\epsilon)} &= \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \cdots \Delta_{i(m)} K \left( \frac{x_1(\xi_{i(1)})}{\|x_1\|}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{2SF[K] \|x_1\| \cdots \|x_m\|}{\epsilon \|x_k\|} (x_k(\xi_{i(k)}) - x_k(\xi_{\mathcal{O}_k})), \dots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{\|x_m\|} \right) \frac{\epsilon}{2SF[K]} \\ &+ \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \cdots \Delta_{i(m)} K \left( \frac{x_1(\xi_{i(1)})}{\|x_1\|}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{2SF[K] \|x_1\| \cdots \|x_m\|}{\epsilon \|x_k\|} (x_k(\xi_{\mathcal{O}_k}) - x_k(\xi_{i(k)-1})), \dots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{\|x_m\|} \right) \frac{\epsilon}{2SF[K]}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|\sigma_P - \sigma_{P(\epsilon)}\| \leq SF[K] \frac{\epsilon}{2SF[K]} + SF[K] \frac{\epsilon}{2SF[K]} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

y, por tanto,

$$P, \bar{P} \geq P(\epsilon) \implies \|\sigma_P - \sigma_{\bar{P}}\| \leq \epsilon.$$

ii) Es directo de la definición de la integral.

iii) Para cualquier  $P \in \mathbb{P}\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r]\right)$ , tenemos

$$\|\sigma_P\| = \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K\left(\frac{x_1(\xi_{i(1)})}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{\|x_m\|}\right) \right\| \cdot \|x_1\| \dots \|x_m\|$$

De donde,

$$\|\sigma_P\| \leq SF[K] \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

Así, pasando al límite, resulta

$$\|\Lambda_K x\| \leq SF[K] \|x_1\| \dots \|x_m\|.$$

iv) Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $x_1 \in \Omega_0([a_1, b_1], X_1)$ . Entonces, por la definición de  $\Omega_0$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $P_1(\epsilon) \in \mathbb{P}[a_1, b_1]$  tal que

$$\left\{ t \in [a_1, b_1] : \|x_1(t)\| \geq \frac{\epsilon}{SF[K] \|x_2\| \dots \|x_m\|} \right\} \subset P_1(\epsilon).$$

De donde, si  $P = \prod_{r=1}^m P_r$  con  $P_1 \geq P_1(\epsilon)$  y las otras particiones son arbitrarias, entonces

$$\|\sigma_P\| = \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K\left(\frac{SF[K] \|x_2\| \dots \|x_m\|}{\epsilon} x_1(\xi_{i(1)}), \frac{x_2(\xi_{i(2)})}{\|x_2\|}, \dots, \frac{x_m(\xi_{i(m)})}{\|x_m\|}\right) \right\| \left\| \frac{\epsilon}{SF[K]} \right\| < \epsilon.$$

Por lo tanto,  $\Lambda_K x = 0$ .

□

Tal como en el caso bilineal ([6, Theorem 4.3]) se tiene que

**Teorema 4.** Sean  $K \in SF\left(\prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y)\right)$  y  $x_r \in G([a_r, b_r], X_r)$ , para todo  $r, r = 1, \dots, m$ . Entonces,

$$\Lambda_K x = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \dots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(s_1, \dots, s_m) x_1(s_1) \dots x_m(s_m).$$

## 5 Representación Integral tipo Riesz

Demostremos ahora dos teoremas de representación integral tipo Riesz, para operadores y funcionales multilineales. Esos teoremas serán piezas fundamentales para expresar operadores y funcionales polinomiales como operadores y funcionales de Volterra-Stieltjes, es decir para probar los Teoremas 7 y 8, de la última sección.

**Definición.** Sea  $K : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \rightarrow L(X_1, \dots, X_m; Z)$ , escribimos

$$K \in SF_{a^m} \left( \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Z) \right)$$

si  $K(s_1, \dots, s_{i-1}, a_i, s_{i+1}, \dots, s_m) = 0$  para todo  $i, i = 1, \dots, m$ .

**Teorema 5.** La aplicación  $K \mapsto \Lambda_K$ , donde

$$\Lambda_K x = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(s_1, \dots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m)$$

es una isometría entre los espacios de Banach

$$SF_{a^m} \left( \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Z) \right)$$

y

$$L(G^-([a_1, b_1], X_1), \dots, G^-([a_m, b_m], X_m); Z).$$

Además,

$$K(s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \Lambda_K(\chi_{(a_1, s_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, s_m]} \bar{x}_m)$$

y

$$\|\Lambda_K\| = SF[K].$$

*Demostración.* Por el Teorema 3, la aplicación está bien definida, es lineal y continua; además,  $\|\Lambda\| \leq SF[K]$ .

**Inyectividad:** Si  $K \neq 0$ , existen  $\tau_r \in (a_r, b_r]$  y  $\bar{x}_r \in X_r, r = 1, \dots, m$  tales que

$$K(\tau_1, \dots, \tau_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \neq 0.$$

Sea  $x_r = X_{(a_r, \tau_r]} \bar{x}_r \in G^-([a_r, b_r], X_r)$ , entonces  $\Lambda_K \neq 0$ , pues

$$\begin{aligned} \Lambda_K x &= \int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1 \dots s_m} K(s_1, \dots, s_m) (\chi_{(a_1, \tau_1]}(s_1) \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, \tau_m]}(s_m) \bar{x}_m) \\ &= K(\tau_1, \dots, \tau_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m). \end{aligned}$$



**Sobreyectividad:** Dada  $\Lambda \in L(G^-([a_1, b_1], X_1), \dots, G^-([a_m, b_m], X_m); Z)$ , si existe  $K \in SF_a^m \left( \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Z) \right)$  tal que  $\Lambda = \Lambda_K$ , entonces

$$K(\tau_1, \dots, \tau_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \Lambda(\chi_{(a_1, \tau_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, \tau_m]} \bar{x}_m),$$

$\tau_r \in (a_r, b_r]$  y  $\bar{x}_r \in X_r, r = 1, \dots, m$ . Tomemos esta como la definición de  $K$ .

Debemos probar que: a)  $SF[K] \leq \|\Lambda\|$  y b)  $\Lambda_K = \Lambda$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } SF_P[K] &= \sup_{\|\bar{x}_{i(r)}\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(p)} \Delta_{i(1)} \dots \Delta_{i(m)} K(\bar{x}_{i(1)}, \dots, \bar{x}_{i(m)}) \right\| : \bar{x}_{i(r)} \in X_r \right\} \\ &= \sup_{\|\bar{x}_{i(r)}\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(p)} \Lambda(\chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}}] \bar{x}_{i(1)}, \dots, \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}}] \bar{x}_{i(m)}) \right\| \right\} \\ &= \sup_{\|\bar{x}_{i(r)}\| \leq 1} \left\{ \left\| \Lambda \left( \sum_{i(1)=1}^{n(p_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}}] \bar{x}_{i(1)}, \dots, \sum_{i(m)=1}^{n(p_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}}] \bar{x}_{i(m)}) \right) \right\| \right\} \leq \|\Lambda\|. \end{aligned}$$

b) Tenemos que  $\Lambda, \Lambda_K \in L(G^-([a_1, b_1], X_1), \dots, G^-([a_m, b_m], X_m); Z)$ . Para probar la igualdad  $\Lambda_K = \Lambda$ , basta ver que coinciden en los elementos de la forma  $\chi_{(a_1, \tau_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, \tau_m]} \bar{x}_m$  pues estos forman un conjunto total en  $G^-([a_1, b_1], X_1), \dots, G^-([a_m, b_m], X_m)$ , respectivamente. De hecho,  $\Lambda_K(\chi_{(a_1, \tau_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, \tau_m]} \bar{x}_m) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_1}^{b_m} d_{s_1 \dots s_m} K(s_1 \dots s_m)(\chi_{(a_1, \tau_1]}(s_1) \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, \tau_m]}(s_m) \bar{x}_m) \\ &= K(\tau_1, \dots, \tau_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \\ &= \Lambda(\chi_{(a_1, \tau_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, \tau_m]} \bar{x}_m). \quad \square \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso de operadores entre espacios de funciones. Necesitaremos, para esto, la siguiente definición.

**Definición.** Sea  $K : [a, b] \times \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \longrightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y)$ . Definimos

$$K^t : \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \longrightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y) \text{ y } K_{s^m} : [a, b] \longrightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y) \text{ por}$$

$$K^t(s_1, \dots, s_m) = K(t, s_1, \dots, s_m) = K_{s^m}(t).$$

Además, consideremos las siguientes propiedades:

$(G^\sigma)$  :  $K$  es **simplemente reglada como función de  $t$** , i.e.,

$$K_{s^m} \in G^\sigma([a, b], L(X_1, \dots, X_m; Y)).$$

$(SF^u)$  :  $K$  es **uniformemente de semivariación de Fréchet acotada** como función de  $(s_1, \dots, s_m)$ , i.e.,

$$SF^u[K] = \sup_{t \in [a, b]} SF[K^t] < \infty.$$

$(SF_{a^m}^u) : K$  satisfice  $(SF^u)$  y  $K^t \in SF_{a^m} \left( \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Z) \right)$  para todo  $t \in [a, b]$ .  
 Cuando  $K$  verifica ambas  $(G^\sigma)$  y  $(SF^u)$ , escribimos

$$K \in G^\sigma \cdot SF^u \left( [a, b] \times \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y) \right).$$

Análogamente para  $K \in G^\sigma \cdot SF_{a^m}^u$ .

**Teorema 6.** La aplicación  $K \mapsto \Lambda_K$ , donde

$$\Lambda_K x(t) = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(t, s_1, \dots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m)$$

es una isometría entre los espacios de Banach

$$G^\sigma \cdot SF_{a^m}^u \left( [a, b] \times \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y) \right)$$

y

$$L(G^-([a_1, b_1], X_1), \dots, G^-([a_m, b_m], X_m); G([a, b], Y)).$$

Además,

$$K(t, s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \Lambda_K (\chi_{(a_1, s_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, s_m]} \bar{x}_m)(t)$$

y

$$\|\Lambda_K\| = SF^u[K].$$

*Demostración.* Para  $t \in [a, b]$ ,  $K_{s^m}$  es de semivariación de Fréchet acotada. Por otro lado,  $x_r$  es reglada, para  $r = 1, \dots, m$ , entonces  $\Lambda_K(x_1, \dots, x_m)(t)$  está bien definida. Como en la prueba anterior, la linealidad y la inyectividad son consecuencias directas de la definición. Además, para  $t \in [a, b]$ ,

$$\|(\Lambda_K x)(t)\| \leq SF[K^t] \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Luego,

$$\|\Lambda_K x\| \leq SF^u[K] \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Por lo tanto,

$$\|\Lambda_K\| \leq SF^u[K].$$

**Sobreyectividad:** Sea  $\Lambda \in L(G^-([a_1, b_1], X_1), \dots, G^-([a_m, b_m], X_m); G([a, b], Y))$ . Por el teorema anterior, existe

$$\bar{K} \in SF_{a^m} \left( \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; G([a, b], Y)) \right)$$

tal que

$$\Lambda x = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} \bar{K}(s_1, \dots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m),$$

donde

$$\bar{K}(s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \Lambda(\chi_{(a_1, s_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, s_m]} \bar{x}_m).$$

Definiendo

$$K : [a, b] \times \prod_{r=1}^m [a_r, b_r] \longrightarrow L(X_1, \dots, X_m; Y)$$

por

$$K(t, s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = (\bar{K}(s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m))(t),$$

tenemos

$$\Lambda(\chi_{(a_1, s_1]} \bar{x}_1, \dots, \chi_{(a_m, s_m]} \bar{x}_m)(t) = K(t, s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m).$$

Por lo tanto,

$$\Lambda x(t) = \int_{a_m}^{b_m} d_{s_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} d_{s_1} K(t, s_1, \dots, s_m) x_1(s_1) \cdots x_m(s_m).$$

Mostremos ahora que  $K \in G^\sigma \cdot SF_{a^m}^u \left( [a, b] \times \prod_{r=1}^m [a_r, b_r], L(X_1, \dots, X_m; Y) \right)$ .

a)  $K(t, a_1, \dots, a_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = (\bar{K}(a_1, \dots, a_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m))(t) = 0.$

b)  $K$  es uniformemente de semivariación de Fréchet acotada en  $(s_1, \dots, s_m)$ . De hecho, sean  $P = \prod_{r=1}^m P_r$ ,  $P_r \in \mathbb{P}[a_r, b_r]$  y  $\bar{x}_{i(r)} \in X_r$  con  $\|\bar{x}_{i(r)}\| \leq 1$  para todo  $i(r)$ ,  $1 \leq i(r) \leq n(r)$ ,  $\forall r = 1, \dots, m$ .

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } & \left\| \sum_{i(1), \dots, i(m)}^{n(P)} \Delta_{i(1)} \cdots \Delta_{i(m)} K(t)(\bar{x}_{i(1)}, \dots, \bar{x}_{i(m)}) \right\| = \\ & = \left\| \Lambda \left( \sum_{i(1)=1}^{n(P_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}]} \bar{x}_{i(1)}, \dots, \sum_{i(1)=1}^{n(P_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}]} \bar{x}_{i(m)} \right) (t) \right\| \\ & \leq \left\| \Lambda \left( \sum_{i(1)=1}^{n(P_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}]} \bar{x}_{i(1)}, \dots, \sum_{i(1)=1}^{n(P_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}]} \bar{x}_{i(m)} \right) \right\| \\ & \leq \|\Lambda\| \left\| \sum_{i(1)=1}^{n(P_1)} \chi_{(t_{i(1)-1}, t_{i(1)}]} \bar{x}_{i(1)} \right\| \cdots \left\| \sum_{i(1)=1}^{n(P_m)} \chi_{(t_{i(m)-1}, t_{i(m)}]} \bar{x}_{i(m)} \right\| \leq \|\Lambda\|. \end{aligned}$$

Luego,

$$SF[K^t] \leq \|\Lambda\| \quad \forall t \in [a, b].$$

De donde,

$$SF^u[K] \leq \|\Lambda\|.$$

- c)  $K$  es simplemente reglada como función de  $t$ ; pues como  $\Lambda$  toma valores en  $G([a, b], Y)$ , por la definición de  $K$ , tenemos que, para todo  $(s_1, \dots, s_m)$ , la función

$$\phi : [a, b] \longrightarrow Y$$

definida por

$$\phi(t) = K(t, s_1, \dots, s_m)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m),$$

para todo  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ , es reglada.

□

## 6 Aproximación de operadores no lineales

**Definición.** Si  $h_m \in G^\sigma \cdot SF_a^u([a, b]^{m+1}, L_m(X; \mathbb{R}))$ , el funcional

$$\rho_m : G^-[a, b], X \longrightarrow \mathbb{R},$$

definido por

$$(\rho_m x)(t) = h_0(t) + \sum_{n=1}^m \int_a^b d_{s_n} \cdots \int_a^b d_{s_1} h_n(t, s_1, \dots, s_n) x(s_1) \cdots x(s_n),$$

es llamado **funcional polinomial de Volterra-Stieltjes**, de grado  $m$ .

En Istrăţescu [5] se muestra el Teorema de Weierstrass, el cual expresa que el conjunto de todos los operadores polinomiales continuos, definidos sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, es denso en el conjunto de todos los operadores continuos, en ese mismo compacto. En su prueba, utiliza tres importantes teoremas del Análisis Funcional: el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema de Krein-Milman y el Teorema de Riesz-Katutani.

**Teorema 7.** Sean  $A \subset G^-[a, b], X$  compacto y  $\rho : A \rightarrow \mathbb{R}$  continuo. Entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un operador polinomial de Volterra-Stieltjes  $\rho_m$  tal que

$$\|\rho x - \rho_m x\| < \epsilon,$$

para todo  $x \in A$ .

*Demostración.* Del teorema de Weierstrass [5, Theorem 2.1] tenemos que todo funcional continuo, definido sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, puede ser aproximado uniformemente por funcionales polinomiales. Por el teorema 5, estos son funcionales polinomiales de Volterra- Stieltjes. □

**Definición.** Si  $h_m \in G^\sigma \cdot SF_a^u([a, b]^{m+1}, L_m(X; X))$ , el operador

$$P_m : G^-([a, b], X) \longrightarrow G^-([a, b], X),$$

definido por

$$(P_m x)(t) = h_0(t) + \sum_{n=1}^m \int_a^b d_{s_n} \cdots \int_a^b d_{s_1} h_n(t, s_1, \dots, s_n) x(s_1) \cdots x(s_n),$$

es llamado **operador polinomial de Volterra-Stieltjes**, de grado  $m$ .

También en Istrăţescu [5] se muestra el Teorema de Weierstrass para funcionales, el cual expresa que el conjunto de todos los funcionales polinomiales continuos, definidos sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, es denso en el conjunto de todos los funcionales continuos, en ese mismo compacto.

**Teorema 8.** Sean  $A \subset G^-([a, b], X)$  compacto y  $P : A \rightarrow G^-([a, b], X)$  continuo. Entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un operador polinomial de Volterra-Stieltjes  $P_m$  tal que

$$\|Px - P_m x\| < \epsilon$$

para todo  $x \in A$ .

*Demostración.* Del teorema de Weierstrass [5, Theorem 2.5] tenemos que todo operador continuo, definido sobre un subconjunto compacto de un espacio de Banach, puede ser aproximado uniformemente por operadores polinomiales. Por el teorema 6, estos son operadores polinomiales de Volterra-Stieltjes.  $\square$

## Referencias

- [1] Arbex, S. *Ecuaciones Integrales de Volterra-Stieltjes con núcleos des-continuos*, Dr. Tese, IME-USP, Brasil. 1976.
- [2] Baesler, I. y Daugavet, I. K. *Approximation of nonlinear operators by Volterra polynomials*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **155**(1993), 47-58.
- [3] Hönig, C. *Volterra-Stieltjes Integral Equations*, Math. Studies 16, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1975).
- [4] Hönig, C. *Équations intégrales généralisées et applications*, Exp. No. 5, Publ. Math. Orsay 83, 1, Univ. Paris XI, Orsay, 1983.
- [5] Istrăţescu, V. *Fixed Point Theory. An Introduction*, volume 7. D. Reidel Publ. Comp., London, 1988.
- [6] Prandini, J. *Extensions of the Representation Theorems of Riesz and Fréchet*, Mathematica Bohemica, **118**(1993), 297-312.

# Perfect Measures, Nuclear Spaces and the Convex Compactness Property

*Medidas Perfectas, Espacios Nucleares y la Propiedad de Compacidad Convexa*

Jorge Vielma B. (vielma@ula.ve)

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias.  
Universidad de Los Andes  
Mérida, Venezuela.

## Abstract

It is proved that for certain kinds of  $K$ -spaces  $X$ , the spaces  $(C_b(X, E), \beta_p)$  has the convex compactness property if  $E$  is a Banach space. Also, if  $X$  is a real-compact  $K$ -spaces then  $(C_b(X, E), \beta_p)$  is a nuclear space if and only if  $X$  is finite and  $E$  is finite dimensional.

**Key words and phrases:**  $P$ -spaces,  $K$ -spaces,  $Do$ -spaces, real-compact spaces, convex compactness property, nuclear spaces.

## Resumen

Se prueba que para ciertos tipos de  $K$ -espacios  $X$ , los espacios  $(C_b(X, E), \beta_p)$  tienen la propiedad de compacidad convexa si  $E$  es un espacio de Banach. También, si  $X$  es un  $K$ -espacio real-compacto, entonces  $(C_b(X, E), \beta_p)$  es un espacio nuclear si y solo si  $X$  es finito y  $E$  es finito dimensional.

**Palabras y frases clave:**  $P$ -espacios,  $K$ -espacios,  $Do$ -espacios, espacios real-compactos, propiedad de compacidad convexa, espacios nucleares.

## 1 Introduction

Let  $X$  be a completely regular Hausdorff space,  $E$  a Banach space. By  $C_b(X)$  we will denote the set of all bounded real-valued continuous function on  $X$  and  $C_b(X, E)$  denotes all bounded continuous functions from  $X$  into  $E$ .  $C_b(X) \otimes E$  denotes the tensor product of  $C_b(X)$  and  $E$  [5]. Sentilles in [6] defined locally convex topologies  $\beta_0$  and  $\beta_1$  on  $C_b(X)$ , which yield the spaces of  $M_t(X)$  and  $M_\sigma(X)$  of tight and  $\sigma$ -additives Baire measures on  $X$  as dual spaces. Koumoullis in [4] defined a new topology  $\beta_p$  on  $C_b(X)$ , and redefined the topology  $\beta_\infty$  on  $C_b(X)$  which yield the spaces  $M_p(X)$  and  $M_\infty(X)$  of perfect and uniform Baire measure on  $X$  as dual space. For the vector case see [2],[3],[8].

Let us recall that a completely regular Hausdorff space  $X$  is called a  $K$ -space if it has the weak topology determined by the family of its compact subsets, that is to say that a set  $A \subseteq X$  is *closed* iff  $A \cap K$  is closed for all compact subsets  $K$  of  $X$ . A locally convex space is said to have

---

Received 1/2010. Revised 2/2010. Accepted 4/2010.

MSC (2010): Primary 54D60; Secondary 54E18.

Corresponding author: Jorge Vielma B.

the *convex compactness property* if for every compact  $K$  its closed absolutely convex hull is also compact. The easiest way for a locally convex space  $E$  to have the convex compactness property is that of being complete or quasicomplete in the Mackey topology [5]. A spaces  $X$  is said to be a  $D_0$ -space if its real-compactification  $\nu X$  and its topological completion  $\theta X$  coincide. If  $F$  is a locally convex space and  $B \neq \emptyset$  is a convex, circled and bounded subset of  $F$ , then  $F_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} n B$  is a subspaces of  $F$ . The gauge function  $P_B$  of  $B$  in  $F_1$  is easily seen to be a norm on  $F_1$ . The normed space  $(F_1, P_B)$  is denoted by  $F_B$ . A linear map  $u : E \rightarrow F$  is said to be *nuclear* if it is of the form

$$x \rightarrow u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x) y_n$$

where  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$ ,  $\{f_n\}$  is an equicontinuous sequence in  $E'$  and  $\{y_n\}$  is a sequence contained in a convex, circled and bounded subset  $B$  of  $F$  for which  $F_B$  is complete. A locally convex space  $E$  is said to be *nuclear* if every continuous linear map of  $E$  into any Banach space is nuclear.

## 2 Nuclearity and the Convex Compactness Property

**Theorem 1.** *Let  $X$  be a  $K$ -space and a  $D_0$ -space,  $E$  a Banach space and  $H \subseteq C_b(X, E)$ . Then, the following conditions are equivalent:*

- (a)  *$H$  is uniformly bounded, equicontinuous, and  $H(x)$  is relatively compact in  $E$  for every  $x \in X$ .*
- (b)  *$H$  is  $\beta_p$ -relatively compact.*
- (c)  *$H$  is  $\beta_p$ -precompact.*

*Proof.* We see (a)  $\Rightarrow$  (b). Suppose that  $H$  is a uniformly bounded, equicontinuous subset of  $C_b(X, E)$  such that  $H(x)$  is relatively compact subset of  $E$  for every  $x \in X$ . Then, the pointwise closure  $\overline{H}$  of  $H$  is also equicontinuous and by Ascoli's Theorem it is precompact in the compact-open topology on  $C_b(X, E)$ . Now, since  $\overline{H}$  is uniformly bounded, we have that on  $\overline{H}$ ,  $\beta_0$  is the compact-open topology and so,  $\overline{H}$  is also  $\beta_0$ -precompact. Also, since  $X$  is a  $K$ -space, it is know that  $(C_b(X, E), \beta_0)$  is complete ([1]). Then in this case,  $\overline{H}$  will also be  $\beta_0$ -compact and since  $\beta_\infty$  is the finest locally convex topology agreeing with the pointwise topology on the uniformly bounded subsets of  $C_b(X, E)$ , we have that  $\overline{H}$  will also be  $\beta_\infty$ -compact. But, we have that  $X$  is a  $D_0$ -space, then  $\beta_p \leq \beta_\infty$  implies that  $\overline{H}$  is  $\beta_p$ -compact so  $H$  is relatively  $\beta_p$ -compact.

(b)  $\Rightarrow$  (c) is trivial. Finally, we see (c)  $\Rightarrow$  (a). Suppose then that  $H$  is  $\beta_p$ -precompact. Since  $\beta_0 \leq \beta_p$  it follows that  $H$  is also  $\beta_0$ -precompact then  $H$  is  $\beta_0$ -bounded which also implies that  $H$  is uniformly bounded. Now, since  $\beta_0$  is the finest locally convex topology agreeing with the compact-open topology on uniformly bounded subset of  $C_b(X, E)$ , it follows that  $H$  is precompact respect to the compact open topology, then by Ascoli's theorem  $H$  when restricted to each compact subset of  $X$  is equicontinuous. But  $X$  is a  $K$ -space then it follows that  $H$  is equicontinuous. Now, let  $x \in X$  and we prove that  $H(x)$  is relatively compact. Since  $H$  is pre-compact in the pointwise topology, every net  $\{f_\alpha\}$  in  $H$  has a Cauchy subnet  $\{f_\beta\}$ . Therefore,  $\{f_\beta(x)\}$  is Cauchy in  $E$  for every  $x \in X$ . Then the result follows.  $\square$

**Theorem 2.** *Let  $X$  be a  $K$ -space and a  $D_0$ -space and  $E$  a Banach space. Then,  $(C_b(X, E), \beta_p)$  has the convex compactness property.*

*Proof.* Let  $A$  be a  $\beta_p$ -compact subset of  $C_b(X, E)$ . Then, the absolutely convex hull of  $A$  will be  $\beta_p$ -precompact and by Theorem 1, the closed absolutely convex hull of  $A$  will be  $\beta_p$ -compact.  $\square$

**Theorem 3.** *Let  $X$  be a realcompact  $K$ -space, the  $(C_b(X), \beta_p)$  is a nuclear space if and only if  $X$  is finite.*

*Proof.* Clearly if  $X$  is finite, then  $(C_b(X), \beta_p)$  is topologically isomorphic to  $\mathbb{R}^n$ , being  $n$  the cardinality of  $X$ . Now, since  $\mathbb{R}^n$  is nuclear, the conclusion follows. Now let us suppose that  $(C_b(X), \beta_p)$  is nuclear, then every bounded subset is  $\beta_p$ -precompact ([5]), thus the closed unit ball  $B = \{f \in C_b(X) : \|f\| \leq 1\}$  is  $\beta_p$ -precompact. Now, since every realcompact space is topologically complete, by Theorem 1,  $B$  is  $\beta_0$ -compact and since  $\beta_0 \leq \beta_p$  we have that  $B$  is  $\beta_\sigma$ -compact which implies that  $X$  is discrete ([7]). Then,  $X$  is a realcompact metric space. But then  $M_p(X) = M_t(X)$  and since  $X$  is a  $P$ -space, we have that both  $\beta_0$  and  $\beta_p$  are Mackey's topologies ([1], [3]), and so,  $\beta_0 = \beta_p$  and  $(C_b(X), \beta_0)$  is a nuclear space, which implies that  $X$  is finite ([1]).  $\square$

**Theorem 4.** *Let  $X$  be realcompact  $K$ -space and  $E$  a Banach normed space. Then,  $(C_b(X, E), \beta_p)$  is a nuclear space if and only if  $X$  is finite and  $E$  is finite dimensional.*

*Proof.* If  $X$  is finite and  $E$  is finite dimensional then, as in the proof of Theorem 3,  $(C_b(X, E), \beta_p)$  is topologically isomorphic to  $E^n$  for some  $n$ . Then,  $(C_b(X, E), \beta_p)$  is a nuclear space. Conversely, suppose that  $(C_b(X, E), \beta_p)$  is nuclear. For a fixed  $e \in E$ , we have that  $(C_b(X), \beta_p)$  is topologically isomorphic to the subspace  $C_b(X) \otimes e$  of  $(C_b(X, E), \beta_p)$ . Since every subspace of a nuclear space is again nuclear, we get that  $(C_b(X), \beta_p)$  is nuclear, and by Theorem 3,  $X$  is finite. Also, we know that  $E$  is embedded as a subspace of  $(C_b(X, E), \beta_p)$  and so,  $E$  is a normed nuclear space, then  $E$  is finite dimensional.  $\square$

**Theorem 5.** *If  $X$  is a  $K$ -space and  $E$  is Banach space then  $(C_b(X, E), \beta_p)$  is sequentially complete.*

*Proof.* Let  $\{f_n\}$  be a Cauchy sequence in  $(C_b(X, E), \beta_p)$ . Since  $X$  is a  $K$ -space,  $(C_b(X, E), \beta_0)$  is complete ([1]) and since  $\beta_0 \leq \beta_p$  we have that  $\{f_n\}$  is  $\beta_0$ -convergent to function  $f \in C_b(X, E)$ . We claim that  $\{f_n\}$  also converges to  $f$  in  $(C_b(X, E), \beta_p)$ . In fact, since  $\beta_p$  has a base  $W$  of  $\beta_p$ -closed absolutely convex sets which are weakly closed and since  $|\mu|(\|f_n - f\|) \rightarrow 0$  by the Dominated Convergence Theorem, if  $U \in W$  then there exist  $N_0 \geq 1$  integer such that for every  $n \geq N_0$ ,

$$|\mu(f_n) - \mu(f)| \leq |\mu|(\|f_n - f\|) \quad \mu \in M_p(X)$$

then  $f_n - f \in U$  and the theorem holds.  $\square$

## References

- [1] S. Choo, *Strict topologies on spaces of continuous vector-valued functions*, Canad. J. Math. **XXXI** (1979), 890-896.
- [2] S. S. Khurana, *Topologies on spaces of vector-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **24** (1978), 95-211.



- [3] S. S. Khurana and J.E.Vielma, *Strict topologies and perfect measures*, Czechoslovak Math. J. **40** (1990), 1-7
- [4] G. Koumoullis, *Perfect,  $u$ -additive measures and strict topologies*, Illinois J. Math. **26** (1982), 466-478.
- [5] H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan New York. 1966.
- [6] F. D. Sentiles, *Bounded continuous functions on completely regular spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **168** (1972).
- [7] R. Wheeler, *The strict topology for  $P$ -spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 466-472.
- [8] R. Wheeler, *A survey of Baire measures and strict topologies*, Expo. Math. **2** (1983), 97-190.

# Simulaciones numéricas para la estabilización de sistemas mecánicos subactuados de grado uno, usando el método IDA-PBC: el caso del sistema TORA

*Numerical simulations for stabilization of underactuation mechanical systems of degree one, using IDA-PBC method: the TORA system example*

Maribel Cecilia Pérez Pirela ([maribel.perez@fing.luz.edu.ve](mailto:maribel.perez@fing.luz.edu.ve))

Centro de Investigación de Matemática Aplicada  
Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela, 4011.

Atilio Morillo Piña ([morilloatlio@gmail.com](mailto:morilloatlio@gmail.com))

Centro de Investigación de Matemática Aplicada  
Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela, 4011.

## Resumen

El problema de la estabilización de sistemas no lineales subactuados ha atraído la atención de la comunidad de control en años recientes. Con el método denominado IDA-PBC (Interconexión y Asignación de Amortiguamiento Control basado en Pasividad), desde el punto de vista teórico, se ha logrado describir el comportamiento dinámico de una amplia clase de dichos sistemas, obteniéndose su representación en la denominada forma Hamiltoniana controlada por puertos, mediante la cual se facilita el diseño de un controlador por realimentación que permite estabilizarlos en torno a un punto de equilibrio deseado. El objetivo general de este estudio es analizar la estabilidad de sistemas mecánicos subactuados de grado 1 mediante el método IDA-PBC. Dentro de este enfoque, para lograr el objetivo de control, se interpreta el mecanismo de estabilización en términos del intercambio de la energía del sistema, para lo cual se siguen dos etapas básicas: (1) la etapa del moldeado de la energía, la cual consiste en modificar la función de energía total del sistema para asignar el estado de equilibrio deseado; y (2) la etapa de inyección de amortiguamiento para alcanzar la estabilidad asintótica. El éxito de la aplicación de este método reside en la posibilidad de resolver el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, cuyas soluciones proveen las funciones de energía asignables al sistema en lazo cerrado. El sistema TORA (“translational oscillator with rotational actuator”) es un prototipo de sistema mecánico subactuado que ha merecido gran atención por la comunidad de control no lineal, y en este trabajo, partiendo de la representación Hamiltoniana controlada por puertos basada en la energía total del sistema considerada como energía cinética más energía potencial, se obtiene un controlador que logra estabilizar en forma global y asintótica el punto de equilibrio alcanzando un excelente desempeño. Las simulaciones numéricas mostradas al final del trabajo confirman esta

apreciación.

**Palabras y frases clave:** Control no lineal, Sistemas mecánicos subactuados, Método IDA-PBC, sistema Tora.

### Abstract

The problem of the stabilization of not linear systems underactuation has attracted the attention of the community of control in the recent years. The so called IDA-PBC method (Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control), from the theoretical point of view, it has been achieved to describe the dynamic behavior of a wide class of the above mentioned systems, obtained a port controlled Hamiltonian form, the controller stabilizes globally and asymptotically the equilibrium point. The general objective of this study is to analyze the stabilization of mechanical systems underactuation degree one using IDA-PBC method. In this method, in order to achieve the control objective, the stabilization mechanism follows two basic stages: (1) energy holding stage, which consists on shaping the total energy function of the system in order to assign the desired equilibrium state, and (2) damping introduction stage, necessary to achieve asymptotic stability. The success of the application of this method resides in the possibility of solving the set of equations in partial derivatives, which solutions provide the assignable functions of energy to the system in closed loop. The TORA system (“translational oscillator with rotational actuator”) is a prototype of a underactuated mechanical system widely studied by the non linear control community. In this paper, a controller is designed taking into account the port controlled Hamiltonian approach based on the total energy of the system, considered as the sum of kinetic and potential energies, the controller stabilizes globally and asymptotically the equilibrium point, showing an excellent performance. The numerical simulations confirm this appreciation.

**Key words and phrases:** Non linear control, underactuated mechanical systems, IDA-PBC method, Tora system.

## 1 Introducción

El método IDA-PBC persigue una dinámica en bucle cerrado con función de Hamilton  $H_d(q, p)$  y una matriz antisimétrica también llamada de interconexión generalizada de la forma  $J_d(q, p) = -J_d(q, p)^T$  que permite aumentar los grados de libertad en el diseño. Las ecuaciones de estado en lazo abierto y cerrado se deben ajustar exactamente. Esto quiere decir que la ley de control  $u$  debe calcularse de modo que

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + Gu = \begin{bmatrix} J_d & -R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $R_d(q) \geq 0$  es la matriz de disipación en bucle cerrado. Las principales dificultades de este método aparecen en el caso de sistemas subactuados, donde el conjunto de funciones de Hamilton  $H_d$  alcanzables en bucle cerrado es limitado, y depende de la resolubilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. En efecto, en el caso subactuado existe una matriz de rango  $m < n$  siendo  $n$  el número de grados de libertad, que representa las direcciones en las que la ley de control no tiene efecto, cumpliéndose que  $G^\perp G = 0$ , es decir, si  $G$  es una matriz constante, las filas de  $G^\perp$  forman el núcleo de  $G$ . Si se premultiplica (1) por  $G^\perp$  se obtiene:

$$G^\perp \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} = G^\perp \begin{bmatrix} J_d & -R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (2)$$

Esta ecuación ha de cumplirse para cualquier valor de la ley de control y, por lo tanto, representa una restricción en el conjunto de sistemas hamiltonianos alcanzables en bucle cerrado definidos por las matrices  $(H_d, J_d, R_d)$ . Una correcta elección de los parámetros  $(H_d, J_d, R_d)$  debe ser compatible con estas ecuaciones de ajuste y al mismo tiempo representar una dinámica en lazo cerrado con las propiedades deseadas en términos de estabilidad. Proporcionar métodos de cálculo de las  $(H_d, J_d, R_d)$  adecuadas y de leyes de control para el ajuste lazo abierto-lazo cerrado es la esencia del método IDA-PBC.

En este trabajo se considera el problema de la estabilización asintótica del sistema TORA utilizando una ley de control sintetizada mediante la aplicación de la metodología IDA-PBC, con la cual se obtiene regulación y estabilización por realimentación de la salida del sistema estudiado.

En la sección 2 se describe el modelo matemático del Sistema Tora, y en la sección 3 se presenta el análisis y diseño del controlador que logra estabilizar el sistema, utilizando el Método IDA-PBC aplicado a sistemas mecánicos subactuados desarrollado en [1]. En la sección 4 se presenta la descripción y construcción de los programas de simulación numérica para el sistema estudiado. En la sección 5 se presentan algunas simulaciones numéricas que verifican la eficiencia del controlador diseñado, y por último, en la sección 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

## 2 Método Matemático del Sistema TORA

El denominado sistema TORA (translational oscillator with rotational actuator) fue introducido por primera vez en [2]. La Figura 1 ilustra el sistema TORA consistente de una plataforma oscilante traslacionalmente de masa  $m_1$ , la cual es controlada vía una masa rotacional excéntrica de masa  $m_2$ . El problema es de interés como un caso de estudio en el diseño de controles no lineales, debido a que el modelo exhibe una interacción no lineal entre sus movimientos traslacional y rotacional.

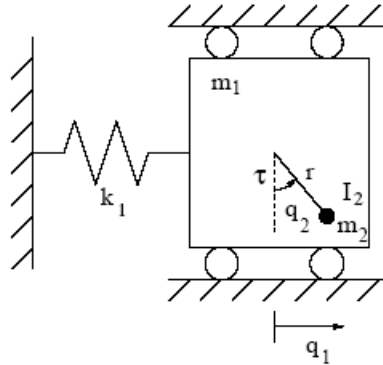


Figura 1: *El Sistema TORA*

La matriz de inercia del sistema posee la forma

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 r \cos(q_2) \\ m_2 r \cos(q_2) & m_2 r^2 + I \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde  $q_2$  es el ángulo de rotación de la masa  $m_2$ ,  $r$  es su radio de excentricidad, e  $I$  es el momento de inercia. Si denotamos por  $q_1$  la posición generalizada del sistema, por  $q = [q_1 \ q_2]^T$ , por  $g$  la constante de gravedad, y por  $V(q_1, q_2)$  la energía potencial de la masa  $m_2$ , el Lagrangiano del sistema viene expresado como:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2] M(q_2) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - V(q_1, q_2) \quad (4)$$

con energía potencial dada por

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} K q_1^2 + m_2 g r \cos(q_2). \quad (5)$$

siendo  $K$  la constante de rigidez del resorte.

Si denotamos por  $\tau$  la fuerza actuadora sobre el punto de giro de  $m_2$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema TORA adoptan la forma:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 r \cos(q_2)\ddot{q}_2 - m_2 r \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + K q_1 = 0 \\ m_2 r \cos(q_2)\ddot{q}_1 + (m_2 r^2 + I)\ddot{q}_2 + m_2 g r \sin(q_2) = \tau \end{cases} \quad (6)$$

resultando así un sistema con 2 grados de libertad, con grado de subactuación 1, y con  $q_2$  como coordenada actuada. De tal manera que se satisfacen las hipótesis  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$ , con  $G = [0 \ 1]^T$ .

Denotando  $c_1 = m_1 + m_2$ ,  $c_2 = m_2 r$ ,  $c_3 = m_2 r^2 + I$  y definiendo el momento de inercia generalizado mediante  $p = M\dot{q}$ , la matriz de inercia  $M$  se escribe como:

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \cos(q_2) \\ c_2 \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde, a fin de obtener  $M(q_2)$  inversible, debe asumirse la siguiente relación entre los parámetros:

$$c_1 c_3 - c_2^2 > 0 \quad (8)$$

### 3 Estabilización del Sistema TORA

#### 3.1 Realización Hamiltoniana.

El sistema Hamiltoniano Generalizado es:

$$\dot{x} = J\nabla H + G(x)^* u \quad (9)$$

donde la matriz  $J$  es antisimétrica, siendo la más sencilla:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si se asume que el sistema no posee amortiguamiento natural, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u \quad (11)$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ ,  $\nabla_q H$ ,  $\nabla_p H$  son los vectores columna gradiente de  $HH$  respecto de  $q$  y respecto de  $p$ , y  $u \in \mathbb{R}^n$  es la función de control. La matriz  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es determinada por la manera como el control  $u \in \mathbb{R}^m$  ingresa en el sistema, y es invertible en el caso que el sistema sea completamente actuado, o sea,  $n = m$ . En esta investigación se considera el caso más difícil en que el sistema es subactuado, es decir, menos controles que grados de libertad, y asumimos que  $\text{rango}(G) = m$ .

Para el sistema TORA  $n = 2$  y  $m = 1 \rightarrow m < n \rightarrow$  Sistema subactuado de grado 1.

La energía total del sistema viene dada por:  $H = \text{Energía Cinética} + \text{Energía Potencial}$

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1} p + V(q) \quad (12)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  representan la posición generalizada y el momento generalizado,  $M(q) = M^T(q) > 0$  es la matriz de inercia del sistema, y  $V(q)$  es la energía potencial.

Para el sistema TORA la matriz  $M$  es la matriz de inercia y viene dada por la ecuación (7) como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \cos(q_2) \\ c_2 \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix}$$

y la energía potencial viene dada por la ecuación (5) como sigue:

$$V(q) = \frac{1}{2} K q_1^2 + m_2 g L (1 - \cos(q_2)).$$

Se busca con el método IDA-PBC hacer coincidir el comportamiento del sistema en lazo abierto con la dinámica objetivo.

La dinámica objetivo según éste método viene dada por:

$$\dot{x} = (J_d - R_d) \nabla H_d \quad (13)$$

donde  $J_d$  es la matriz de interconexión y  $R_d$  la matriz de amortiguamiento, cuyas estructuras son las siguientes:

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G K_v G^T \end{bmatrix}$$

siendo  $M_d$  la matriz de inercia deseada cuya estructura es:

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Moldeado de la energía.

En la teoría de control, basado en pasividad (PBC), la entrada de control usualmente se descompone en dos términos (véase [3]).

$$u = u_{es}(q, p) + u_{di}(q, p) \quad (14)$$

donde el primer término es designado para alcanzar el moldeado de la energía, mientras que a través del segundo término se introduce amortiguamiento al sistema. Por otro lado, como es bien sabido, el aporte de amortiguamiento en sistemas pasivos se logra vía realimentación negativa de

la nueva salida pasiva, la cual en este caso viene dada por  $G^T \nabla_p H_d$ . Esta es la razón por la cual se elige para el término  $u_{di}$  de la ecuación (14) la expresión:

$$u_{di} = K_v G^T \nabla_p H_d \quad (15)$$

donde se toma  $K_v = K_v^T > 0$ . Esto justifica el bloque (2,2) en la definición de  $R_d$ .

Al igualar el sistema en lazo abierto y la dinámica objetivo, resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G K_v G^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $H_d$  es la energía total deseada que mantiene la misma forma de la energía total original del sistema y esta expresada por:

$$H_d = \frac{1}{2} P^T M_d^{-1} P + V(q) \quad (17)$$

Para obtener el término de moldeado de la energía en el controlador, se reemplazan (14) y (15) en (16) y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u_{es} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde el término  $R_d$  de (16) se ha cancelado con el término de (15).

La primera fila de la ecuación (18) produce una identidad para  $\dot{q}$  como sigue a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= V_p H = M^{-1} M_d \nabla_p H_d \\ \dot{q} &= M^{-1} p = M^{-1} M_d M_d^{-1} p = M^{-1} p \end{aligned}$$

Con lo que se consigue que la primera ecuación es una igualdad.

De tal manera que  $\dot{q}$  equivale a:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = M^{-1} p \quad (19)$$

donde  $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$  y  $M$  es la matriz de inercia dada por la ecuación (7), entonces se procede a calcular  $M^{-1}$  como sigue:

$$M^{-1} = \frac{1}{\delta_1} = \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde  $\delta_1 = c_1 c_3 - (c_2 \cos(q_2))^2$ .

Se sustituye las ecuaciones anteriores en (19) resultando lo siguiente:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = M^{-1} p = \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

donde la primera ecuación correspondiente a  $\dot{q}_1$  es la siguiente:

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] \quad (21)$$

y la segunda ecuación correspondiente a  $\dot{q}_2$  es la siguiente:

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \quad (22)$$

Ahora se resuelve la segunda fila de la ecuación (18) correspondiente a  $\dot{p}$  como sigue a continuación:

$$G u_{es} = \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \quad (23)$$

Si el sistema fuese subactuado, o sea si  $G$  fuese invertible, para determinar  $u_{es}$  bastaría premultiplicar por  $G^{-1}$ . En el caso de estudio el sistema es subactuado, luego  $G$  ya no es invertible, sino a lo sumo de rango por columnas máximo, y por lo tanto el control  $u_{es}$  únicamente ejerce influencia sobre los términos en el espacio imagen del operador  $G$ . Esta observación conduce al siguiente conjunto de ecuaciones de restricción, las cuales deben satisfacerse para cualquier escogencia de  $u_{es}$ .

$$G^\perp \{ \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p \} = 0 \quad (24)$$

donde  $G^\perp$  es un anulador izquierdo de rango máximo de  $G$  (o sea,  $GG^\perp = 0$ ).

La ecuación (24) es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales con incógnitas  $M_d$  y  $V_d$ , y con  $J_2$  siendo un parámetro libre, mientras que  $p$  es una coordenada independiente. Si puede obtenerse una solución para esta ecuación, la ley de control resultante  $u_{es}$  vendría dada por:

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} (\nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d + J_2 M_d^{-1} p) \quad (25)$$

Las ecuaciones en derivadas parciales (24) pueden de manera natural ser separadas en términos que dependen de  $p$  y términos que son independientes de  $p$ , o sea, aquéllos que corresponden a la energía cinética, y aquéllos que corresponden a la energía potencial, respectivamente. En tal sentido, la ecuación (24) es equivalente al par de ecuaciones:

$$G^\perp \{ \nabla_q (p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1} \nabla_q (p^T M^{-1} p) + 2J_2 M_d^{-1} p \} = 0 \quad (26)$$

$$G^\perp \{ \nabla_q V - M_d M^{-1} \nabla_q V \} = 0 \quad (27)$$

La primera ecuación es una ecuación en derivadas parciales no lineal que debe ser resuelta para los elementos desconocidos de la matriz de inercia en lazo cerrado  $M_d$ . Conocida esta  $M_d$ , la ecuación (27) es una ecuación en derivadas parciales lineal, y por lo tanto más fácil de resolver, de manera que la mayor dificultad está en resolver (26). Una simplificación, que disminuye considerablemente las dificultades, es asumir la existencia de una matriz de inercia  $M_d$  de términos constantes, lo cual permite concentrarse únicamente en hallar la energía potencial deseada  $V_d$ .

Afortunadamente, esta simplificación puede llevarse a cabo en el caso de algunos sistemas subactuados, en los cuales la matriz de inercia es función solamente de la coordenada actuada.

En esta investigación, se sigue la orientación de [1] y [4], donde para obtener una reducción de las EDP (26) y (27), se plantean las siguientes hipótesis:

Hipótesis H1: El sistema posee grado de subactuación 1, es decir,  $m = n - 1$ .

Hipótesis H2: La matriz de inercia depende solamente de la coordenada actuada.



Hipótesis H3: El sistema posee dos grados de libertad, y, sin pérdida de generalidad, la matriz  $G$  viene dada por  $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ .

La hipótesis  $H3$  es crucial en el presente desarrollo. Las hipótesis  $H1$  y  $H2$  garantizan que el término  $G^T \nabla_q (p^T M_p^{-1} p)$  en la EDP (26) es nulo. En tal caso (26) puede ser resuelta para una matriz constante  $M_d$ , para lo cual, sobre la base de su libertad de escogencia, basta tomar  $J_2 = 0$ . Esto permite concentrarse en el moldeado de la energía potencial solamente, de manera que la EDP a resolver se reduce a:

$$G^\perp \{M_d M^{-1} \nabla V_d\} = 0 \quad (28)$$

De esta forma la segunda fila de la ecuación (18) queda:

$$\dot{p} = -\nabla_q H + G u_{es} = -M_d M^{-1} \nabla_q H_d \quad (29)$$

y al sustituir quedaría:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{es} = \\ &= - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cos(q_2) \\ -c_2 \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H_d \\ \nabla_{q_2} H_d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Además como la matriz  $M_d$  es constante, entonces  $\nabla_{q_1} H_d = \nabla_{q_1} V_d$  y  $\nabla_{q_2} H_d = \nabla_{q_2} V_d$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{es} = \\ &= - \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2) & -a_1 c_2 \cos(q_2) + a_2 c_1 \\ a_2 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2) & -a_2 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} V_d \\ \nabla_{q_2} V_d \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

La primera fila de  $\dot{p}$  es  $\dot{p}_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\nabla_{q_1} H = \\ &= -\frac{1}{\delta_1} [(a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2)) \nabla_{q_1} V_d + (-a_1 c_2 \cos(q_2) - a_2 c_1) \nabla_{q_2} V_d] \end{aligned} \quad (31)$$

$\nabla_{q_1} H = K q_1$  se sustituye en (31) y se tiene la EDP que permite la búsqueda de la  $V_d$ .

$$K q_1 = -\frac{1}{\delta_1} [(a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2)) \nabla_{q_1} V_d + (-a_1 c_2 \cos(q_2) - a_2 c_1) \nabla_{q_2} V_d] \quad (32)$$

Claramente el sistema TORA satisface las hipótesis  $H1$ ,  $H2$  y  $H3$  comentadas anteriormente, por lo tanto, la atención puede concentrarse en la resolución de la EDP de la ecuación (32). Para ello se define la matriz  $M_d$  mediante:

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{con } a_1 > 0 \quad \text{y} \quad a_1 a_3 - a_2^2 > 0 \quad (33)$$

La ecuación (32) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2) \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} \nabla_{q_1} V_d + \nabla_{q_2} V_d = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 \cos(q_2) \end{bmatrix} K q_1 \quad (34)$$

La ecuación anterior puede intentar resolverse usando el comando *pdsolve* del programa Maple pero se obtiene una solución extremadamente complicada, válida para cualquier conjunto de valores de los parámetros  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ . Para resolver esta dificultad, se recurre a un subconjunto de valores posibles para estos parámetros que reducen la complejidad de la ecuación.

Se denota:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_1 c_3 - a_2 c_2 \cos(q_2)}{a_2 c_1 - a_1 c_2 \cos(q_2)} = \frac{b_3 + b_4 \cos(q_2)}{b_1 + b_2 \cos(q_2)} \quad (35)$$

donde  $b_1 = a_2 c_1$ ,  $b_2 = -a_1 c_2$ ,  $b_3 = a_1 c_3$  y  $b_4 = -a_2 c_2$ . Una simple división en el término de la derecha de (35) da lugar a:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{b_4}{b_2} + \left( \frac{b_3 b_2 - b_1 b_4}{b_2} \right) \frac{1}{b_1 + b_2 \cos(q_2)} \quad (36)$$

de manera que se obtiene:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{b_4}{b_2} \Leftrightarrow b_3 b_2 - b_1 b_4 = 0, \quad (37)$$

es decir,

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow a_2 = \pm \sqrt{\frac{c_3}{c_1}} a_1 = \alpha a_1. \quad (38)$$

En lo sucesivo, para simplificar, se toma únicamente el valor positivo de la constante  $\alpha$  sobre el conjunto:

$$\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1, a_2, \text{ y } a_3 \text{ satisfacen (38) y además, } a_2 = \alpha a_1\} \quad (39)$$

Sustituyendo  $a_2 = \alpha a_1$  y  $\delta_1 = c_1 c_3 - (c_2 \cos(q_2))^2$  en la ecuación (34) y tomando en cuenta que  $\alpha = \sqrt{\frac{c_3}{c_1}}$ , finalmente se consigue la EDP para hallar la  $V_d$ :

$$\frac{\alpha}{q_1} \nabla_{q_1} V_d + \frac{1}{q_1} \nabla_{q_2} V_q = \frac{K}{a_1} [\sqrt{c_1 c_3} + c_2 \cos(q_2)] \quad (40)$$

La aplicación del método de las características a la ecuación (40) conduce a la solución de la EDP. Se toma como condición inicial:

$$\gamma : q_1(s) = s, q_2(s) = 0 \text{ y } V_d(s) = f(s).$$

Para asignar el punto de equilibrio en el origen a la función  $V_d$  puede elegirse la función  $f(s)$  como  $f(s) = \frac{1}{2} R_d (q_1 - \alpha q_2)^2$ , donde se ha introducido  $R_d$  como un parámetro de diseño y con lo cual se obtiene finalmente para la energía potencial deseada:

$$V_d = \frac{1}{2} R_d (q_1 - \alpha q_2)^2 + \frac{K}{a_1} \left( -\frac{\alpha q_2^2}{2} \sqrt{c_1 c_3} + q_1 q_2 \sqrt{c_1 c_3} + \alpha c_2 \cos(q_2) - \alpha c_2 + c_2 q_1 \sin(q_2) \right) \quad (41)$$

Se sabe por el Principio de Lagrange que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Puntos} \\ \text{de equilibrio} \\ \text{del sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Puntos} \\ \text{críticos de} \\ V_d \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{c} \text{Puntos} \\ \text{de equilibrio} \\ \text{estables} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Puntos} \\ \text{mínimos de} \\ V_d \end{array} \right\}$$

Se procede a calcular los puntos críticos de la función  $V_d$ , es decir,  $\nabla_q V_d = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_d}{\partial q_1} &= R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \operatorname{sen}(q_2))}{a_1} \\ \frac{\partial V_d}{\partial q_2} &= -R_d(q_1 - \alpha q_2)\alpha + \frac{K(-\alpha\sqrt{c_1 c_3} q_2 + \sqrt{c_1 c_3} q_1 - \alpha c_2 \operatorname{sen}(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2))}{a_1} \\ \frac{\partial V_d}{\partial q_1} &= \frac{\partial V_d}{\partial q_2} = 0 = \nabla_q H_d = \nabla_q V_d \\ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \operatorname{sen}(q_2))}{a_1} &= 0 \\ -R_d(q_1 - \alpha q_2)\alpha + \frac{K(-\alpha\sqrt{c_1 c_3} q_2 + \sqrt{c_1 c_3} q_1 - \alpha c_2 \operatorname{sen}(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2))}{a_1} &= 0\end{aligned}$$

Resultando ser  $q_1 = 0$  y  $q_2 = 0$ , de manera que son puntos críticos de  $V_d$  y por lo tanto, puntos de equilibrio del sistema TORA.

Se evalúa la función  $V_d$  en  $(0, 0)$ , entonces  $V_d(0, 0) = \alpha c_2 - \alpha c_2 = 0$ . Para verificar si el punto  $(0, 0)$  es un punto mínimo se procede a calcular el Hessiano:

$$\begin{aligned}Hess(V_d) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_2^2} \end{bmatrix}_{(0,0)} \\ Hess(V_d) &= \begin{bmatrix} R_d & -R_d\alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2}{a_1} \\ -R_d\alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2}{a_1} & R_d\alpha^2 + \frac{K\alpha\sqrt{c_1 c_3} + K\alpha c_2}{a_1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para que exista un mínimo en la función  $V_d$  los menores deben ser positivos:

- Determinante 1:  $R_d > 0$ .
- Determinante 2:  $-R_d\alpha \left( \frac{-R_d\alpha + K\sqrt{c_1 c_3} - Kc_2}{a_1} \right) - \left( -R_d\alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2}{a_1} \right)^2 > 0$ . Al resolver resulta lo siguiente

$$R_d < 2 \frac{(K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2)}{a_1 \alpha} \quad (42)$$

Por lo tanto, si se cumple que  $R_d < 2 \frac{(K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2)}{a_1 \alpha}$ , entonces el  $Hess(V_d(0, 0))$  es definido positivo, así  $(0, 0)$  es un mínimo y es un punto de equilibrio estable.

Una vez encontrada la  $V_d$  correcta se procede a determinar la función de control  $u_{es}$  que permita estabilizar el sistema TORA.

Se retoma la ecuación (18) para despejar la  $u_{es}$  que logre que el sistema en lazo cerrado tenga el mismo comportamiento de la dinámica objetivo. Para ello se toma la segunda fila expresada por la ecuación (29) como sigue:

$$\dot{p} = -\nabla_q H + G u_{es} = -M_d M^{-1} \nabla_q H_d$$

$G u_{es} = \nabla_q H - M_d M^{-1} \nabla_q H_d$ , tomando en cuenta que  $G$  no es inversible al resolver se obtiene lo siguiente:

$$u_{es} = -\frac{1}{\delta_1} [\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2)] \nabla_{q_1} V_d + (-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1) \nabla_{q_2} V_d + \nabla_{q_2} H \quad (43)$$

Al sustituir los cálculos correspondientes a  $\frac{\partial V_d}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial V_d}{\partial q_2}$  y  $\frac{\partial H}{\partial q_2}$  en la ecuación (43) resulta al simplificar:

$$\begin{aligned} u_{es} = & -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_2} q_2 + c_2 \sin(q_2))}{a_1} \right] - \\ & -\frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K}{a_1} (\sqrt{c_1 c_3} (q_1 - \alpha q_2) - \alpha c_2 \sin(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2)) \right) - \\ & -\frac{c_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{c_2 p_1 p_2 \sin(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \sin(q_2). \end{aligned} \quad (44)$$

### 3.3 Inyección de Amortiguamiento

Una vez encontrada la  $u_{es}$ , se procede a calcular la función de control  $u$  que garantiza la estabilización asintótica del sistema TORA. Se sabe que  $u = u_{es}(q, p) + u_{di}(q, p)$  y que  $u_{di} = -kv G^T \nabla_p H_d$  de tal manera que:

$$\begin{aligned} \nabla_p H_d &= M_d^{-1} p \\ u_{di} &= -kv [0 \quad 1] M_d^{-1} p \end{aligned}$$

Como la matriz de inercia deseada tiene la forma:

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & a_3 \end{bmatrix} \text{ entonces } M_d^{-1} = \frac{1}{\delta_2} \begin{bmatrix} a_3 & -\alpha a_1 \\ -\alpha a_1 & a_1 \end{bmatrix} \text{ donde } \delta_2 = a_1 a_3 - \alpha^2 a_1^2.$$

La inyección de amortiguamiento viene dada por:

$$u_{di} = -\frac{kv}{\delta_2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} a_3 & -\alpha a_1 \\ -\alpha a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

al resolver se obtiene:

$$u_{di} = -\frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]$$

Finalmente la función de control que garantiza que el sistema TORA en lazo cerrado se comporte igual que la dinámica objetivo propuesto por método IDA-PBC y que logra la estabilidad asintótica del sistema.

$$u = u_{es} - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]$$

$u_{es}$  es la calculada y corresponde a la ecuación (44). Sustituyendo  $u_{es}$  se consigue que la función de control  $u$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} u = & -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_2} q_2 + c_2 \sin(q_2))}{a_1} \right] - \\ & -\frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K}{a_1} (\sqrt{c_1 c_3} (q_1 - \alpha q_2) - \alpha c_2 \sin(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2)) \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{c_2^2 \operatorname{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] \frac{c_2 p_1 p_2 \operatorname{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \operatorname{sen}(q_2) - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]. \quad (45)$$

Una vez encontradas cada una de las funciones necesarias para la aplicación del método IDA-PBC, es posible presentar el sistema TORA en lazo cerrado, sustituyendo  $\nabla_{q_2} H$  y  $u$ :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] & \dot{q}_2 &= \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \\ \dot{p}_1 &= -K q_1 & \dot{p}_2 &= -\nabla_{q_2} H + u \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\nabla_{q_2} H$  y  $u$  en el sistema de EDO anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] & \dot{q}_2 &= \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] & \dot{p}_1 &= -K q_1 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \operatorname{sen}(q_2))}{a_1} \right] - \\ &-\frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K}{a_1} (\sqrt{c_1 c_3} (q_1 - \alpha q_2) - \alpha c_2 \operatorname{sen}(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2)) \right) - \\ &-\frac{c_2^2 \operatorname{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] \frac{c_2 p_1 p_2 \operatorname{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \operatorname{sen}(q_2) - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]. \quad (46) \end{aligned}$$

Por otro lado, se determina la dinámica objetivo del sistema TORA como se muestra a continuación. De la ecuación (1) se sabe que la dinámica objetivo tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = [J_d - R_d] \nabla H_d.$$

Una vez realizadas las sustituciones y cálculos se obtiene el sistema para la dinámica objetivo:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] & \dot{q}_2 &= \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \\ \dot{p}_1 &= -\frac{(-a_1 c_3 - \alpha a_1 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \operatorname{sen}(q_2))}{a_1} \right] - \\ &-\frac{(-a_1 c_2 \cos(q_2) + \alpha a_1 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K}{a_1} (\sqrt{c_1 c_3} (q_1 - \alpha q_2) - \alpha c_2 \operatorname{sen}(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2)) \right) - \\ &-\frac{c_2^2 \operatorname{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] \frac{c_2 p_1 p_2 \operatorname{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \operatorname{sen}(q_2) - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]. \\ \dot{p}_2 &= -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \operatorname{sen}(q_2))}{a_1} \right] - \\ &-\frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K}{a_1} (\sqrt{c_1 c_3} (q_1 - \alpha q_2) - \alpha c_2 \operatorname{sen}(q_2) + c_2 q_1 \cos(q_2)) \right) - \\ &-\frac{c_2^2 \operatorname{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] \frac{c_2 p_1 p_2 \operatorname{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \operatorname{sen}(q_2) - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]. \quad (47) \end{aligned}$$

## 4 Programas de Simulación Numérica.

Para corroborar el comportamiento esperado de los sistemas controlados se diseñaron programas utilizando la herramienta computacional *Matlab 7.1*. Para simular un sistema no lineal controlado utilizando Matlab, se requieren dos programas llamados: Programa de simulación y Programa del sistema o modelo a simular. El programa de simulación permite definir los lineamientos básicos de la simulación: tiempo de simulación (inicial y final), condiciones iniciales y tipo de algoritmo de simulación (*ode23*, *ode45*,...); inclusive se puede definir los parámetros del sistema controlado y hasta graficar los resultados de la simulación. Este programa consiste en un conjunto lógico de instrucciones de ejecución secuencial denominado *script* en el ambiente Matlab. El corazón principal de este programa es el algoritmo de simulación. En esta investigación se utilizó el algoritmo *ode45*, el cual es un método de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante fórmulas de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden.

El modelo a simular se presenta por medio de un programa o función, o *function* en Matlab, en el cual se plantean explícitamente las ecuaciones diferenciales asociadas al sistema de control. Esencialmente, posee dos parámetros de entrada, el tiempo  $t$  de simulación y la variable de estado  $x$ , representadas por  $(q_1, q_2, p_1$  y  $p_2)$ , debido a que éstas son las variables utilizadas directamente por los algoritmos de simulación. Junto con las ecuaciones diferenciales que representan el modelo del sistema, aparece la ley de control diseñada, la cual puede estar definida a través de variables auxiliares locales. A diferencia del *script*, el modelo a simular requiere un encabezado con la palabra *function* < salida >=*nomarch* > ( $t, x$ ), donde < salida > corresponde al vector  $\dot{x}$  que refleja la dinámica del sistema, < nomarch > es el nombre original del programa, que tiene la extensión *.m* y el par  $(t, x)$  representan las variables de tiempo y de estado correspondientes de la simulación y del sistema a simular.

El diseño de estos programas de simulación numérica, permiten proporcionar información numérica y gráfica, sobre la función correcta de  $H_d$ ,  $J_d$ ,  $R_d$  y la ley de control para el ajuste lazo abierto-lazo cerrado, que permitan que el sistema en lazo cerrado tenga el mismo comportamiento de la dinámica objetivo.

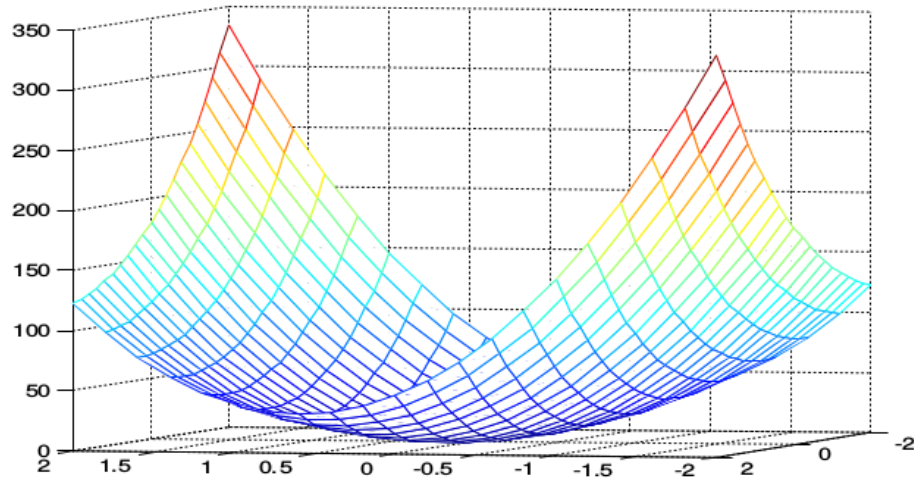
Para el sistema TORA, se diseñaron 6 programas descritos como: 3 programas de simulación y 3 programas del sistema o modelo a simular. Los dos primeros denominados VDESTORA Y SIMVDESTORA como se muestra en el anexo A, están dirigidos a verificar si la  $V_d$  hallada en la resolución de la EDP, cumple con ser una función de Lyapunov. Los dos siguientes programas denominados TORALAZ y SIMTORALAZ como se muestra en el anexo B, están dirigidos a corroborar el comportamiento de la dinámica en lazo cerrado. Asimismo, los programas denominados TORADIN y SIMTORADIN como se muestra en el anexo C, están dirigidos a corroborar el comportamiento de la dinámica objetivo.

## 5 Simulaciones Numéricas.

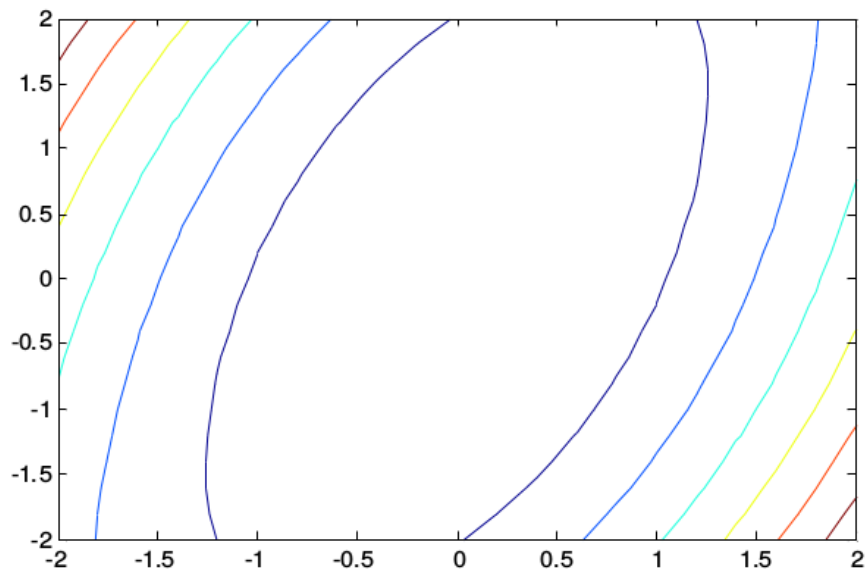
A continuación se presenta los resultados obtenidos utilizando los programas computacionales VDESTOR Y SIMVDESTOR, los cuales fueron diseñados para comprobar que la  $V_d$  hallada al resolver la EDP, es la función Lyapunov que se necesita para calcular la función de control que permita estabilizar el sistema TORA.

Al ejecutar dichos programas se obtiene los siguientes resultados para la función  $V_d$  del sistema TORA:

- (1) Grafica la función.

Figura 2: Gráfica de la función  $V_d$ 

(2) Grafica las curvas de nivel de la función.

Figura 3: Curvas de nivel de la función  $V_d$ 

(3) Determina si la función es cóncava o convexa en  $(0,0)$ .

Ingrese x: 0  
 Ingrese y: 0  
 valores\_propios=  
 22.7129  
 90.0000

Existe un mínimo y la función es convexa.

(4) Puntos críticos de la función

x=  
 $1/18*33^{(1/2)}*atan(i*131^{(1/2)},-2*33^{(1/2)})-1/18*i*131^{(1/2)}$   
 $1/18*33^{(1/2)}*atan(-i*131^{(1/2)},-2*33^{(1/2)})+1/18*i*131^{(1/2)}$   
 0.  
 0.  
 y=  
 $atan(i*131^{(1/2)},-2*33^{(1/2)})$   
 $atan(-i*131^{(1/2)},-2*33^{(1/2)})$   
 0.  
 0.

(5) Hessiano y gradiente en (0,0).

grad=  
 0 0  
 hess=  
 90.0000 0  
 0 22.7129

Para el modelo del sistema TORA, se realizaron simulaciones computacionales con los programas TORALAZ, SIMTORALAZ, TORADIN y SIMTORADIN, usando la plataforma de Matlab 7.1. Con estas simulaciones se muestra el desempeño del controlador propuesto. Se emplearon para el sistema TORA, los parámetros contenidos en el Cuadro 1 que fueron tomados de [4].

Se tomaron para la matriz  $M_d$ , los valores  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \alpha a_1$ ,  $a_3 = 4$ , con  $\alpha = \sqrt{\frac{c_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{11}{12}}$ .

Se debe tomar en cuenta que el parámetro de diseño  $R_d$  debe cumplir:

$$R_d < 2 \frac{(K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2)}{a_1 \alpha},$$



Parámetro	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$k$
Valor	12	1	11	5

Cuadro 1: Parámetros para el sistema TORA

lo que conlleva a que el  $Hess(V_d(0,0))$  sea definido positivo, lo que implica que  $(0,0)$  es un mínimo y es un punto de equilibrio es estable. Sustituyendo:

$$R_d < 2 \frac{(5\sqrt{(12)(11)} + 5(1))}{(1)\sqrt{\frac{11}{12}}} < 130,5$$

Se realizó la simulación, con las condiciones iniciales ubicadas en  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 0$ . Después de algunos ensayos para obtener la mejor respuesta transitoria, la cual corresponde a la etapa de rediseño de las funciones, se seleccionaron  $R_d = 90$  y  $K_v = 70$ .

Es importante señalar, que para obtener una rápida convergencia a la estabilización del sistema, se añade a la función de control propuesto el término  $-50p_1$ .

La respuesta del sistema con la dinámica objetivo propuesto por el método IDA-PBC, se muestra en las Figuras 4 y 7. Como puede verse, el sistema exhibe su respuesta en forma de oscilaciones amortiguadas, y la estabilización se produce a los 100 segundos.

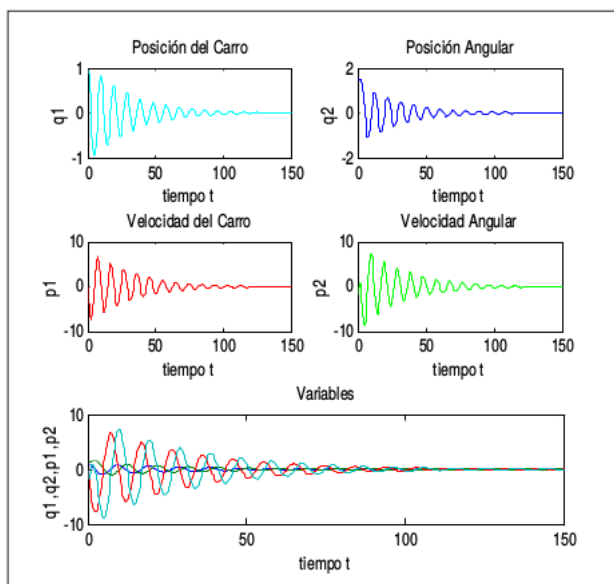


Figura 4: Simulación del Sistema TORA con la dinámica objetivo: Comportamiento de las variables.

Una típica respuesta del sistema en lazo cerrado con el controlador, se muestra en las Figuras ?? y ??. Como puede verse, el sistema exhibe su respuesta en forma de oscilaciones amortiguadas, y la estabilización se produce a los 100 segundos.

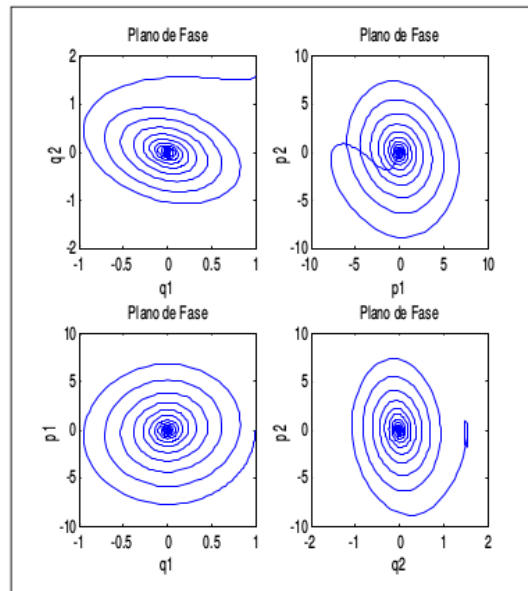


Figura 5: Simulación del Sistema TORA con la dinámica objetivo: Plano de Fase.

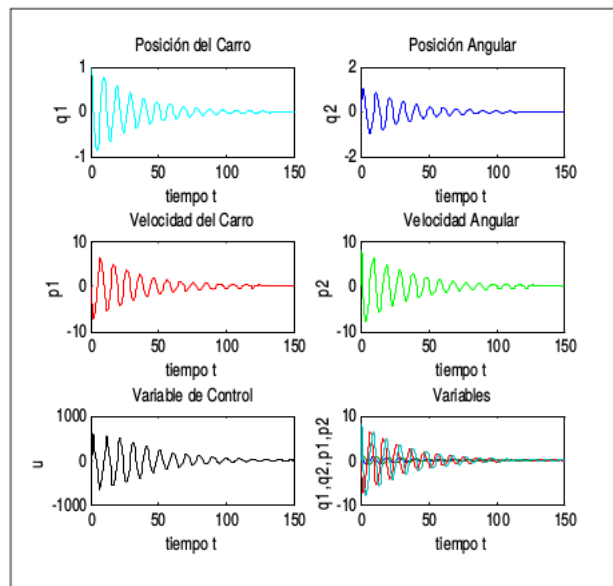


Figura 6: Simulación del Sistema TORA en lazo cerrado: Comportamiento de las variables y función de Control.

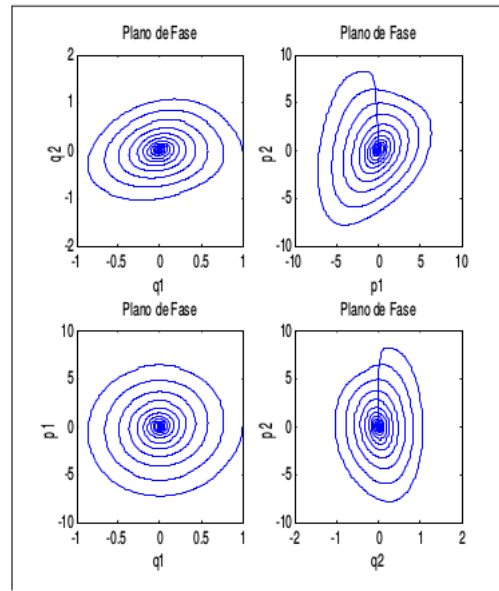


Figura 7: Simulación del Sistema TORA en lazo cerrado: Plano de Fase.

Esto demuestra que una vez aplicada la función de control propuesta, el sistema en lazo cerrado tiene el mismo comportamiento de la dinámica objetivo; por lo tanto, el método IDA-PBC, resulta ser efectivo para estabilizar el sistema TORA.

Para ilustrar la naturaleza global de la ley de control obtenida se realizan simulaciones cambiando las condiciones iniciales del sistema. De esta manera se prueba la naturaleza global de la ley de control obtenida, ya que para diferentes condiciones iniciales, se observa que la convergencia es preservada tal como lo predice la teoría. También es importante destacar que dicha ley de control logra estabilizar el sistema en un tiempo de simulación o tiempo de asentamiento perfectamente aceptable.

El sistema TORA es un prototipo de sistema mecánico subactuado que ha merecido gran atención por la comunidad de control no lineal, y en este trabajo, partiendo de la representación Hamiltoniana controlada por puertos, basada en la energía total del sistema considerada como energía cinética más energía potencial, se obtiene un controlador que logra estabilizar en forma global y asintótica el punto de equilibrio.

## 6 Conclusiones.

De acuerdo a los objetivos propuestos en la investigación y en atención a los resultados obtenidos luego de aplicada la metodología propuesta, se emiten las siguientes conclusiones.

- En el presente trabajo se ha desarrollado un esquema de control basado en el método IDA-PBC para el sistema prototipo TORA. La principal característica de este método es que explota la estructura física del sistema, en este caso, se aprovecha que toda la información del

comportamiento dinámico del sistema mecánico está contenida en las funciones de energía y de disipación, en consecuencia el diseño del controlador se ha concentrado en el manejo y modificación de estas variables.

- Para el moldeado de la energía total se tomó ventaja de la posibilidad de obtener una matriz deseada con términos constantes, y para la síntesis de la energía potencial deseada se obtuvo una reducción del conjunto de parámetros posibles para la matriz deseada, que facilita enormemente la resolución de la ecuación en derivadas parciales característica del método IDA-PBC.
- Al final se realizaron simulaciones numéricas que muestran el excelente comportamiento del controlador diseñado, reduciendo significativamente las oscilaciones de la plataforma, y con un tiempo de asentamiento perfectamente aceptable.

## Referencias

- [1] Ortega R., Spong M., Gómez F., y Blankenstein G. *Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. C, AC-47, **8**(2002), 1218-1233.
- [2] Escobar G., Ortega R. and Sira-Ramírez H. *Output feedback global stabilization of a nonlinear benchmark system using a saturated passivity-based controller*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 7, **2**(1999), 289-293.
- [3] Ortega R., Loria A., Nicklasson J. and Sira-Ramírez H. *Passivity-Based Control of euler-Lagrange Systems*. Berlin, Germany, Springer-Verlag, Communications and Control Engineering, 1998.
- [4] Jankovic M., Fontaine D., and Kokotovic P. *TORA Example: -cascade and and passivity-based control designs*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 4, **3**(1996), 292-297.
- [5] Mahindrakar A., Astolfi A., Ortega R. y Viola G. *Further constructive results on interconnection and damping assignment control of underactuated mechanical systems: The acrobot example*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 16, **14**(2006), 671-685.
- [6] Morillo A., Ríos M., y Acosta V. *Control no lineal de sistemas mecánicos sub-actuados basado en el enfoque IDA-PBC: el caso del sistema TORA*. XIII Congreso Latinoamericano de Control y Automatización, Noviembre 25-28. Mérida, Venezuela, 2008.
- [7] Morillo A., Ríos M., y Arteaga F. *Una estrategia de control no lineal para el sistema Acrobot basada en el enfoque IDA-PBC*. XIII Congreso Latinoamericano de Control y Automatización, Noviembre 25-28. Mérida, Venezuela, 2008.
- [8] Grajales T. *Tipos de investigación*. Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill. México, 1998.
- [9] Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. *Metodología de la Investigación*. Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill. México, 1998.
- [10] Khalil H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.

- [11] Sira H., Márquez R., Rivas F. y Llanes O. *Control de sistemas no lineales: Linealización aproximada, extendida, exacta*. Editorial Pearson-Prentice Hall. España, 2005.
- [12] Acosta J., Ortega R., and Astolfi A. *Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with actuation degree one*. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 50, 12(2005), 1936-1955.
- [13] Ortega R., Van der Schaft A., Masche B. and Escobar G. *Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems: Energy balancing and passivation*. Automática, Vol. 38, 4(2002), April. Preprint.

## 7 Anexos.

### ANEXO A

#### %%Programa VDESTORA:

```
function F=VDESTORA(x,y)
c1=12;
c2=1;
c3=11;
alpha=sqrt(c3/c1);
a1=1;
%a2=alpha*a1;
K=4;
Rd=90;
F=(1/2)*Rd*(x-alpha*y).^2+K/a1*((-alpha*sqrt(c1*c3)*y.^2)/2+sqrt(c1*c3)*x.*y
+alpha*c2*cos(y)-alpha*c2+c2*x.*sin(y));
```

#### %%Programa SIMVDESTORA

```
clear all
%Vd=(1/2)*Rd*(x-alpha*y)^2+K/a1*((alpha*sqrt(c1*c3)*y^2)/2+sqrt(c1*c3)*x*y
-alpha*sqrt(c1*c3)*y^2+alpha*c2*cos(y)+alpha*c2*y*sin(y)-alpha*c2+c2*x*sin(y)
-alpha*c2*y*sin(y))
while menu ~= 10
menu=0;
[x,y]=meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);
z=VDESTORA(x,y);
disp(' (1) grafica la función')
disp(' (2) grafica las curvas de nivel de la función')
disp(' (3) dibuja los gradientes en el gráfico de curvas de nivel de la función')
disp(' (4) determina si la función es cóncava o convexa')
disp(' (5) Puntos críticos de la función')
disp(' (6) Hessiano y Gradiente')
disp(' (10) Salir del Programa')

menu=input('elija la opcion a estudiar: ');
```

```

switch menu
    case 1
mesh(x,y,z)
    case 2
contour(x,y,z)
    case 3
[x,y]=meshgrid(-2:.2:2,-2:.2:2);
z=VDESTORA(x,y);
contour(x,y,z)
hold on
[px,py]=gradient(z);
quiver(x,y,px,py)
    case 4
clear all
syms x y
z=VDESTORA(x,y);
a=input('Ingrese x: ');
b=input('Ingrese y: ');
d1=diff(z,'x',2);
d2=diff(z,'x','y');
d3=diff(z,'x','y');
d4=diff(z,'y',2);
a11=subs(d1,{x,y},{a,b});
a12=subs(d2,{x,y},{a,b});
a21=subs(d3,{x,y},{a,b});
a22=subs(d4,{x,y},{a,b});
hess=[a11,a12;a21,a22];
valores_propios=eig(hess)
c1=0;
c2=0;
for i = 1:length(valores_propios)
    if (valores_propios(i)>=0)
        c1=c1+1;
    else
        c2=c2+1;
    end
end
if (c1==1)&(c2==1)
fprintf ('La función es indefinida');
end
if (c1==2)&(c2==0)
fprintf ('Existe un mínimo y la función es convexa ');
end
if (c1==0)&(c2==2)
fprintf ('Existe un máximo y la función es cóncava');
end
pause

```

```

case 5
clear all
syms x y
z=VDESTORA(x,y);
disp('Puntos Críticos de la Función:')
[x,y] = solve(diff(z,'x'),diff(z,'y'))
case 6
clear all
syms x y
z=VDESTORA(x,y);
m=input('Ingrese x: ');
n=input('Ingrese y: ');
disp('Gradiente y Hessiano la Función:')
d1=diff(z,'x',2);
d2=diff(z,'x','y');
d3=diff(z,'x','y');
d4=diff(z,'y',2);
d5=diff(z,'x');
d6=diff(z,'y');
a1=subs(d5,{x,y},{m,n});
a2=subs(d6,{x,y},{m,n});
a11=subs(d1,{x,y},{m,n});
a12=subs(d2,{x,y},{m,n});
a21=subs(d3,{x,y},{m,n});
a22=subs(d4,{x,y},{m,n});
grad=[a1,a2]
hess=[a11,a12;a21,a22]
pause
end
end
end

```

## ANEXO B

%%Programa TORALAZ:

```

function xdot=TORALAZ(t,x)
%%TORALAZ.m

```

```

%%Control del Sistema TORA Lazo Cerrado
%%

```

```

%%Parámetros del sistema
c1=12;
c2=1;
c3=11;
alpha=sqrt(c3/c1);
a1=1;
a2=alpha*a1;

```

```

K=5;
%a3 PUEDE SER MAYOR QUE 2.
a3=4;
%%Parámetros de Diseño
kv=70;%PUEDE VARIAR.
Rd=90;%Puede ser mayor de 65.

%%Otros Parámetros que no influyen
%g=32.2;%pie/seg^2.
g=981;%cm/seg^2.
%g=9.81; %m/seg^2.
m2=1;
L=1;
delta1 =c1*c3-c2*c2*cos(x(2)).*cos(x(2));
delta2= a1*a3-(c3/c1)*a1*a1;

%%Ley de control
u=-(alpha*a1*c3-a3*c2*cos(x(2)))/(delta1).*(Rd*(x(1)-alpha*x(2))
+(K*sqrt(c1*c3)*x(2)/a1)-(K*c2*sin(x(2))/a1))
-(-alpha*a1*c2*cos(x(2))+a3*c1)/delta1).*(-Rd*(x(1)-alpha*x(2))*alpha
+(K*sqrt(c1*c3)*(x(1)-alpha*x(2))/a1)-(K*alpha*c2*sin(x(2))/a1)+
(K*c2*x(1).*cos(x(2))/a1)-(c2*c2*sin(x(2)).*cos(x(2)))/(delta1)*(delta1))
.*(c3*x(3).*x(3)-2*c2*x(3).*x(4).*cos(x(2))+c1*x(4).*x(4))+c2*(x(4).*x(3)
.*sin(x(2))/delta1)+m2*g*L*sin(x(2))-(kv/delta2)*(-alpha*a1*x(3)+a1*x(4))
-50*x(3));

%%Ecuaciones de estado
xdot=[(1/delta1)*(c3*x(3)-c2*x(4).*cos(x(2)));
(1/delta1)*(-c2*x(3).*cos(x(2))+c1*x(4));
(-K*x(1));
((c2*c2*sin(x(2)).*cos(x(2)))/delta1*delta1)*(c3*x(3).*x(3)-2*c2*x(3)
.*x(4).*cos(x(2))+c1*x(4).*x(4))-((c2*x(3).*x(4).*sin(x(2)))/delta1)
-m2*g*L*sin(x(2))+u];

%%Fin de TORALAZ.m
%%Programa SIMTORALAZ:
SIMTORALAZ.m
Programa de generación de los gráficos TORALAZ.m

%Tiempo de simulación
ti=0; tf=150;

%%Condiciones Iniciales:
x0=[1 0 0 0]';

%%Simulación:

```



```
[t,x]=ode45('TORALAZ',[ti tf],x0);

%%Posición del Carro (x(1))
subplot(3,2,1),plot(t,x(:,1),'c')
title('Posición del Carro')
xlabel('tiempo t')
ylabel('q1')

%%Posición Angular (x(2))
subplot(3,2,2),plot(t,x(:,2),'b')
title('Posición Angular')
xlabel('tiempo t')
ylabel('q2')

%%Velocidad del Carro (x(3))
subplot(3,2,3),plot(t,x(:,3),'r')
title('Velocidad del Carro')
xlabel('tiempo t')
ylabel('p1')

%%Velocidad Angular (x(4))
subplot(3,2,4),plot(t,x(:,4),'g')
title('Velocidad Angular')
xlabel('tiempo t')
ylabel('p2')

%%Parámetros del sistema
c1=12;
c2=1;
c3=11;
alpha=sqrt(c3/c1);
a1=1;
a2=alpha*a1;
K=5;
%a3 PUEDE SER MAYOR QUE 2.
a3=4;

%%Parámetros de Diseño
kv=70;%PUEDE VARIAR.
Rd=90;%Puede ser mayor de 65.

%%Otros Parámetros que no influyen
%g=32.2;%pie/seg^2.
g=981;%cm/seg^2.
%g=9.81; %m/seg^2.
m2=1;
L=1;
```

```

delta1 =c1*c3-c2*c2*cos(x(2)).*cos(x(2));
delta2= a1*a3-(c3/c1)*a1*a1;

%%Ley de Control
u=-(alpha*a1*c3-a3*c2*cos(x(:,2)))/(delta1).*(Rd*(x(:,1))-alpha*x(:,2))+
(K*sqrt(c1*c3)*x(:,2)/a1)-(K*c2*sin(x(:,2))/a1)-
(-alpha*a1*c2*cos(x(:,2))+a3*c1)/delta1).*(-Rd*(x(:,1))-alpha*x(:,2))*alpha+
(K*sqrt(c1*c3)*(x(:,1))-alpha*x(:,2))/a1)-(K*alpha*c2*sin(x(:,2))/a1)+
(K*c2*x(:,1).*cos(x(:,2))/a1)-(c2*c2*sin(x(:,2)).*cos(x(:,2)))/(delta1)
*(delta1)).*(c3*x(:,3).*x(:,3)-2*c2*x(:,3).*x(:,4).*cos(x(:,2)))
+c1*x(:,4).*x(:,4))+c2*(x(:,4).*x(:,3)).*sin(x(:,2))/delta1
+m2*g*L*sin(x(:,2))-(kv/delta2)*(-alpha*a1*x(:,3)+a1*x(:,4))-50*x(:,3);

%%Control (u)
subplot(3,2,5),plot(t,u,'k')
title('Variable de Control')
xlabel('tiempo t')
ylabel('u')

%%Todas las Variables
subplot(3,2,6),plot(t,x)
title('Variables')
xlabel('tiempo t')
ylabel('q1,q2,p1,p2')

pause
figure
%%Plano de Fase
subplot(2,2,1),plot(x(:,1),x(:,2))
title('Plano de Fase')
xlabel('q1')
ylabel('q2')

%%Plano de Fase
subplot(2,2,2),plot(x(:,3),x(:,4))
title('Plano de Fase')
xlabel('p1')
ylabel('p2')

%%Plano de Fase
subplot(2,2,3),plot(x(:,1),x(:,3))
title('Plano de Fase')
xlabel('q1')
ylabel('p1')

%%Plano de Fase
subplot(2,2,4),plot(x(:,2),x(:,4))

```

```
title('Plano de Fase')
xlabel('q2')
ylabel('p2')
```

```
%Fin de SIMTORALAZ.m
```

## ANEXO C

```
%%Programa TORADIN:
```

```
function xdot=TORADIN(t,x)
%%TORADIN.m
```

```
%%Control del Sistema TORA Dinámica Objetivo
%%%
```

```
%%Parámetros del sistema
```

```
c1=12;
c2=1;
c3=11;
alpha=sqrt(c3/c1);
a1=1;
a2=alpha*a1;
K=5;
%a3 PUEDE SER MAYOR QUE 2.
a3=15;
```

```
%%Parámetros de Diseño
```

```
kv=70;%PUEDE VARIAR.
Rd=90;%Puede ser mayor de 65.
```

```
%%Otros Parámetros que no influyen
```

```
%g=32.2;%pie/seg^2.
g=981;%cm/seg^2.
m2=1;
L=1;
delta1 =c1*c3-c2*c2*cos(x(2)).*cos(x(2));
delta2= a1*a3-(c3/c1)*a1*a1;
```

```
%%Ecuaciones de estado
```

```
xdot=[(1/delta1)*(c3*x(3)-c2*x(4).*cos(x(2)));
(1/delta1)*(-c2*x(3).*cos(x(2))+c1*x(4));
-(((a1*c3-alpha*a1*c2*cos(x(2)))/delta1).*(Rd*(x(1)-alpha*x(2))
+(K*sqrt(c1*c3)*x(2)/a1)+(K*c2*sin(x(2))/a1)))-(((a1*c2*cos(x(2))
+alpha*a1*c1)/delta1).*(-Rd*(x(1)-alpha*x(2))*alpha
+(K*sqrt(c1*c3)*(x(1)-alpha*x(2))/a1)-(K*alpha*c2*sin(x(2))/a1)
+(K*c2*x(1).*cos(x(2))/a1)));-(((alpha*a1*c3-a3*c2*cos(x(2)))/delta1)
.*(Rd*(x(1)-alpha*x(2))+(K*sqrt(c1*c3)*x(2)/a1)+(K*c2*sin(x(2))/a1)))]
```

```

-((( -alpha*a1*c2*cos(x(2))+a3*c1)/delta1).*(-Rd*(x(1)-alpha*x(2))*alpha
+(K*sqrt(c1*c3)*(x(1)-alpha*x(2))/a1)-(K*alpha*c2*sin(x(2))/a1)
+(K*c2*x(1).*cos(x(2))/a1)))-((-kv*alpha*a1*x(3)+kv*a1*x(4))/delta2)
-10*x(3)];

%%Fin de TORADIN.m

%%Programa SIMTORADIN:

%SIMTORADIN.m
%Programa de generación de los gráficos toradin.m

%Tiempo de simulación
ti=0; tf=150;

%%Condiciones Iniciales:
x0=[1 pi/2 0 0]';

%%Simulación:
[t,x]=ode45('TORADIN',[ti tf],x0);

%%Posición del Carro (x(1))
subplot(3,2,1),plot(t,x(:,1),'c')
title('Posición del Carro')
xlabel('tiempo t')
ylabel('q1')

%%Posición Angular (x(2))
subplot(3,2,2),plot(t,x(:,2),'b')
title('Posición Angular')
xlabel('tiempo t')
ylabel('q2')

%%Velocidad del Carro (x(3))
subplot(3,2,3),plot(t,x(:,3),'r')
title('Velocidad del Carro')
xlabel('tiempo t')
ylabel('p1')

%%Velocidad Angular (x(4))
subplot(3,2,4),plot(t,x(:,4),'g')
title('Velocidad Angular')
xlabel('tiempo t')
ylabel('p2')

%%Todas las Variables
subplot(3,2,[5 6]),plot(t,x)
title('Variables')

```

```
xlabel('tiempo t')
ylabel('q1,q2,p1,p2')

pause
figure
%%Plano de Fase
subplot(2,2,1),plot(x(:,1),x(:,2))
title('Plano de Fase')
xlabel('q1')
ylabel('q2')

%%Plano de Fase
subplot(2,2,2),plot(x(:,3),x(:,4))
title('Plano de Fase')
xlabel('p1')
ylabel('p2')

%%Plano de Fase
subplot(2,2,3),plot(x(:,1),x(:,3))
title('Plano de Fase')
xlabel('q1')
ylabel('p1')

%%Plano de Fase
subplot(2,2,4),plot(x(:,2),x(:,4))
title('Plano de Fase')
xlabel('q2')
ylabel('p2')
%Fin de SIMTORADIN.m
```

# Existence of positive solutions of BVPs for coupled impulsive differential equations on whole line with mixed boundary conditions

*Existencia de soluciones positivas de problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales con impulso acopladas sobre toda la recta con condiciones de frontera mixta.*

Yuji Liu (liuyuji888@sohu.com)

Department of Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics,  
Guangzhou 510320, P.R.China

## Abstract

This paper is concerned with boundary value problems of impulsive differential systems on whole lines with nonlinear differential operators. By constructing a weighted Banach space and defining a nonlinear operator, using the Schauder's fixed point theorem and Schaefer's fixed point theorem, sufficient conditions to guarantee the existence of at least one positive solution are established. An example is given to illustrate the main results.

**Key words and phrases:** Impulsive differential system on whole line, boundary value problem, increasing odd homeomorphisms, sub-Carathéodory function, discrete Carathéodory function, fixed point theorem.

## Resumen

Este artículo está interesado en problemas con valores en la frontera para sistemas diferenciales con impulso sobre la línea recta con operadores diferenciales no lineales. Construyendo un espacio de Banach ponderado y definiendo un operador no lineal, usando el teorema del punto fijo de Schauder y el teorema del punto fijo de Schaefer, se establecen condiciones suficientes para garantizar la existencia de al menos una solución positiva. Se da un ejemplo para ilustrar los principales resultados.

**Palabras y frases clave:** Sistemas diferenciales con impulso, problemas con valores en la frontera, homeomorfismos impares crecientes, función sub-Carathéodory, función Carathéodory discreta, teorema del punto fijo.

---

Received 11/2015. Revised 12/2015. Accepted 3/2016.

MSC (2010): Primary 34B10; Secondary 35B15.

Corresponding author: Yuji Liu

## 1 Introduction

Boundary value problems for second order ordinary differential equations (ODEs) were initiated by Il'in and Moiseev [25] and studied by many authors, see the text books [20, 27], the papers [14, 16, 33] and the references therein.

The asymptotic theory of ordinary differential equations is an area in which there is great activity among a large number of investigators since it has many applications in real world applications [21, 22, 23, 24, 9]. In this theory, it is of great interest to investigate, in particular, the existence of solutions with prescribed asymptotic behavior, which are global in the sense that they are solutions on the whole line. The existence of global solutions with prescribed asymptotic behavior is usually formulated as the existence of solutions of boundary value problems on the whole line.

In [13], the existence and multiplicity of nonnegative solutions for the following integral boundary value problem on the whole line were studied:

$$\begin{aligned} (p(t)x'(t))' + \lambda q(t)f(t, x(t), x'(t)) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ a_1 \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) - b_1 \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t)x'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(s, x(s), x'(s))\psi(s)ds, \\ a_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) + b_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)x'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(s, x(s), x'(s))\psi(s)ds, \end{aligned} \quad (1.1)$$

where  $\lambda > 0$  is a parameter,  $f, g_1, g_2 \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{R}, [0, +\infty))$ ,  $q, \psi \in C(\mathbb{R}, (0, +\infty))$  and  $p \in C(\mathbb{R}, (0, +\infty)) \cap C^1(\mathbb{R})$ . Here, the values of  $\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(s, x(s), x'(s))ds$  ( $i = 1, 2$ ),  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{p(s)}$  and  $\sup_{s \in \mathbb{R}} \psi(s)$  are finite and  $a_1 + a_2 > 0$ ,  $b_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) satisfying  $D = a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} > 0$ .

In recent years, many authors have studied the existence of positive radial solutions for elliptic systems in annular/ exterior domains, which is equivalent to that of positive solutions for the corresponding systems of ordinary differential equations (see [11, 30, 19, 18, 10, 29] and the references therein). The usual method used is the fixed point theorems of cone expansion/compression type, the upper and lower solutions method and the fixed point index theory in cones.

In [28, 12], the following system and its special case were discussed:

$$\begin{aligned} [\phi_p(u'(t))] + \lambda h_1(t)f(t, u(t), v(t)) &= 0, \quad t \in (0, 1), \\ [\phi_p(v'(t))] + \mu h_2(t)g(t, u(t), v(t)) &= 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(0) = a \geq 0, v(0) = b \geq 0, u(1) = v(1) &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

where  $\phi_p(x) = |x|^{p-2}x$ ,  $p > 1$ ,  $\lambda, \mu$  are nonnegative real parameters,  $h_i \in C((0, 1), (0, \infty))$ ,  $i = 1, 2$ ,  $f, g \in C([0, \infty) \times [0, \infty), [0, \infty))$ ,  $h_i$  may be singular at  $t = 0$  and  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  and  $f(u, v) > 0, g(u, v) > 0$  for all  $(u, v) > (0, 0)$ . The existence, nonexistence and multiplicity of

positive solutions for (1.1) were obtained by using the upper and lower solution method and the fixed point index theorem.

Theory of impulsive differential equations describes processes which experience a sudden change of their state at certain moments. Processes with such a character arise naturally and often, for example, phenomena studied in physics, chemical technology, population dynamics, biotechnology and economics. For an introduction of the basic theory of impulsive differential equation, we refer the reader to [26].

In [32], Liu studied the existence of solutions of the following boundary value problem for second order impulsive differential system on the whole line with Dirichlet boundary conditions

$$\begin{aligned}
 & [\rho(t)\Phi_p(x'(t))]' + f(t, x(t), y(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R}, \\
 & [\varrho(t)\Phi_q(y'(t))]' + g(t, x(t), y(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R} \\
 & \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \\
 & \Delta x(t_k) = I_k(t_k, x(t_k), y(t_k)), \quad \Delta y(t_k) = J_k(t_k, x(t_k), y(t_k)), k \in \mathbb{Z},
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

where  $\rho, \varrho \in C^0(\mathbb{R}, [0, \infty))$ ,  $\rho(t), \varrho(t) > 0$  for all  $t \in \mathbb{R}$  with

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\rho(s)} < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\varrho(s)} < +\infty, \tag{1.4}$$

$\Phi_p(x) = |x|^{p-2}x$  and  $\Phi_q(x) = |x|^{q-2}x$  are one-dimensional p-Laplacian,  $f, g$  defined on  $\mathbb{R}^3$  are Carathéodory functions,  $\dots < t_k < t_{k+1} < t_{k+2} < \dots$  with

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty,$$

$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$  and  $\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k^-)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $\{I_k\}, \{J_k\}$  with  $I_k, J_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) are discrete Carathéodory sequences.

This paper is a continuation of [32]. We consider the existence of positive solutions of the following boundary value problem for second order differential system on the whole line with



mixed boundary conditions with impulse effects:

$$\begin{aligned}
 & [\Phi(\rho(t)x'(t))]' + p(t)f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R}, \\
 & [\Psi(\varrho(t)y'(t))]' + q(t)g(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R} \\
 & \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t)x'(t) = 0, \\
 & \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varrho(t)y'(t) = 0, \\
 & \Delta x(t_s) = A_{0,s}I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)), \quad \Delta \Phi(\rho(t_s)x'(t_s)) = A_{1,s}I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s)), s \in \mathbb{Z}, \\
 & \Delta y(t_s) = B_{0,s}J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s)), \quad \Delta \Psi(\varrho(t_s)y'(t_s)) = B_{1,s}J_1(t_s, x(t_s), x'(t_s)), s \in \mathbb{Z},
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

where

(a)  $\rho, \varrho \in C^0(\mathbb{R}, [0, +\infty))$  with

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^0 \frac{ds}{\rho(s)} ds < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\rho(s)} ds = +\infty, \\
 & \int_{-\infty}^0 \frac{ds}{\varrho(s)} ds < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\varrho(s)} ds = +\infty,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

(b)  $p, q \in C^0(\mathbb{R}, (0, \infty))$  with

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} p(s)ds < +\infty, \quad \int_{-\infty}^0 p(s)ds = +\infty, \\
 & \int_0^{+\infty} q(s)ds < +\infty, \quad \int_{-\infty}^0 q(s)ds = +\infty,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(c)  $\Phi(x) = \Phi_{p_1}(x) = |x|^{p_1-2}x$  and  $\Psi(x) = \Phi_{p_2}(x) = |x|^{p_2-2}x$  are one-dimensional  $p$ -Laplacians, their inverse operator are defined by  $\Phi^{-1}$  and  $\Psi^{-1}$ , respectively, with  $\Phi^{-1}(x) = |x|^{q_1-2}x$  and  $\Psi^{-1}(x) = |x|^{q_2-2}x$ ,  $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$ ,

(d)  $f$  defined on  $\mathbb{R}^3$  strongly  $\varrho$ -Carathéodory function (see Definition 2.1),  $g$  defined on  $\mathbb{R}^3$  strongly  $\rho$ -Carathéodory function (see Definition 2.2),  $f, g$  are nonnegative functions, and  $[p(t)f(t, 0, 0)]^2 + [q(t)g(t, 0, 0)]^2 > 0$  on each subinterval of  $\mathbb{R}$ ,

(e)  $\dots < t_k < t_{k+1} < t_{k+2} < \dots$  with  $\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = -\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ ,  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$  and  $\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k^-)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $\Delta x'(t_k) = x'(t_k^+) - x'(t_k^-)$  and  $\Delta y'(t_k) = y'(t_k^+) - y'(t_k^-)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

(f)  $I_0, I_1 : \{t_s : s \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  are discrete  $\varrho$ -Carathéodory functions (see Definition 2.3),  $J_0, J_1 : \{t_s : s \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is a discrete  $\rho$ -Carathéodory function (see Definition 2.4),  $I_0, J_0$  are nonnegative functions,  $I_1, J_1$  are non-positive functions,

(g)  $A_{0,s}, A_{1,s}, B_{0,s}, B_{1,s} \geq 0$  satisfy

$$\sum_{j=-\infty}^s A_{0,j} < +\infty, \quad \sum_{j=-\infty}^s B_{0,j} < +\infty, \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{A_{0,s}}{\int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{ds}{\rho(s)}} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{B_{0,s}}{\int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{ds}{\varrho(s)}} = 0,$$

$$\sum_{j=s}^{+\infty} A_{1,j} < +\infty, \quad \sum_{j=s}^{+\infty} B_{1,j} < +\infty, \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{A_{1,s}}{\int_{t_s}^{t_{s+1}} p(s) ds} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{B_{1,s}}{\int_{t_s}^{t_{s+1}} q(s) ds} = 0.$$

The purpose of this paper is to establish sufficient conditions for the existence of at least one positive solution of BVP(1.5). The technical tool used in this paper is the well known Schauder fixed point theorem. For applying this theorem, the most crucial things are to construct a nonlinear operator and to prove the compactness property of the nonlinear operator. Since the problem is considered on whole line, we need to show the equi-continuous properties of the image of a bounded set on each sub intervals (there are infinitely many sub intervals), the equi-convergence as  $t \rightarrow t_i (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  and the equi-convergence as  $t \rightarrow -\infty$  and as  $t \rightarrow +\infty$ . One sees from (1.6) that both  $\frac{1}{\rho}$  and  $\frac{1}{\varrho}$  are not measurable on  $\mathbb{R}$  while (1.4) tells us both  $\frac{1}{\rho}$  and  $\frac{1}{\varrho}$  are measurable on  $\mathbb{R}$ . So this paper is a continuation of [32]. Furthermore, (1.7) makes both the nonlinearities  $t \rightarrow p(t)f(t, u, v)$  and  $t \rightarrow q(t)g(t, u, v)$  be non-Carathéodory functions. An example is presented to show us that the main results in this paper are interesting.

By a solution of BVP(1.5) we mean a couple of functions  $(x, y)$  with  $x, y \in C^1(t_k, t_{k+1}] (k \in \mathbb{Z})$  such that both

$$\Phi(\rho x') : t \rightarrow \Phi(\rho(t)x'(t)) \text{ and } \Psi(\varrho y') : t \rightarrow \Psi(\varrho(t)y'(t))$$

are derivative on each interval  $(t_k, t_{k+1}] (k \in \mathbb{Z})$ , and the limits

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t)x'(t) \text{ and } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varrho(t)y'(t)$$

exist, and all equations in (1.5) are satisfied. We call  $(x, y)$  a positive solution of BVP(1.5) if  $(x, y)$  is a solution of BVP(1.5) and  $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 > 0$  for all  $t \in \mathbb{R}$ .

The remainder of this paper is organized as follows: the preliminary results are given in Section 2, the main results are presented in Section 3. An example is given in Section 4.

## 2 Preliminary Results

In this section, we present some background definitions. The preliminary results are given too.

Denote

$$\sigma_0(t) = 1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}, \quad \sigma_1(t) = 1 + \int_t^{+\infty} p(s)ds,$$

$$\tau_0(t) = 1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\varrho(u)}, \quad \tau_1(t) = 1 + \int_t^{+\infty} q(s)ds.$$

**Definition 2.1.**  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is called a strongly  $\varrho$ -Carathéodory function if it satisfies

(i)  $t \rightarrow h\left(t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v\right)$  is measurable on  $\mathbb{R}$  and for each  $r > 0$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h\left(t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v\right) = 0 \text{ uniformly for all } |u|, |v| \leq r.$$

(ii)  $(u, v) \rightarrow h\left(t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v\right)$  is continuous for a.e.  $t \in \mathbb{R}$ .

(iii) For each  $r > 0$ , there exists nonnegative number  $M_r \geq 0$  such that  $|u|, |v| \leq r$  implies

$$\left| h\left(t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v\right) \right| \leq M_r, t \in \mathbb{R}.$$

**Definition 2.2.**  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is called a strongly  $\rho$ -Carathéodory function if it satisfies

(i)  $t \rightarrow h\left(t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v\right)$  is measurable on  $\mathbb{R}$  and for each  $r > 0$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h\left(t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v\right) = 0 \text{ uniformly for all } |u|, |v| \leq r.$$

(ii)  $(u, v) \rightarrow h\left(t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v\right)$  is continuous for a.e.  $t \in \mathbb{R}$ .

(iii) For each  $r > 0$ , there exists nonnegative number  $M_r \geq 0$  such that  $|u|, |v| \leq r$  implies

$$\left| h\left(t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v\right) \right| \leq M_r, t \in \mathbb{R}.$$

**Definition 2.3.**  $K : \{t_s : s \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is called a discrete  $\varrho$ -Carathéodory function if it satisfies

(i)  $(u, v) \rightarrow K\left(t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v\right)$  is continuous for all  $s \in \mathbb{Z}$ .

(ii) For each  $r > 0$ , there exists nonnegative constants  $N_r \geq 0$  such that  $|u|, |v| \leq r$  implies

$$\left| K\left(t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v\right) \right| \leq N_r \text{ for all } s \in \mathbb{Z}.$$

**Definition 2.4.**  $H : \{t_s : s \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is called a discrete  $\rho$ -Carathéodory function if it satisfies

(i)  $(u, v) \rightarrow H\left(t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v\right)$  is continuous for all  $s \in \mathbb{Z}$ .

(ii) For each  $r > 0$ , there exists nonnegative constants  $N_r \geq 0$  such that  $|u|, |v| \leq r$  implies

$$\left| H\left(t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v\right) \right| \leq N_r \text{ for all } s \in \mathbb{Z}.$$

**Definition 2.5.** [17]. Let  $E$  be Banach spaces. An operator  $T : E \rightarrow E$  is completely continuous if it is continuous and maps bounded sets into relatively compact sets.

**Lemma 2.1.** (i) [Schauder][17]: Let  $X$  be a Banach space and  $\Omega \subset X$  a nonempty, bounded, open and convex subset of  $X$  centered at zero point. Let  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  be a completely continuous operator with  $T(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$ . Then  $T$  has a fixed point in  $\overline{\Omega}$ .

(ii) [Schauder][17]: Let  $X$  be a Banach space and  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  be a completely continuous operator with  $\Omega = \{x \in X : x = \lambda Tx \text{ for some } \lambda \in [0, 1]\}$  is bounded. Then  $T$  has a fixed point in  $\Omega$ .

Define

$$X = \left\{ x : \begin{array}{l} x_{(t_s, t_{s+1})} \in C^0(t_s, t_{s+1}], s \in \mathbb{Z}, \\ x'_{(t_s, t_{s+1})} \in C^0(t_s, t_{s+1}], s \in \mathbb{Z}, \\ \text{the following limits exist:} \\ \lim_{t \rightarrow t_s^+} x(t), \lim_{t \rightarrow t_s^+} \rho(t)x'(t), s \in \mathbb{Z}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x(t)}{\sigma_0(t)}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \end{array} \right\}$$

and

$$Y = \left\{ y : \begin{array}{l} y_{(t_s, t_{s+1})} \in C^0(t_s, t_{s+1}], s \in \mathbb{Z}, \\ y'_{(t_s, t_{s+1})} \in C^0(t_s, t_{s+1}], s \in \mathbb{Z}, \\ \text{the following limits exist:} \\ \lim_{t \rightarrow t_s^+} y(t), \lim_{t \rightarrow t_s^+} \varrho(t)y'(t), s \in \mathbb{Z}, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{\tau_0(t)}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} \end{array} \right\}.$$

For  $x \in X$ , define  $\|x\| = \|x\|_X = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right\}$ . For  $y \in Y$ , define

$$\|y\| = \|y\|_Y = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|y(t)|}{\tau_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\varrho(t)|y'(t)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} \right\}.$$

**Lemma 2.2.** Suppose that  $\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds$  is convergent. Then  $X$  is a Banach space with the norm  $\|\cdot\|_X$  and  $Y$  a Banach space with the norm  $\|\cdot\|_Y$ .  $E = X \times Y$  is also a Banach space with the norm  $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$  for  $(x, y) \in X \times Y$ .

*Proof.* In fact, it is easy to see that  $X$  is a normed linear space. Let  $\{x_n\}$  be a Cauchy sequence in  $X$ . Then  $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ,  $m, n \rightarrow +\infty$ . It follows that

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x_m(t) - x_n(t)|}{\sigma_0(t)} \rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty,$$

$$\lim_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'_m(t) - x'_n(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty.$$

So

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (t_s, t_{s+1}]} \frac{|x_m(t) - x_n(t)|}{\sigma_0(t)} &\rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty, s \in \mathbb{Z}, \\ \left| \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x_m(t)}{\sigma_0(t)} - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x_n(t)}{\sigma_0(t)} \right| &\rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty, \\ \lim_{t \in (t_s, t_{s+1}]} \frac{\rho(t)|x'_m(t) - x'_n(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} &\rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty, \\ \left| \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho(t)x'_m(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right| &\rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Then both  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x_n(t)}{\sigma_0(t)}$  and  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}$  exist. Define

$$\bar{x}|_{[t_s, t_{s+1}]}(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_s^+} x(t), & t = t_s, \\ x(t), & t \in (t_s, t_{s+1}], \end{cases} \quad \bar{x}'|_{[t_s, t_{s+1}]}(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_s^+} x'(t), & t = t_s, \\ x'(t), & t \in (t_s, t_{s+1}]. \end{cases}$$

We know that  $t \rightarrow \frac{\bar{x}|_{[t_s, t_{s+1}]}(t)}{\sigma_0(t)}$  is continuous on  $[t_s, t_{s+1}]$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ). Thus  $t \rightarrow \frac{\bar{x}_n|_{[t_s, t_{s+1}]}(t)}{\sigma_0(t)}$  is a Cauchy sequence in  $C[t_s, t_{s+1}]$ . Then  $\frac{\bar{x}_n|_{[t_s, t_{s+1}]}(t)}{\sigma_0(t)}$  uniformly converges to some  $\bar{x}_0$  in  $C[t_s, t_{s+1}]$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Similarly  $\frac{\rho(t)x'_n|_{[t_s, t_{s+1}]}(t)}{\sigma_1(t)}$  uniformly converges to some  $\bar{y}_0$  in  $C[t_s, t_{s+1}]$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Define

$$x_0(t) = \bar{x}_0(t), \quad y_0(t) = \bar{y}_0(t), \quad t \in (t_s, t_{s+1}], \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Then  $x_0, y_0$  are defined on  $\mathbb{R}$  and is continuous on  $(t_s, t_{s+1}]$  and the limits  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} x_0(t), \lim_{t \rightarrow t_s^+} y_0(t)$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ) exist. Furthermore, we have  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n(t)}{\sigma_0(t)} = x_0(t)$  and  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} = y_0(t)$  for every  $t \in \mathbb{R}$ .

From  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x_m(t) - x_n(t)|}{\sigma_0(t)} \rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty$ , let  $m \rightarrow +\infty$ , we get  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| x_0(t) - \frac{x_n(t)}{\sigma_0(t)} \right| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . So

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_0(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \lim_{n \pm\infty} \frac{x_n(t)}{\sigma_0(t)} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x_n(t)}{\sigma_0(t)}$$

exists.

Similarly we have  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| y_0(t) - \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . So

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_0(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \lim_{n \pm\infty} \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}$$

exists.

Since for some  $c_n \in \mathbb{R}$  we have for  $t \in (t_s, t_{s+1}]$  that

$$\begin{aligned} & \left| x_n(t) - \sum_{t_s < t} \Delta x_n(t_s) - c_n - \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))y_0(s)}{\rho(s)} ds \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^t \left| x'_n(s) - \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))y_0(s)}{\rho(s)} \right| ds \\ & = \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} \left| \frac{\rho(s)x'_n(s)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))} - y_0(s) \right| ds \\ & \leq \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\rho(t)x'_n(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} - y_0(t) \right| \\ & \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

So  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n(t) - \sum_{t_s < t} \Delta x_n(t_s) - c_n] = \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))y_0(s)}{\rho(s)} ds$ . Then

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sigma_0(t)x_0(t) - \sum_{t_s < t} \Delta \sigma_0(t_s)x_0(t_s) - c_0 \right) = \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))y_0(s)}{\rho(s)} ds.$$

Hence  $\frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))y_0(t)}{\rho(t)} = [\sigma_0(t)x_0(t)]'$  for all  $t \in (t_s, t_{s+1}] (s \in \mathbb{R})$ .

So  $t \rightarrow \sigma(t)x_0(t)$  is an element in  $X$  and  $x_n \rightarrow x_0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . We know that  $X$  is a Banach space. Similarly we can prove that  $Y$  is a Banach space. So  $E = X \times Y$  is a Banach space.  $\square$

**Lemma 2.3.** *Suppose that  $\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds$  is convergent. Then  $M \subset X$  is relatively compact if and only if the following items valid:*

- (i) Both  $\left\{ t \rightarrow \frac{x(t)}{\sigma_0(t)} : x \in M \right\}$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} : x \in M \right\}$  are uniformly bounded.
- (ii) Both  $\left\{ t \rightarrow \frac{x(t)}{\sigma_0(t)} : x \in M \right\}$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} : x \in M \right\}$  are equi-continuous on  $(t_s, t_{s+1}] (s \in \mathbb{Z})$ .
- (iii) Both  $\left\{ t \rightarrow \frac{x(t)}{\sigma_0(t)} : x \in M \right\}$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} : x \in M \right\}$  are equi-convergent as  $t \rightarrow \pm\infty$ .

*Proof.* ( $\Leftarrow$ ). From Lemma 2.2, we know  $X$  is a Banach space. In order to prove that the subset  $M$  is relatively compact in  $X$ , we only need to show  $M$  is totally bounded in  $X$ , that is for all  $\epsilon > 0$ ,  $M$  has a finite  $\epsilon$ -net.

Given  $x \in M$ , for any given  $\epsilon > 0$ , by (i)-(iii), there exist constants  $A > 0, \delta > 0$ , and positive

integer  $s_0$  such that

$$\left| \frac{x(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad u_1, u_2 \leq t_{-s_0} \text{ or } u_1, u_2 \geq t_{s_0},$$

$$\left| \frac{\rho(u_1)x'(u_1)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_1))} - \frac{\rho(u_2)x'(u_2)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_2))} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad u_1, u_2 \leq t_{-s_0} \text{ or } u_1, u_2 \geq t_{s_0},$$

$$\|x\| = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right\} \leq A,$$

$$\left| \frac{x(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad u_1, u_2 \in (t_s, t_{s+1}], \quad |u_1 - u_2| < \delta, \quad s = -s_0, -s_0 + 1, \dots, s_0 - 1,$$

$$\left| \frac{\rho(u_1)x'(u_1)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_1))} - \frac{\rho(u_2)x'(u_2)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_2))} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad u_1, u_2 \in (t_s, t_{s+1}], \quad |u_1 - u_2| < \delta, \quad s = -s_0, -s_0 + 1, \dots, s_0 - 1.$$

Define  $X|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]} = \{x|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]} : x \in X\}$ . For  $x \in X|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]}$ , define

$$\|x\|_{s_0} = \max \left\{ \sup_{t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}]} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}]} \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right\}.$$

Similarly to Lemma 2.2, we can prove that  $X|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]}$  is a Banach space with the norm  $\|\cdot\|_{s_0}$ .

Let  $M|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]} = \{t \rightarrow x(t), t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}] : x \in M\}$ . Then  $M|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]}$  is a subset of  $X|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]}$ . By Ascoli-Arzelà theorem, we can know that  $M|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]}$  is relatively compact in  $X|_{[t_{-s_0}, t_{s_0}]}$ . Thus, there exist  $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$  such that, for any  $x \in M$ , we have that there exists some  $i = 1, 2, \dots, k$  such that

$$\|x - x_i\|_{s_0} = \max \left\{ \sup_{t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}]} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}]} \frac{\rho(t)|x'(t) - x_i'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right\} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Therefore, for  $x \in M$ , we have that

$$\begin{aligned} \|x - x_i\|_X &= \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'(t) - x_i'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{t \leq t_{-s_0}} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma(t)}, \sup_{t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}]} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma(t)}, \sup_{t \geq t_{s_0}} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma(t)} \right. \\ &\quad \left. \sup_{t \leq t_{-s_0}} \frac{\rho(t)|x'(t) - x_i'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}, \sup_{t \in [t_{-s_0}, t_{s_0}]} \frac{\rho|x'(t) - x_i'(t)|x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}, \sup_{t \geq t_{s_0}} \frac{\rho(t)|x'(t) - x_i'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right\}. \end{aligned}$$

We have that

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq t_{-s_0}} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma_0(t)} &\leq \sup_{t \leq t_{-s_0}} \left| \frac{x(t)}{\sigma_0(t)} - \frac{x(t_{-s_0})}{\sigma_0(t_{-s_0})} \right| \\ &+ \left| \frac{x(t_{-s_0})}{\sigma_0(t_{-s_0})} - \frac{x_i(t_{-s_0})}{\sigma_0(t_{-s_0})} \right| + \sup_{t \leq t_{-s_0}} \left| \frac{x_i(t_{-s_0})}{\sigma_0(t_{-s_0})} - \frac{x_i(t)}{\sigma_0(t)} \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Similarly we can prove that

$$\sup_{t \leq t_{-s_0}} \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} < \epsilon, \quad \sup_{t \geq t_{s_0}} \frac{|x(t) - x_i(t)|}{\sigma_0(t)} < \epsilon, \quad \sup_{t \geq t_{s_0}} \frac{\rho(t)|x'(t) - x'_i(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} < \epsilon.$$

Then  $\|x - x_i\|_X < \epsilon$ .

So, for any  $\epsilon > 0$ ,  $M$  has a finite  $\epsilon$ -net  $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_k}\}$ , that is,  $M$  is totally bounded in  $X$ . Hence  $M$  is relatively compact in  $X$ .

( $\Rightarrow$ ). Assume that  $M$  is relatively compact, then for any  $\epsilon > 0$ , there exists a finite  $\epsilon$ -net of  $M$ . Let the finite  $\epsilon$ -net be  $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_k}\}$  with  $x_i \in M$ . Then for any  $x \in M$ , there exists  $U_{x_i}$  such that  $x \in U_{x_i}$  and

$$\|x\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| \leq \epsilon + \max\{\|x_i\| : i = 1, 2, \dots, k\}.$$

It follows that  $\{\|x\| : x \in M\}$  is uniformly bounded. Then **(i)** holds.

Since the limit  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} \frac{x(t)}{\sigma_0(t)}$  exists, then

$$\frac{\bar{x}(t)}{\sigma_0(t)} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_s^+} \frac{x(t)}{\sigma_0(t)}, & t = t_s, \\ \frac{x(t)}{\sigma_0(t)}, & t \in (t_s, t_{s+1}] \end{cases} \quad \frac{\rho(t)\bar{x}'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_s^+} \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}, & t = t_s, \\ \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}, & t \in (t_s, t_{s+1}] \end{cases}$$

are continuous on  $[t_s, t_{s+1}]$ . So for any  $\epsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that

$$\left| \frac{\bar{x}_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{\bar{x}_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{\rho(u_1)\bar{x}'_i(u_1)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_1))} - \frac{\rho(u_2)\bar{x}'_i(u_2)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_2))} \right| < \epsilon,$$

for all  $u_1, u_2 \in [t_s, t_{s+1}]$  with  $|u_1 - u_2| < \delta$  and  $i = 1, 2, \dots, k$ . Then for any  $\epsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that

$$\left| \frac{x_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| < \epsilon,$$

$$\left| \frac{\rho(u_1)x'_i(u_1)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_1))} - \frac{\rho(u_2)x'_i(u_2)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(u_2))} \right| < \epsilon,$$

for all  $u_1, u_2 \in (t_s, t_{s+1}]$  with  $|u_1 - u_2| < \delta$  and  $i = 1, 2, \dots, k$ .

For  $x \in M$ , there exists a  $i$  such that  $x \in U_{x_i}$ . Then we have for  $u_1, u_2 \in (t_s, t_{s+1}]$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ) with  $|u_1 - u_2| < \delta$  that

$$\left| \frac{x(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| \leq \left| \frac{x(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} \right| + \left| \frac{x_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| + \left| \frac{x_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} - \frac{x(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| \leq 3\epsilon.$$

$\left\{ t \rightarrow \frac{x(t)}{\sigma_0(t)} : x \in M \right\}$  is equicontinuous in  $(t_s, t_{s+1}]$ . Similarly we have  $\left\{ t \rightarrow \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} : x \in M \right\}$  is equicontinuous in  $(t_s, t_{s+1}]$ . It follows that **(ii)** holds.

Now we prove that **(iii)** holds. It is easily seen that there exists a positive integer  $s_0$  such that

$$\left| \frac{x_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| < \epsilon$$



for all  $u_1, u_2 \leq t_{-s_0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . For  $x \in M$ , there exists a  $i$  such that  $x \in U_{x_i}$ . So

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| &\leq \left| \frac{x(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} \right| + \left| \frac{x_i(u_1)}{\sigma_0(u_1)} - \frac{x_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| \\ &+ \left| \frac{x_i(u_2)}{\sigma_0(u_2)} - \frac{x(u_2)}{\sigma_0(u_2)} \right| \leq 3\epsilon, \quad u_1, u_2 \leq t_{-s_0}. \end{aligned}$$

Then  $\left\{ t \rightarrow \frac{x(t)}{\sigma_0(t)} : x \in M \right\}$  is equi-convergent as  $t \rightarrow -\infty$ , similarly we can prove that is equi-convergent as  $t \rightarrow +\infty$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\rho(t)x'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} : x \in M \right\}$  are equi-convergent as  $t \rightarrow \pm\infty$ . Hence (iii) holds.  $\square$

**Lemma 2.4.** *Suppose that  $\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds$  is convergent. Then  $M \subset Y$  is relatively compact if and only if the following items valid:*

- (i) Both  $\left\{ t \rightarrow \frac{y(t)}{\tau_0(t)} : y \in M \right\}$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} : y \in M \right\}$  are uniformly bounded.
- (ii) Both  $\left\{ t \rightarrow \frac{y(t)}{\tau_0(t)} : y \in M \right\}$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} : y \in M \right\}$  are equi-continuous on  $(t_s, t_{s+1})$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ).
- (iii) Both  $\left\{ t \rightarrow \frac{y(t)}{\tau_0(t)} : y \in M \right\}$  and  $\left\{ t \rightarrow \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} : y \in M \right\}$  are equi-convergent as  $t \rightarrow \pm\infty$ .

*Proof.* The proof is similar to Lemma 2.3 and is omitted.  $\square$

In the sequel, we suppose that  $\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds$  and  $\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds$  are convergent.

**Lemma 2.5.** *Suppose that  $y \in Y$ . Then  $u \in X$  is a solution of BVP*

$$[\Phi(\rho(t)u'(t))] + p(t)f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(s) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t)u'(s) = 0, \tag{2.8}$$

$$\Delta u(t_s) = A_{0,s}I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)), \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$\Delta \Phi(\rho(t_s)u'(t_s)) = A_{1,s}I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s)), \quad s \in \mathbb{Z}$$

if and only if

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{t_s < t} A_{0,s}I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)) \\ &+ \int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho(s)} \Phi^{-1} \left( \int_s^{+\infty} p(u)f(u, y(u), y'(u)) du - \sum_{t_j \geq s} A_{1,j}I_1(t_j, y(t_j), y'(t_j)) \right) ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

*Proof.* Fix  $y \in Y$ , then

$$\|y\| = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|y(t)|}{\tau_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\varrho(t)|y'(t)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} \right\} = r < +\infty.$$

Since  $f$  is a strongly  $\rho$ -Carathéodory function, then there exists nonnegative number  $M_r \geq 0$  such that

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, y(t), y'(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(t, \tau_0(t) \frac{y(t)}{\tau_0(t)}, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)} \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}\right) = 0, \tag{2.10}$$

$$|f(t, y(t), y'(t))| = \left| f\left(t, \tau_0(t) \frac{y(t)}{\tau_0(t)}, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)} \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}\right) \right| \leq M_r, t \in \mathbb{R}.$$

Furthermore,  $I_0, I_1 : \{t_s : s \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  are discrete  $\rho$ -Carathéodory functions, then there exist nonnegative constants  $M_{0,r}, M_{1,r} \geq 0$  such that

$$|I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s))| \leq M_{0,r}, s \in \mathbb{Z}, \tag{2.11}$$

$$|I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s))| \leq M_{1,r}, s \in \mathbb{Z}.$$

Suppose that  $u \in X$  is a solution of (2.8). Then from the boundary conditions we get that

$$\Phi(\rho(t)u'(t)) = \int_t^{+\infty} p(r)f(r, y(r), y'(r))dr - \sum_{t_j \geq t} A_{1,j}I_1(t_j, y(t_j), y'(t_j)), t \in \mathbb{R}.$$

So

$$u'(t) = \frac{1}{\rho(t)}\Phi^{-1}\left(\int_t^{+\infty} p(r)f(r, y(r), y'(r))dr - \sum_{t_j > t} A_{1,j}I_1(t_j, y(t_j), y'(t_j))\right).$$

It follows that

$$u(t) = \sum_{t_s < t} A_{0,s}I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)) + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho(s)}\Phi^{-1}\left(\int_s^{+\infty} p(u)f(u, y(u), y'(u))du - \sum_{t_j \geq s} A_{1,j}I_1(t_j, x(t_j), y(t_j))\right) ds.$$

So  $u$  satisfies (2.9). We now prove that  $u \in X$ . In fact, we see that

$$u|_{(t_s, t_{s+1}]}, \rho u'|_{(t_s, t_{s+1}]} \in C^0(t_s, t_{s+1}], s \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{t \rightarrow t_s^+} u(t), \lim_{t \rightarrow t_s^+} \rho(t)u'(t) (s \in \mathbb{Z}) \text{ exist.}$$

Now we prove that

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{u(t)}{\sigma_0(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\rho(t)u'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} = 0. \tag{2.12}$$

Once sees for  $t \in (t_s, t_{s+1}]$  that

$$\begin{aligned} \frac{|u(t)|}{\sigma_0(t)} &\leq \frac{M_{0,r} \sum_{t_s < t} A_{0,s}}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} + \frac{\int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho(s)}\Phi^{-1}\left(\int_s^{+\infty} p(u)M_r du + \sum_{t_j \geq s} A_{1,j}M_{1,r}\right) ds}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \\ &\leq M_{0,r} \frac{\sum_{j=-\infty}^s A_{0,j}}{1 + \int_{-\infty}^{t_s} \frac{du}{\rho(u)}} + \frac{\int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho(s)}\Phi^{-1}\left(\int_s^{+\infty} p(u)M_r du + \sum_{t_j \geq s} A_{1,j}M_{1,r}\right) ds}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}}. \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=-\infty}^s A_{0,j}}{1 + \int_{-\infty}^{t_s} \frac{du}{\rho(u)}} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{A_{0,s}}{\int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{du}{\rho(u)}} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho(s)} \Phi^{-1} \left( \int_s^{+\infty} p(u) M_r du + \sum_{t_j \geq s} A_{1,j} M_{1,r} \right) ds}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^{-1} \left( \int_t^{+\infty} p(u) M_r du + \sum_{t_j \geq t} A_{1,j} M_{1,r} \right) = 0, \end{aligned}$$

then  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{\sigma_0(t)} = 0$ . One sees for  $t \in [t_{s-1}, t_s)$  that

$$\begin{aligned} \frac{\rho(t)|u'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} &\leq \frac{\Phi^{-1} \left( \int_t^{+\infty} p(r) f(r, y(r), y'(r)) dr + \sum_{t_s > t} A_{1,s} M_{1,r} \right)}{\Phi^{-1} \left( 1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds \right)} \\ &= \Phi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} p(r) f(r, y(r), y'(r)) dr}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds} + M_{1,r} \frac{\sum_{t_s > t} A_{1,s}}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds} \right) \\ &\leq \Phi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} p(r) f(r, y(r), y'(r)) dr}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds} + M_{1,r} \frac{\sum_{j=s}^{+\infty} A_{1,j}}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds} \right). \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\int_t^{+\infty} p(r) f(r, y(r), y'(r)) dr}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, y(t), y'(t)) = 0, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\sum_{j=s}^{+\infty} A_{1,j}}{1 + \int_{t_j}^{+\infty} p(s) ds} &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{A_{1,s}}{1 + \int_{t_s}^{t_{s+1}} p(s) ds} = 0, \end{aligned}$$

then  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\rho(t)u'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} = 0$ . It is easy to see from  $u(t)$  and  $\rho(t)u'(t)$  that  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u(t)}{\sigma_0(t)} = 0$  and

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\rho(t)u'(t)}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} = 0$ . Then  $u \in X$ .

On the other hand, if  $u$  satisfies (2.9), we can prove that  $u \in X$  is a solution of BVP(2.8) easily.  $\square$

**Lemma 2.6.** *Suppose that  $x \in X$ . Then  $v \in Y$  is a solution of BVP*

$$\begin{aligned} [\Psi(\varrho(t)v'(t))] + q(t)g(t, x(t), x'(t)) &= 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} v(s) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varrho(t)v'(t) &= 0, \\ \Delta v(t_s) &= B_{0,s}J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s)), \quad s \in \mathbb{Z}, \\ \Delta \Psi(\varrho(t_s)v'(t_s)) &= B_{1,s}J_1(t_s, x(t_s), x'(t_s)), \quad s \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.13}$$

if and only if

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{t_s < t} B_{0,s}J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s)) \\ &+ \int_{-\infty}^t \frac{1}{\varrho(s)} \Psi^{-1} \left( \int_s^{+\infty} q(u)g(u, x(u), x'(u))du - \sum_{t_j \geq s} B_{1,j}J_1(t_j, x(t_j), x'(t_j)) \right) ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

*Proof.* The proof is similar to that of the proof of Lemma 2.5 and is omitted.  $\square$

Define the operator  $T$  on  $E$  by  $T(x, y)(t) = (T_1(x, y)(t), T_2(x, y)(t))$  with

$$\begin{aligned} T_1(x, y)(t) &= \sum_{t_s < t} A_{0,s}I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)) \\ &+ \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1} \left( \int_s^{+\infty} p(u)f(u, y(u), y'(u))du - \sum_{t_j \geq s} A_{1,j}I_1(t_j, y(t_j), y'(t_j)) \right)}{\rho(s)} ds, \end{aligned} \tag{2.15}$$

and

$$\begin{aligned} T_2(x, y)(t) &= \sum_{t_s < t} B_{0,s}J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s)) \\ &+ \int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1} \left( \int_s^{+\infty} q(u)g(u, x(u), x'(u))du - \sum_{t_j \geq s} B_{1,j}J_1(t_j, x(t_j), x'(t_j)) \right)}{\varrho(s)} ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

**Lemma 2.7.** *The following results hold:*

- (i)  $T : E \rightarrow E$  is well defined.
- (ii)  $(x, y) \in E$  is a solution of BVP(1.5) if and only if  $(x, y)$  is a fixed point of  $T$  in  $E$ .
- (iii)  $T : E \rightarrow E$  is completely continuous.

*Proof.* From Lemma 2.2,  $E$  is a Banach space. From Lemma 2.5 and Lemma 2.6, we know that (i) and (ii) hold. Note Lemma 2.3 and Lemma 2.4, the proof of (iii) is similar to that of the proof of Lemma 2.4 in [32] and is omitted.  $\square$

### 3 Main Theorems

In this section, the main results on the existence of solutions of BVP(1.5) are established. To establish the first result, we need the following assumption:

(A) There exist nonnegative constants  $A_{1,j} \geq 0, B_{1,j} \geq 0 (j = 0, 1, \dots, m)$ ,  $a_{i,j} \geq 0, b_{i,j} \geq 0 (i = 1, 2, j = 0, 1, \dots, m)$ , and  $\tau_{i,j}, \sigma_{i,j} \geq 0 (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, m)$  satisfying

$$\left| f \left( t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v \right) \right| \leq \Phi \left( A_{1,0} + \sum_{j=1}^m A_{1,j} |u|^{\tau_{1,j}} |v|^{\sigma_{1,j}} \right), u, v \in \mathbb{R}, a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$\left| g \left( t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v \right) \right| \leq \Psi \left( B_{1,0} + \sum_{j=1}^m B_{1,j} |u|^{\tau_{2,j}} |v|^{\sigma_{2,j}} \right), u, v \in \mathbb{R}, a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$\left| I_0 \left( t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v \right) \right| \leq a_{1,0} + \sum_{j=1}^m a_{1,j} |u|^{\tau_{1,j}} |v|^{\sigma_{1,j}}, u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z},$$

$$\left| J_0 \left( t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v \right) \right| \leq b_{1,0} + \sum_{j=1}^m b_{1,j} |u|^{\tau_{2,j}} |v|^{\sigma_{2,j}}, u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z},$$

$$\left| I_1 \left( t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v \right) \right| \leq \Phi \left( a_{2,0} + \sum_{j=1}^m a_{2,j} |u|^{\tau_{1,j}} |v|^{\sigma_{1,j}} \right), u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z},$$

$$\left| J_1 \left( t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v \right) \right| \leq \Psi \left( b_{2,0} + \sum_{j=1}^m b_{2,j} |u|^{\tau_{2,j}} |v|^{\sigma_{2,j}} \right), u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}.$$

We denote

$$\sigma = \max\{\tau_{1,j} + \sigma_{1,j}, \tau_{2,j} + \sigma_{2,j} : j = 1, 2, \dots, m\},$$

$$A_1 = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{j=-\infty}^s A_{0,s}}{1 + \int_{-\infty}^{t_s} \frac{du}{\rho(u)}},$$

$$B_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\sigma_{q_1}}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\int_s^{+\infty} p(u) du)}{\rho(s)} ds,$$

$$C_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\sigma_{q_1}}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sum_{t_j \geq s} A_{1,j})}{\rho(s)} ds,$$

$$D_1 = \sigma_{q_1} \sup_{t \in \mathbb{R}} \Phi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} p(u) du}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds} \right),$$

$$E_1 = \sigma_{q_1} \sup_{s \in \mathbb{Z}} \Phi^{-1} \left( \frac{\sum_{j=s+1}^{+\infty} A_{1,j}}{1 + \int_{t_{j+1}}^{+\infty} p(s) ds} \right),$$

$$P_1 = A_1 a_{1,0} + (B_1 + D_1) A_{1,0} + (C_1 + E_1) a_{2,0},$$

$$Q_i^1 = A_1 a_{1,i} + (B_1 + D_1) A_{1,i} + (C_1 + E_1) a_{2,i}, i = 1, 2, \dots, m$$

and

$$A_2 = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{j=-\infty}^s B_{0,s}}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\varrho(u)}},$$

$$B_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\sigma_{q_2}}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\varrho(u)}} \int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\int_s^{+\infty} q(u) du)}{\varrho(s)} ds,$$

$$C_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\sigma_{q_2}}{1 + \int_{-\infty}^t \frac{du}{\varrho(u)}} \int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\sum_{t_j \geq s} B_{1,j})}{\varrho(s)} ds,$$

$$D_2 = \sigma_{q_2} \sup_{t \in \mathbb{R}} \Psi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} q(u) du}{1 + \int_t^{+\infty} q(s) ds} \right),$$

$$E_2 = \sigma_{q_2} \sup_{s \in \mathbb{Z}} \Psi^{-1} \left( \frac{\sum_{j=s+1}^{+\infty} B_{1,j}}{1 + \int_{t_{j+1}}^{+\infty} q(s) ds} \right),$$

$$P_2 = A_2 a_{2,0} + (B_2 + D_2) B_{1,0} + (C_2 + E_2) b_{2,0},$$

$$Q_i^2 = A_2 a_{2,i} + (B_2 + D_2) B_{1,i} + (C_2 + E_2) b_{2,i}, i = 1, 2, \dots, m,$$

$$A = \max\{P_1, P_2\},$$

$$B = \max \left\{ \sum_{i=1}^m Q_i^1, \sum_{i=1}^m Q_i^2 \right\}.$$

**Theorem 3.1.** Suppose that (a)-(g) and (A) hold and  $\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds$  and  $\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds$  are convergent. Then BVP(1.5) has at least one positive solution if

(i)  $\sigma \in (0, 1)$  or

(ii)  $\sigma = 1$  and  $B < 1$  or

(iii)  $\sigma > 1$  and  $B(A + B)^{\sigma-1} \leq \frac{(\sigma-1)^{\sigma-1}}{\sigma^\sigma}$ .

*Proof.* We will apply Lemma 2.1 to show the results. Let  $X, Y, E$  and  $T$  be defined in section 2.

From Lemma 2.7,  $T : E \rightarrow E$  is a completely continuous operator and  $(x, y) \in E$  is a solution of BVP(1.5) if and only if  $(x, y)$  is a fixed point of  $T$  in  $E$ .

For  $(x, y) \in E$ , we have

$$\|(x, y)\| = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|y(t)|}{\tau_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\varrho(t)|y'(t)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} \right\} = r < +\infty.$$

So

$$\begin{aligned} |f(t, y(t), y'(t))| &= \left| f \left( t, \tau_0(t) \frac{y(t)}{\tau_0(t)}, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)} \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} \right) \right| \\ &\leq \Phi \left( A_{1,0} + \sum_{j=1}^m A_{1,j} \left| \frac{y(t)}{\tau_0(t)} \right|^{\tau_{1,j}} \left| \frac{\varrho(t)y'(t)}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} \right|^{\sigma_{1,j}} \right) \\ &\leq \Phi \left( A_{1,0} + \sum_{j=1}^m A_{1,j} \|y\|^{\tau_{1,j} + \sigma_{1,j}} \right), \text{ a.e. } t \in \mathbb{R}, \\ |g(t, x(t), x'(t))| &\leq \Psi \left( B_{1,0} + \sum_{j=1}^m B_{1,j} \|x\|^{\tau_{2,j} + \sigma_{2,j}} \right), \text{ a.e. } t \in \mathbb{R}, \\ |I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s))| &\leq a_{1,0} + \sum_{j=1}^m a_{1,j} \|y\|^{\tau_{1,j} + \sigma_{1,j}}, s \in \mathbb{Z}, \\ |J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s))| &\leq b_{1,0} + \sum_{j=1}^m b_{1,j} \|x\|^{\tau_{2,j} + \sigma_{2,j}}, s \in \mathbb{Z}, \\ |I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s))| &\leq \Phi \left( a_{2,0} + \sum_{j=1}^m a_{2,j} \|y\|^{\tau_{1,j} + \sigma_{1,j}} \right), s \in \mathbb{Z}, \\ |J_1(t_s, x(t_s), x'(t_s))| &\leq \Psi \left( b_{2,0} + \sum_{j=1}^m b_{2,j} \|x\|^{\tau_{2,j} + \sigma_{2,j}} \right), s \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

One knows that

$$\phi_p(u+v) \leq \sigma_p[\phi_p(u) + \phi_p(v)], u, v \geq 0 \text{ with } \sigma_p = \begin{cases} 1, & 1 < p < 2, \\ 2^{p-1}, & p \geq 2. \end{cases}$$

Then (2.15) implies for  $t \in (t_s, t_{s+1}]$  that

$$\begin{aligned} \frac{|T_1(x, y)(t)|}{\sigma_0(t)} &\leq \frac{1}{\sigma_0(t)} \sum_{t_s < t} A_{0,s} |I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s))| \\ &+ \frac{1}{\sigma_0(t)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho(s)} \Phi^{-1} \left( \int_s^{+\infty} p(u) |f(u, y(u), y'(u))| du + \sum_{t_j \geq s} A_{1,j} |I_1(t_j, y(t_j), y'(t_j))| \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sum_{j=-\infty}^s A_{0,s}}{1+\int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \left( a_{1,0} + \sum_{i=1}^m a_{1,i} \|y\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) \\
&+ \frac{\sigma_q}{1+\int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\int_s^{+\infty} p(u)du)}{\rho(s)} ds \left( A_{1,0} + \sum_{i=1}^m A_{1,i} \|y\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) \\
&+ \frac{\sigma_q}{1+\int_{-\infty}^t \frac{du}{\rho(u)}} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sum_{\ell_j \geq s} A_{1,j})}{\rho(s)} ds \left( a_{2,0} + \sum_{i=1}^m a_{2,i} \|y\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) \\
&\leq A_1 \left( a_{1,0} + \sum_{i=1}^m a_{1,i} \|(x, y)\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) + B_1 \left( A_{1,0} + \sum_{i=1}^m A_{1,i} \|(x, y)\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) \\
&+ C_1 \left( a_{2,0} + \sum_{i=1}^m a_{2,i} \|(x, y)\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) \\
&\leq P_1 + \sum_{i=1}^m Q_i^1 \|(x, y)\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}}.
\end{aligned}$$

On the other hand, we have for  $t \in (t_s, t_{s+1}]$  that

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho(t)|(T_1(x, y))'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \\
&\leq \frac{1}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \Phi^{-1} \left( \int_t^{+\infty} p(u) |f(u, y(u), y'(u))| du + \sum_{t_j \geq t} A_{1,j} |I_1(t_j, y(t_j), y'(t_j))| \right) \\
&\leq \Phi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} p(u) du}{1+\int_t^{+\infty} p(s) ds} \Phi \left( A_{1,0} + \sum_{j=1}^m A_{1,j} \|y\|^{\tau_{1,j}+\sigma_{1,j}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sum_{j=s+1}^{+\infty} A_{1,j}}{1+\int_t^{+\infty} p(s) ds} \Phi \left( a_{2,0} + \sum_{j=1}^m a_{2,j} \|y\|^{\tau_{1,j}+\sigma_{1,j}} \right) \right) \\
&\leq \sigma_q \Phi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} p(u) du}{1+\int_t^{+\infty} p(s) ds} \right) \left( A_{1,0} + \sum_{j=1}^m A_{1,j} \|y\|^{\tau_{1,j}+\sigma_{1,j}} \right) \\
&+ \sigma_q \Phi^{-1} \left( \frac{\sum_{j=s+1}^{+\infty} A_{1,j}}{1+\int_{t_{j+1}}^{+\infty} p(s) ds} \right) \left( a_{2,0} + \sum_{j=1}^m a_{2,j} \|y\|^{\tau_{1,j}+\sigma_{1,j}} \right) \\
&\leq D_1 \left( A_{1,0} + \sum_{i=1}^m A_{1,i} \|y\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) + E_1 \left( a_{2,0} + \sum_{i=1}^m a_{2,i} \|y\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}} \right) \\
&\leq P_1 + \sum_{i=1}^m Q_i^1 \|(x, y)\|^{\tau_{1,i}+\sigma_{1,i}}.
\end{aligned}$$



It follows that

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |T_1(x, y)(t)| \leq P_1 + \sum_{i=1}^m Q_i^1 \|(x, y)\|^{\tau_{1,i} + \sigma_{1,i}}. \quad (3.17)$$

Similarly we get

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |T_2(x, y)(t)| \leq P_2 + \sum_{i=1}^m Q_i^2 \|(x, y)\|^{\tau_{1,i} + \sigma_{1,i}}. \quad (3.18)$$

It follows from (3.17) and (3.18) that

$$\|(T_1(x, y), T_2(x, y))\| \leq A + B \max\{\|(x, y)\|^\sigma, 1\} \leq A + B + B\|(x, y)\|^\sigma.$$

(i)  $\sigma \in (0, 1)$ .

Since  $\sigma \in (0, 1)$ , change  $r_0 > 0$  such that  $A + B + Br_0^\sigma \leq r_0$ . Let  $\Omega_0 = \{(x, y) \in X \times Y : \|(x, y)\| \leq r_0\}$ . Then we get

$$\|(T_1(x, y), T_2(x, y))\| \leq A + B + Br_0^\sigma \leq r_0.$$

So  $T\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega_0}$ . Thus Lemma 2.1 implies that the operator  $T$  has at least one fixed point in  $\overline{\Omega_0}$ . So BVP(1.5) has at least one solution.

(ii)  $\sigma = 1$  and  $B < 1$ .

Let  $r_0 = \frac{A+B}{1-B}$  such that  $A + B + Br_0 = r_0$ . Let  $\Omega_0 = \{(x, y) \in X \times Y : \|(x, y)\| \leq r_0\}$ . Then we get

$$\|(T_1(x, y), T_2(x, y))\| \leq A + B + Br_0 \leq r_0.$$

So  $T\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega_0}$ . Thus Lemma 2.1 implies that the operator  $T$  has at least one fixed point in  $\overline{\Omega_0}$ . So BVP(1.5) has at least one solution.

(iii)  $\sigma > 1$  and  $B(A+B)^{\sigma-1} \leq \frac{(\sigma-1)^{\sigma-1}}{\sigma^\sigma}$ .

Let  $r_0 = \left(\frac{A+B}{B(\sigma-1)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ . It is easy to show from  $\frac{(A+B)^{\sigma-1}\sigma^\sigma}{(\sigma-1)^{\sigma-1}} \leq \frac{1}{B}$  that  $A + B + Br_0^\sigma \leq r_0$ . Let  $\Omega_0 = \{(x, y) \in X \times Y : \|(x, y)\| \leq r_0\}$ . Then we get

$$\|(T_1(x, y), T_2(x, y))\| \leq A + B + Br_0^\sigma \leq r_0.$$

So  $T\overline{\Omega_0} \subset \overline{\Omega_0}$ . Thus Lemma 2.1 implies that the operator  $T$  has at least one fixed point  $(x, y)$  in  $\overline{\Omega_0}$ . So BVP(1.5) has at least one solution  $(x, y)$ .

Since  $I_0, J_0, f, g$  are nonnegative functions and  $I_1, J_1$  are non-positive functions, we know by the definition of  $T_1, T_2$  that  $(x, y)$  is a nonnegative solution of BVP(1.5). Furthermore, if there exists  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  such that  $[x(\bar{t})]^2 + [y(\bar{t})]^2 = 0$ , suppose that  $\bar{t} \in (t_s, t_{s+1}]$  for some  $s \in \mathbb{Z}$ , from  $[\Phi(\rho(t)x'(t))] = -p(t)f(t, y(t), y'(t)) \leq 0$  and  $[\Psi(\varrho(t)y'(t))] = -q(t)g(t, x(t), x'(t)) \leq 0$ ,  $I_1, J_1$  are non-positive, we have  $\rho(t)x'(t)$  and  $\varrho(t)y'(t)$  is nonincreasing on  $\mathbb{R}$ . From the boundary conditions in (1.5), we have  $\rho(t)x'(t)$  and  $\varrho(t)y'(t)$  are nonnegative on  $\mathbb{R}$ . Since  $I_0, J_0$  are nonnegative and  $x, y$  are nondecreasing on  $\mathbb{R}$ , we have  $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$  on  $(t_s, \bar{t}]$ . Then  $p(t)f(t, 0, 0) = q(t)g(t, 0, 0) = 0$  on  $(t_s, \bar{t}]$ , a contradiction to (d). Thus  $(x, y)$  is a positive solution of BVP(1.5).  $\square$

**Theorem 3.2.** *Suppose that (a)-(g) hold and there exist non-decreasing functions  $M_{I_0}, M_{J_0}, M_{I_1}$  and  $M_{J_1}, M_f, M_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty)$  such that*

$$\begin{aligned} \left| f \left( t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v \right) \right| &\leq M_f(|u|, |v|), u, v \in \mathbb{R}, a.e. t \in \mathbb{R}, \\ \left| g \left( t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v \right) \right| &\leq M_g(|u|, |v|), u, v \in \mathbb{R}, a.e. t \in \mathbb{R}, \\ \left| I_0 \left( t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v \right) \right| &\leq M_{I_0}(|u|, |v|), u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}, \\ \left| J_0 \left( t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v \right) \right| &\leq M_{J_0}(|u|, |v|), u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}, \\ \left| I_1 \left( t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v \right) \right| &\leq M_{I_1}(|u|, |v|), u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}, \\ \left| J_1 \left( t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v \right) \right| &\leq M_{J_1}(|u|, |v|), u, v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Then BVP(1.5) has at least one positive solution if

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \left[ M_{J_0}(r, r) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{0,s} + \left( 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right) \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} B_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} q(s) ds} M_J(r, r) \right. \\ \left. + \left( 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right) M_g(r, r) \right] < 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

and

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \left[ M_{I_0}(r, r) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{0,s} + \left( 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds}{\sigma_0(t)} \right) \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{\infty} A_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} M_I(r, r) \right. \\ \left. + \left( 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds}{\sigma_0(t)} \right) M_f(r, r) \right] < 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

*Proof.* Consider the set  $\Omega = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) = \lambda T(x, y), \lambda \in [0, 1]\}$ . For  $(x, y) \in \Omega$ , we

have by the definition of  $T$

$$[\Phi(\rho(t)x'(t))] + \lambda p(t)f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$[\Psi(\varrho(t)y'(t))] + \lambda q(t)g(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t)x'(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varrho(t)y'(t) = 0,$$

$$\Delta x(t_s) = \lambda A_{0,s} I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)), \quad \Delta \Phi(\rho(t_s)x'(t_s)) = \lambda A_{1,s} I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s)), \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$\Delta y(t_s) = \lambda B_{0,s} J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s)), \quad \Delta \Psi(\varrho(t_s)y'(t_s)) = \lambda B_{1,s} J_1(t_s, x(t_s), x'(t_s)), \quad s \in \mathbb{Z}.$$

From the assumption, we have

$$|f(t, y(t), y'(t))| \leq M_f(\|y\|, \|y'\|), \quad a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$|g(t, x(t), x'(t))| \leq M_g(\|x\|, \|x'\|), \quad a.e. t \in \mathbb{R},$$

$$|I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s))| \leq M_{I_0}(\|y\|, \|y'\|), \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$|J_0(t_s, x(t_s), x'(t_s))| \leq M_{J_0}(\|x\|, \|x'\|), \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$|I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s))| \leq M_{I_1}(\|y\|, \|y'\|), \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$|J_1(t_s, x(t_s), x'(t_s))| \leq M_{J_1}(\|x\|, \|x'\|), \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)} &= \frac{1}{\sigma_0(t)} \left| \int_{-\infty}^t x'(s) ds \right| + \left| \sum_{t_s < t} \lambda A_{0,s} I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s)) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sigma_0(t)} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} \frac{\rho(s)|x'(s)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))} ds + \sum_{t_s < t} A_{0,s} |I_0(t_s, y(t_s), y'(t_s))| \\ &\leq \frac{1}{\sigma_0(t)} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} + \sum_{t_s < t} A_{0,s} M_{I_0} \left( \frac{|y(t_s)|}{\tau_0(t_s)}, \frac{|\varrho(t_s)y'(t_s)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sigma_0(t)} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} + \sum_{t_s < t} A_{0,s} M_{I_0} (\|y\|, \|y'\|). \end{aligned}$$

Since  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma_0(t) = 0$  and  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma_0(t) = +\infty$ , we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma_0(t)} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi^{-1}(\sigma_1(t)) = 1.$$

Then

$$\frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s)) ds}{\rho(s)}}{\sigma_0(t)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(t)|x'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} + M_{I_0}(\|y\|, \|y'\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{0,s}.$$

Similarly we have

$$\frac{|y(t)|}{\tau_0(t)} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s)) ds}{\varrho(s)}}{\tau_0(t)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\varrho(t)|y'(t)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(t))} + M_{J_0}(\|y\|, \|y'\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{1,s}.$$

On the other hand, we have for  $t \in (t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \frac{|\Phi(\rho(t)x'(t))|}{\sigma_1(t)} &= \Phi \left( \frac{\rho(t)|x'(t)|}{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sigma_1(t)} \sum_{t_s \geq t} |\Delta[\Phi(\rho(t_s)x'(t_s))]| + \frac{1}{\sigma_1(t)} \int_t^{+\infty} |p(s)||f(s, y(s), y'(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\sigma_1(t)} \sum_{t_s \geq t} A_{1,s} |I_1(t_s, y(t_s), y'(t_s))| + \frac{1}{\sigma_1(t)} \int_t^{+\infty} |p(s)||f(s, y(s), y'(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} \sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s} M_{I_1} \left( \frac{|y(t_s)|}{\tau_0(t_s)}, \frac{\varrho(t_s)|y'(t_s)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))} \right) + \frac{1}{\sigma_1(t)} \int_t^{+\infty} |p(s)| M_f \left( \frac{|y(s)|}{\tau_0(s)}, \frac{\varrho(s)|y'(s)|}{\Psi^{-1}(\tau_1(s))} \right) ds \\ &\leq \frac{1}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} \sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s} M_{I_1} (\|y\|, \|y'\|) + \frac{1}{\sigma_1(t)} \int_t^{+\infty} |p(s)| M_f (\|y\|, \|y'\|) ds \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} M_I (\|y\|, \|y'\|) + M_f (\|y\|, \|y'\|). \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)} &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s)) ds}{\rho(s)}}{\sigma_0(t)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} M_I (\|y\|, \|y'\|) + M_{I_0} (\|y\|, \|y'\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{0,s} \\ &\quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s)) ds}{\rho(s)}}{\sigma_0(t)} M_f (\|y\|, \|y'\|). \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x(t)|}{\sigma_0(t)}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\Phi(\rho(t)x'(t))|}{\sigma_1(t)} \right\} \\ &\leq M_{I_0} (\|y\|, \|y'\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{0,s} + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s)) ds}{\rho(s)}}{\sigma_0(t)} \right] \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} M_I (\|y\|, \|y'\|) \\ &\quad + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s)) ds}{\rho(s)}}{\sigma_0(t)} \right] M_f (\|y\|, \|y'\|). \end{aligned}$$

Similarly we have

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq M_{J_0}(\|x\|, \|x\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{0,s} + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right] \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} B_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} q(s) ds} M_J(\|x\|, \|x\|) \\ &+ \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right] M_g(\|x\|, \|x\|). \end{aligned}$$

**Case 1.** If  $\|x\| \leq \|y\|$ , then

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq M_{J_0}(\|y\|, \|y\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{0,s} + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right] \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} B_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} q(s) ds} M_J(\|y\|, \|y\|) \\ &+ \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right] M_g(\|y\|, \|y\|). \end{aligned}$$

From (3.19), then there exists  $M > 0$  such that  $\|y\| \leq M$ . So

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq M_{I_0}(M, M) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{0,s} + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds}{\sigma_0(t)} \right] \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} M_I(M, M) \\ &+ \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds}{\sigma_0(t)} \right] M_f(M, M). \end{aligned}$$

Then  $\Omega = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) = \lambda T(x, y), \lambda \in [0, 1]\}$  is bounded. Hence Schauder's fixed point theorem implies that  $T$  has a fixed point  $(x, y)$ . Similarly to Theorem 3.1, we can prove that  $(x, y)$  is a positive solution of BVP(1.5).

**Case 2.** If  $\|y\| \leq \|x\|$ , then

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq M_{I_0}(\|x\|, \|x\|) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{0,s} + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds}{\sigma_0(t)} \right] \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} A_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} p(s) ds} M_I(\|x\|, \|x\|) \\ &+ \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(s))}{\rho(s)} ds}{\sigma_0(t)} \right] M_f(\|x\|, \|x\|). \end{aligned}$$

From (3.20), then there exists  $M > 0$  such that  $\|x\| \leq M$ . So

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq M_{J_0}(M, M) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{0,s} + \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right] \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{s=k+1}^{+\infty} B_{1,s}}{1 + \int_{t_{k+1}}^{+\infty} q(s) ds} M_J(M, M) \\ &+ \left[ 1 + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\int_{-\infty}^t \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(s))}{\varrho(s)} ds}{\tau_0(t)} \right] M_g(M, M). \end{aligned}$$

Then  $\Omega = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) = \lambda T(x, y), \lambda \in [0, 1]\}$  is bounded. Hence Schauder's fixed point theorem implies that  $T$  has a fixed point  $(x, y)$ . Similarly to Theorem 3.1, we can prove that  $(x, y)$  is a positive solution of BVP(1.5).  $\square$

## 4 An example

In this section, we present an example to illustrate the main theorems.

**Example 4.1.** Consider the following problem consisting of the differential equations

$$[(e^{-t}x'(t))^3]' + e^{-2t} \left( A_{1,0} + A_{1,1} \left( \frac{y(t)}{1+\frac{1}{2}e^{2t}} \right)^{\tau_{1,1}} \left( \frac{e^{2t}y'(t)}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{2}e^{-2t}}} \right)^{\sigma_{1,1}} \right)^3 = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R}, \quad (4.21)$$

$$[(e^{-2t}y'(t))^5]' + e^{-2t} \left( B_{1,0} + B_{1,1} \left( \frac{x(t)}{1+e^t} \right)^{\tau_{2,1}} \left( \frac{e^t x'(t)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}e^{-2t}}} \right)^{\sigma_{2,1}} \right)^5 = 0, \quad a.e. t \in \mathbb{R}$$

the boundary conditions

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t x'(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t} y'(t) = 0, \quad (4.22)$$

and the impulse effects

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= 2^s \left[ a_{1,0} + a_{1,1} \left( \frac{y(s)}{1+\frac{1}{2}e^{2s}} \right)^{\tau_{1,1}} \left( \frac{e^{-2s}y'(s)}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{2}e^{-2s}}} \right)^{\sigma_{1,1}} \right], \\ \Delta(e^{-s}x'(s))^3 &= 2^{-s} \left( a_{2,0} + a_{2,1} \left( \frac{y(s)}{1+\frac{1}{2}e^{2s}} \right)^{\tau_{1,1}} \left( \frac{e^{-2s}y'(s)}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{2}e^{-2s}}} \right)^{\sigma_{1,1}} \right)^3, \quad s \in \mathbb{Z}, \\ \Delta y(s) &= 3^s \left[ b_{1,0} + b_{1,1} \left( \frac{x(s)}{1+e^s} \right)^{\tau_{2,1}} \left( \frac{e^{-s}x'(s)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}e^{-2s}}} \right)^{\sigma_{2,1}} \right], \\ \Delta(e^{-2s}y'(s))^5 &= 3^{-s} \left( b_{2,0} + b_{2,1} \left( \frac{x(s)}{1+e^s} \right)^{\tau_{2,1}} \left( \frac{e^{-s}x'(s)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}e^{-2s}}} \right)^{\sigma_{2,1}} \right)^5, \quad s \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Corresponding to BVP(1.5), we find that

$$t_s = s, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad (e) \text{ holds,}$$

$$\Phi(x) = x^3, \quad \Psi(x) = x^5, \quad \Phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad \Psi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{5}},$$

$$\text{with } p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad q_1 = \frac{3}{2}, \quad q_2 = \frac{5}{4}, \quad (c) \text{ holds,}$$

$$\rho(t) = e^{-t}, \quad \varrho(t) = e^{-2t}, \quad p(t) = e^{-2t}, \quad q(t) = e^{-2t}, \quad (a) \text{ and } (b) \text{ hold,}$$

$$A_{0,s} = 2^s, \quad B_{0,s} = 3^s, \quad A_{1,s} = 2^{-s}, \quad B_{1,s} = 3^{-s}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad (g) \text{ holds,}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) &= 1 + e^t, \quad \sigma_1(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{-3t}, \\ \tau_0(t) &= 1 + \frac{1}{2}e^{2t}, \quad \tau_1(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-2t}, \\ f(t, u, v) &= \left( A_{1,0} + A_{1,1} \left( \frac{|u|}{1 + \frac{1}{2}e^{2t}} \right)^{\tau_{1,1}} \left( \frac{e^{2t}|v|}{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{2}e^{-2t}}} \right)^{\sigma_{1,1}} \right)^3, \\ g(t, u, v) &= \left( B_{1,0} + B_{1,1} \left( \frac{|u|}{1 + e^t} \right)^{\tau_{2,1}} \left( \frac{e^t|v|}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{3}e^{-3t}}} \right)^{\sigma_{2,1}} \right)^5, \\ I_0(t_s, u, v) &= a_{1,0} + a_{1,1} \left( \frac{|u|}{1 + \frac{1}{2}e^{2t_s}} \right)^{\tau_{1,1}} \left( \frac{e^{2t_s}|v|}{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{2}e^{-2t_s}}} \right)^{\sigma_{1,1}}, \\ J_0(t_s, u, v) &= b_{1,0} + b_{1,1} \left( \frac{|u|}{1 + e^{t_s}} \right)^{\tau_{2,1}} \left( \frac{e^{t_s}|v|}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}e^{-2t_s}}} \right)^{\sigma_{2,1}}, \\ I_1(t_s, u, v) &= - \left( a_{2,0} + a_{2,1} \left( \frac{|u|}{1 + \frac{1}{2}e^{2t_s}} \right)^{\tau_{1,1}} \left( \frac{e^{2t_s}|v|}{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{2}e^{-2t_s}}} \right)^{\sigma_{1,1}} \right)^3, \\ J_1(t_s, u, v) &= - \left( b_{2,0} + b_{2,1} \left( \frac{|u|}{1 + e^{t_s}} \right)^{\tau_{2,1}} \left( \frac{e^{t_s}|v|}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}e^{-2t_s}}} \right)^{\sigma_{2,1}} \right)^5. \end{aligned}$$

One sees that

$$\begin{aligned} \left| f \left( t, \tau_0(t)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t))}{\varrho(t)}v \right) \right| &\leq (A_{1,0} + A_{1,1}|u|^{\tau_{1,1}}|v|^{\sigma_{1,1}})^3, \\ \left| g \left( t, \sigma_0(t)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t))}{\rho(t)}v \right) \right| &\leq (B_{1,0} + B_{1,1}|u|^{\tau_{2,1}}|v|^{\sigma_{2,1}})^5, \\ \left| I_0 \left( t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v \right) \right| &\leq a_{1,0} + a_{1,1}|u|^{\tau_{1,1}}|v|^{\sigma_{1,1}}, \\ \left| J_0 \left( t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v \right) \right| &\leq b_{1,0} + b_{1,1}|u|^{\tau_{2,1}}|v|^{\sigma_{2,1}}, \\ \left| I_1 \left( t_s, \tau_0(t_s)u, \frac{\Psi^{-1}(\tau_1(t_s))}{\varrho(t_s)}v \right) \right| &\leq (a_{2,0} + a_{2,1}|u|^{\tau_{1,1}}|v|^{\sigma_{1,1}})^3, \\ \left| J_1 \left( t_s, \sigma_0(t_s)u, \frac{\Phi^{-1}(\sigma_1(t_s))}{\rho(t_s)}v \right) \right| &\leq (b_{2,0} + b_{2,1}|u|^{\tau_{2,1}}|v|^{\sigma_{2,1}})^5. \end{aligned}$$

One sees that (d), (f) and (A) hold. By direct computation, we get

$$\begin{aligned} \sigma &= \max\{\tau_{1,1} + \sigma_{1,1}, \tau_{2,1} + \sigma_{2,1}\}, \\ A_1 &= \sup_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{j=-\infty}^s 2^j}{1 + e^s} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \frac{2^{s+1}}{1 + e^s} < 2, \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{e^{\frac{3}{2}t}}{1+e^t} < \frac{3}{\sqrt[3]{2}},$$

$$C_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+e^t} \int_{-\infty}^t \frac{\sqrt[3]{\sum_{j=s}^{+\infty} 2^{-j}}}{e^{-s}} ds = \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\ln \frac{\sqrt[3]{2}}{2}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{e}{\sqrt[3]{2}}\right)^t}{1+e^t} < \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\ln \frac{\sqrt[3]{2}}{2}},$$

$$D_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sqrt[3]{\frac{\int_t^{+\infty} p(u) du}{1 + \int_t^{+\infty} p(s) ds}} < 1,$$

$$E_1 = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \sqrt[3]{\frac{\sum_{j=s+1}^{+\infty} 2^{-j}}{1 + \int_{s+1}^{+\infty} e^{-2s} ds}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \sqrt[3]{\frac{2^{-s}}{1 + \frac{1}{2} e^{-2(s+1)}}} < 2,$$

$$P_1 < 2a_{1,0} + \left(1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right) A_{1,0} + \left(2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\ln \frac{\sqrt[3]{2}}{2}}\right) a_{2,0} < 2a_{1,0} + 3.4A_{1,0} + 3.7a_{2,0},$$

$$Q_1^1 < 2a_{1,1} + \left(1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right) A_{1,1} + \left(2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\ln \frac{\sqrt[3]{2}}{2}}\right) a_{2,1} < 2a_{1,1} + 3.4A_{1,1} + 3.7a_{2,1},$$

and

$$A_2 = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{j=-\infty}^s 3^j}{1 + \frac{1}{2} e^{2s}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \frac{\frac{3}{2} 3^s}{1 + \frac{1}{2} e^{2s}} < 3,$$

$$B_2 = \frac{5}{8\sqrt[5]{2}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{e^{\frac{5}{2}t}}{1 + \frac{1}{2} e^{2t}} < \frac{5}{4\sqrt[5]{2}},$$

$$C_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{2t}} \int_{-\infty}^t \frac{\sqrt[5]{\sum_{j=s}^{+\infty} 3^{-j}}}{e^{-2s}} ds = \frac{\sqrt[5]{\frac{3}{2}}}{2 - \ln \sqrt[5]{3}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{e^2}{\sqrt[5]{3}}\right)^t}{1 + \frac{1}{2} e^{2t}} < \frac{2\sqrt[5]{\frac{3}{2}}}{2 - \ln \sqrt[5]{3}},$$

$$D_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \Psi^{-1} \left( \frac{\int_t^{+\infty} q(u) du}{1 + \int_t^{+\infty} q(s) ds} \right) < 1,$$

$$E_2 = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \sqrt[5]{\frac{\frac{3}{2} 3^{-s-1}}{1 + \frac{1}{2} e^{-2(s+1)}}} < 3,$$

$$P_2 < 3a_{2,0} + \left(1 + \frac{5}{4\sqrt[5]{2}}\right) B_{1,0} + \left(\frac{2\sqrt[5]{\frac{3}{2}}}{2 - \ln \sqrt[5]{3}} + 3\right) b_{2,0} < 3a_{2,0} + 2.1B_{1,0} + 4.3b_{2,0},$$

$$Q_1^2 < 3a_{2,1} + \left(1 + \frac{5}{4\sqrt[5]{2}}\right) B_{1,1} + \left(\frac{2\sqrt[5]{\frac{3}{2}}}{2 - \ln \sqrt[5]{3}} + 3\right) b_{2,1} < 3a_{2,1} + 2.1B_{1,1} + 4.3b_{2,1},$$

$$A = \max\{P_1, P_2\} < 2a_{1,0} + 3.4A_{1,0} + 3.7a_{2,0} + 3a_{2,0} + 2.1B_{1,0} + 4.3b_{2,0},$$

$$B = \max\{Q_1^1, Q_1^2\} < 2a_{1,1} + 3.4A_{1,1} + 3.7a_{2,1} + 3a_{2,1} + 2.1B_{1,1} + 4.3b_{2,1}.$$

By Theorem 3.1, then BVP(4.19)-(4.21) has at least one positive solution if



- (i)  $\sigma \in (0, 1)$  or
- (ii)  $\sigma = 1$  and  $2a_{1,1} + 3.4A_{1,1} + 3.7a_{2,1} + 3a_{2,1} + 2.1B_{1,1} + 4.3b_{2,1} < 1$  or
- (iii)  $\sigma > 1$  and  $2a_{1,1} + 3.4A_{1,1} + 3.7a_{2,1} + 3a_{2,1} + 2.1B_{1,1} + 4.3b_{2,1}(2a_{1,0} + 3.4A_{1,0} + 3.7a_{2,0} + 3a_{2,0} + 2.1B_{1,0} + 4.3b_{2,0} + 2a_{1,1} + 3.4A_{1,1} + 3.7a_{2,1} + 3a_{2,1} + 2.1B_{1,1} + 4.3b_{2,1})^{\sigma-1} \leq \frac{(\sigma-1)^{\sigma-1}}{\sigma}$ .

*Remark 4.1.* Similarly to Theorem 3.1 in [32], we can establish existence result of solutions for BVP(1.5) under the assumptions that both  $p(t)f(t, u, v)$  and  $q(t)g(t, u, v)$  are Carathéodory functions. Since both  $e^{-2t}$  is not measurable on  $\mathbb{R}$ , we know that both  $t \rightarrow e^{-2t}f(t, u, v)$  and  $t \rightarrow e^{-2t}g(t, u, v)$  are not Carathéodory functions. Then this kind of similar result can not be applied to solve Example 4.1.

## 5 Acknowledgements

The first author was supported by the Natural Science Foundation of Guangdong province (No: S2011010001900), the Natural Science Foundation of institution of higher education of Guangdong province (No:2014KTSCX126) and the Guangdong Higher Education Foundation for High-level talents.

## References

- [1] A. Cabada and J.A. Cid. *Heteroclinic solutions for non-autonomous boundary value problems with singular  $\Phi$ -Laplacian operators*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2009, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. 7th AIMS Conference, suppl., 118–122.
- [2] A. Calamai. *Heteroclinic solutions of boundary value problems on the real line involving singular  $\Phi$ -Laplacian operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **378**(2011), 667–679.
- [3] B. Bianconi and F. Papalini. *Non-autonomous boundary value problems on the real line*, Discrete and continuous dynamical systems, **15**(2006), 759–776.
- [4] C. Avramescu and C. Vladimirescu. *Existence of Homoclinic solutions to a nonlinear second order ODE*, Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems, Ser. A, Math Anal. **15**(2008), 481–491.
- [5] C. Avramescu and C. Vladimirescu. *Existence of solutions to second order ordinary differential equations having finite limits at  $\pm\infty$* , Electronic Journal of differential equations, **18**(2004), 1–12.
- [6] C. Avramescu and C. Vladimirescu. *Limits of solutions of a perturbed linear differential equation*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **3**(2002), 1–11.

- 
- [7] C. G. Philos and I. K. Purnaras. *A boundary value problem on the whole line to second order nonlinear differential equations*, Georgian Mathematical Journal, **17**(2010), 241–252.
- [8] C. Marcelli and F. Papalini. *Heteroclinic connections for fully non-linear non-autonomous second-order differential equations*, Journal of Differential Equations, **241**(2007), 160–183.
- [9] D. O'Regan, B. Yan and R. P. Agarwal. *Nonlinear Boundary Value Problems on Semi-Infinite Intervals using Weighted Spaces: An Upper and Lower Solution Approach*, Positivity, **11**(1)(2007), 171–189.
- [10] D. R. Dunninger and H. Y. Wang. *Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic systems*. Nonlinear Anal, **29**(1997), 1051–1060.
- [11] D. R. Dunninger and H. Y. Wang. *Multiplicity of positive radial solutions for an elliptic system on an annulus*. Nonlinear Anal, **42**(2000), 803–811.
- [12] E. K. Lee and Y. H. Lee. *A global multiplicity result for two-point boundary value problems of  $p$ -Laplacian systems*. Sci China Math, **53**(4)(2010), 967–984.
- [13] F. Y. Deren and N. A. Hamal. *Second-order boundary-value problems with integral boundary conditions on the real line*, Electronic Journal of Differential Equations, **19**(2014), 1–13.
- [14] G. Cupini, C. Macelli and F. Papalini. *Heteroclinic solutions of boundary value problems on the real line involving general nonlinear differential operators*, Differ. Integral Equations, **24**(2011), 619–644.
- [15] G. Cupini, C. Macelli and F. Papalini. *On the solvability of a boundary value problem on the real line*, Boundary Value Problem, 2011 (2011): 26.
- [16] I. Rachunkova, S. Stanek and M. Tvrđy. *Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*, *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations*, **3** 606–723, Ed. by A. Canada, P. Drabek, A. Fonde, Elsevier 2006.
- [17] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, Germany, 1985.
- [18] O. J. M. Do, S. Lorca, J. Sanchez, et al. *Positive solutions for a class of multiparameter ordinary elliptic systems*. J. Math Anal Appl., **332**(2007), 1249-1266.
- [19] O. J. M. Do, S. Lorca, P. Ubilla. *Local superlinearity for elliptic systems involving parameters*. J Differential Equations, 211(2005) 1-19.
- [20] R.P. Agarwal, *Boundary value problems for higher order differential equations*, World Scientific, Singapore, 1986.

- [21] R.P. Agarwal and D. O'Regan. *Infinite interval problems for differential, difference and integral equations*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (2001).
- [22] R.P. Agarwal and D. O'Regan. *Boundary value problems on the half line modelling phenomena in the theory of colloids*, Mathematical Problems in Engineering, **8**(2002), 143–150.
- [23] R.P. Agarwal and D. O'Regan. *Continuous and discrete boundary value problems on the infinite interval: existence theory*, Mathematika, **48**(2001), 273–292.
- [24] R.P. Agarwal and D. O'Regan. *Infinite interval problems modelling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical potential theory*, Studies in Appl. Math., **111**(2003), 339–358.
- [25] V. A. Il'in and E. I. Moiseev. *Nonlocal boundary-value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator*, Differential Equations, **23**(1987), 979–987.
- [26] V. V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [27] W. Ge. *Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Science Press, Beijing, 2007.
- [28] X. Cheng and Z. Zhang. *Positive solutions for a multi-parameter system of second-order ordinary differential equations*, Sci China Math, **54**(5)(2011), 959–972.
- [29] Y. H. Lee. *A multiplicity result of positive radial solutions for a multi-parameter elliptic system on an exterior domain*, Nonlinear Anal, **45**(2001), 597–611.
- [30] Y. H. Lee. *Multiplicity of positive radial solutions for multi-parameter semilinear elliptic systems on an annulus*. J. Differential Equations, **174**(2001), 420–441.
- [31] Y. Liu. *Solvability of boundary value problems for singular quasi-Laplacian differential equations on the whole line*, Mathematical Models and Analysis, **17**(2012), 423–446.
- [32] Y. Liu. *Existence of solutions of boundary value problems for coupled singular differential equations on whole lines with impulses*, Mediterr. J. Math. DOI 10.1007/s00009-014-0422-1, to appear.
- [33] Y. Wang and W. Ge. *Existence of triple positive solutions for multi-point boundary value problems with a one dimensional  $p$ -Laplacian*, Computers and Mathematics with Applications, **54**(2007), 793–807.

# Errores, Dificultades y Conflictos Semióticos Presentes en la Enseñanza de las Derivadas

*Errors, Difficulties and Semiotic Conflicts Present in the Teaching of Derivatives*

Mario Arrieche (marioarrieche@hotmail.com)

Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Albéniz A. Meléndez Q. (albenizamq@yahoo.com)

Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos

## Resumen

El problema abordado en esta investigación se centra en la caracterización de los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería, en el que se analizan los errores que cometen, las dificultades y conflictos semióticos que se hacen presentes en un proceso de enseñanza y aprendizaje de esta noción. Formó parte de un trabajo de investigación sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería, del cual se consideran la descripción del problema destacando la importancia de esta noción para los Ingenieros en proceso de formación. El trabajo se sustenta en el Modelo Semiótico Antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) y usado por Arrieche (2002) y Meléndez (2005), actualmente conocido con el nombre: Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005). Metodológicamente se sigue un paradigma de tipo mixto, combinando esquemas cualitativos y cuantitativos: por una parte se cuantifican las respuestas parcialmente correctas, las incorrectas y los diferentes tipos de errores cometidos, por la otra se analiza la naturaleza de los errores y sus efectos sobre la calidad de las respuestas. Los significados personales declarados (Godino, 2003) los representan los sistemas de prácticas discursivas o actuativas puestas en juego en las respuestas correctas e incorrectas, mientras que los errores y conflictos semióticos del aprendizaje se reflejan en las discordancias manifestadas entre estos significados y la referencia institucional. Los errores fueron de tipo conceptual, de operaciones básicas, de aplicación de fórmulas, de procedimiento y de simbología y nomenclatura. Finalmente, mediante la aplicación del análisis semiótico a la solución del cuestionario propuesto por el investigador, se identifican potenciales conflictos de significado; en el análisis semiótico practicado al cuestionario respondido por el estudiante que obtuvo la mayor calificación, destacan la ausencia de prácticas discursivas y las validativas se suponen implícitas en los procedimientos.

**Palabras y frases clave:** Significado personal, análisis semiótico, derivadas.

## Abstract

The problem approached in this investigation is centred in the characterization of the derivative's personal meanings in engineering students, on which are analyzed the errors, the difficulties and semiotics troubles presents in the process of teaching and learning of this

concept. It was part of an investigation work about the derivative's personal significates in engineering students, from which is considered the problem description standing out the importance of this notion for the Engineer in training process. The work is supported by the Semiotic Anthropology Model proposed for Godino y Batanero (1994) and used for Arrieche (2002) y Meléndez (2005), actually known as: focus ontosemiotic of cognition and mathematical instruction (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque and Ordonez, 2005). The method followed is a mixed paradigm, for the combination of qualitative and quantitative schemes: first are quantified the partially correct answers, the incorrects and the different error's types; on the other hand, is analyzed the error's nature and their effects on the answers quality. The declared personal significates (Godino, 2003) are represented by the discursive and active practices systems showed in the corrects and incorrects answers, whereas the errors and semiotic troubles of the learning be reflected in the discords between these meanings and the institutional reference. The errors was of conceptual type, of basic operations, of formula's application, of proceedings, of symbology and nomenclature. Finally, by application of semiotic analysis to questionnaire's answer proposed for the researcher, are identified potential meanings troubles; in the semiotic analysis practiced at the questionnaire answered for the student with bigger grade, are standed out the absence of discursive practices and the validates are supposed implicit in the proceedings.

**Key words and phrases:** Personal meaning, semiotic analysis, derivative's.

## 1 Introducción

Este trabajo está inserto en la línea de investigación perspectivas del enfoque semiótico antropológico para la didáctica de la matemática (Arrieche, 2003) y enmarcado en la faceta cognitiva de la investigación sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería, desarrollado en el programa de Maestría en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Rómulo Gallegos. Usamos la noción de significado en el sentido dado por Godino y Batanero (1994) como el sistema de prácticas (activas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Mediante la prueba de conocimientos aplicada se determina el significado personal declarado, Godino (2003), incluyendo respuestas correctas e incorrectas desde el punto de vista institucional. La discordancia existente entre los significados personales e institucionales constituye los errores y conflictos semióticos del aprendizaje, mientras el significado personal logrado es el que se corresponde con la referencia institucional. Este trabajo se compone del Planteamiento del problema, Antecedentes de la investigación, la Metodología, Análisis y discusión de los datos, las Conclusiones y las Referencias bibliográficas.

## 2 Planteamiento del Problema

La derivada es un objeto matemático de especial importancia para los estudiantes de Ingeniería, porque es una herramienta básica para la evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, como es el caso de análisis de rapidez de variación, optimización, análisis de curvas, etc. De allí la necesidad de proporcionar a los estudiantes de ingeniería la mayor solidez en conocimiento de las derivadas y sus aplicaciones. Al respecto, Meléndez (2003), señala que en el caso de los estudiantes de Ingeniería Agronómica en la Universidad Rómulo Gallegos, esta solidez de conocimientos se ve afectada por el bajo rendimiento académico

en las asignaturas Matemática I y Matemática II, en las que se ha registrado índices de aprobados alrededor del 11 %, junto con índices de deserción que superan el 50 % y una muy marcada repetición de los estudios.

La pregunta: ¿Cuáles son los significados personales que tienen los estudiantes de ingeniería, sobre las derivadas y sus aplicaciones?, es la que motiva esta investigación con el propósito de indagar sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes, los errores que cometen y que efectivamente aprenden sobre un tema que reviste especial importancia para ellos, así como las causas de los indicadores de resultado negativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En ese sentido, surgen otras preguntas específicas para tratar de dar respuesta a la pregunta inicial: de carácter epistémico: ¿Qué son las derivadas?, ¿Cuál es el origen de las derivadas?; de carácter cognitivo: ¿Qué dificultades, errores y obstáculos presentan los estudiantes de ingeniería en el estudio de las derivadas?, de carácter Instruccional: ¿Cómo se enseñan las derivadas a los estudiantes universitarios? En este trabajo se intentará responder a la pregunta de carácter cognitivo, mediante la aplicación de un cuestionario sobre aspectos fundamentales de las derivadas, a un grupo de 60 estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Universidad Rómulo Gallegos de San Juan de los Morros cursantes de Matemática II.

### 3 Antecedentes de la investigación

En este apartado se hace referencia a algunos trabajos realizados por investigadores en didáctica de la matemática, en los que se consideran obstáculos epistemológicos y conflictos semióticos que surgen durante el proceso de instruccional de la matemática, y de la derivada en particular.

Contreras de la Fuente (2000), en un trabajo sobre límites bajo perspectivas de los enfoques epistemológicos y semióticos, señala: *“las concepciones y obstáculos epistemológicos detectados a lo largo de la evolución histórica de los conceptos se repiten, con determinadas diferencias, como concepciones y obstáculos cognitivos en los sujetos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático”*.(p. 4) Los obstáculos epistemológicos son “barreras” que impiden o dificultan la consumación del acto de comprensión. A lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje se van superando estos obstáculos en la medida que se asciende en los niveles de comprensión, una vez que se va rompiendo con las anteriores y se da lugar a nuevas concepciones. *“El desarrollo del conocimiento no es acumulativo, es decir, cuando se pasa de un nivel de comprensión a otro se da simultáneamente una integración y una reorganización del conocimiento”*(Contreras de la Fuente, 2000).

Inglada y Font (2003), en un trabajo sobre significados institucionales y personales de la derivada analizan algunos conflictos semióticos relacionados con la notación  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ; uno de estos conflictos se fundamenta en el hecho que Leibnitz consideraba a  $dy$  como la diferencia infinitamente pequeña de dos ordenadas sucesivas y a  $dx$  como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores consecutivos de las abscisas, sin embargo, por temor a la crítica presentó al público un concepto diferencial muy diferente pero que cumplía las mismas reglas, el incremento infinitesimal.

Otro conflicto lo llaman *“La complejidad del paso de la derivada en un punto a la función derivada”*(p. 8). Plantean que en los libros de texto que se sometieron al análisis semiótico, los autores no son conscientes de esta dificultad o no le prestan la atención necesaria y, además, sostienen que determinados usos de la notación  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  pueden presentar más inconvenientes cuando se toma en cuenta la complejidad semiótica considerada en este punto. Finalmente, plantean los conflictos semióticos relacionados con la notación incremental y presentan un detalle del

entramado de funciones semióticas que debe activar el alumno para comprender la definición de derivada.

Hitt (2003), analiza las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo; sostiene que además de los problemas de entendimiento de los procesos infinitos, debe añadirse los derivados del mal aprendizaje de precálculo. Respecto a la derivada, menciona la dificultad para los estudiantes establecer representaciones visuales de los conceptos matemáticos, además de su resistencia a hacerlo. Pensar visualmente requiere de procesos cognitivos más profundos que pensar en forma algorítmica. Las comparaciones mediante cuadros de visualización y resolución de problemas, en los cuales se separan los sistemas algebraicos de representaciones, las ideas intuitivas y los sistemas geométricos de representaciones, identifican fallas cometidas por profesores pero también sostienen que utilizando la idea intuitiva se puede representar geoméricamente las condiciones de los problemas y lograr su solución mediante los procesos algebraicos; esto es un alerta para sugerir que los métodos tradicionales son insuficientes, si se quiere buenos estudiantes que hagan un uso creativo del cálculo.

## 4 Metodología

### 4.1 Enfoque Metodológico

La caracterización de los significados de los estudiantes sobre la derivada se lleva a cabo mediante la aplicación de una prueba de conocimientos cuyo análisis se realiza siguiendo un paradigma metodológico de tipo mixto, combinando esquemas cuantitativos y cualitativos (Goetz y Lecompte, 1988).

En este sentido, el enfoque cuantitativo se refiere a la determinación de cantidad de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas y tipos de errores manifestados por los estudiantes, con el correspondiente análisis estadístico; el enfoque cualitativo se desarrolla mediante la aplicación de la técnica del análisis semiótico (Godino y Arrieche, 2001) a las pruebas resueltas por dos estudiantes. A continuación describimos la técnica del análisis semiótico.

La técnica del “análisis semiótico” permite: *“caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática”* (Godino y Arrieche, 2001, p.1). Estos autores sostienen que mediante este análisis es posible identificar tanto los conflictos potenciales en la interpretación de los textos de estudio como aquellos que ocurren durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Godino (2002) indica que al comparar los significados institucionales atribuidos a un objeto matemático por dos instituciones o por una persona y un referente institucional, se pueden identificar conflictos semióticos entre esos agentes. Los conflictos semióticos están representados por las disparidades entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y provocan dificultades y limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Más adelante señala Godino (2002): *“Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas”*. En este caso, se aplica dicho análisis a la resolución realizada por el investigador a la prueba de evaluación de conocimientos sobre las derivadas, aplicada durante el desarrollo del curso de Matemática II, correspondiente al Lapso Académico comprendido entre los meses diciembre 2003 y Abril 2004.

Una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático propuesta por Godino y Arrieche (2001) es la siguiente: “unidades iniciales (apartados o secciones del

texto), unidades primarias (oraciones o sentencias), unidades elementales (términos y expresiones que designan cada una de las seis unidades elementales) y unidades secundarias (combinación de dos o más unidades primarias)". (p.2)

En cuanto al análisis aplicado a la prueba, las unidades iniciales son los ítems o problemas a resolver y las unidades elementales están ubicadas en el proceso de comunicación de la solución, y están representadas por el lenguaje, las situaciones, los actuativos, los conceptos, las propiedades y las argumentaciones, entidades propuestas en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

## 4.2 Población y Muestra

La población sobre la que se hace este estudio, la constituye los estudiantes del segundo semestre de Ingeniería Agronómica y la muestra, que fue tomada en el Área de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos, está conformada por 60 estudiantes que presentaron la prueba de conocimientos aplicada.

## 4.3 Instrumento aplicado

El instrumento utilizado para recoger los datos consistió en una prueba de conocimientos, aplicada a fin de evaluar qué significados atribuyen los estudiantes a las reglas de derivación de las funciones algebraicas y trascendentes más comunes, la regla de la cadena, la derivación aplicando logaritmos y la aplicación de la derivada en un punto de una función para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva. La prueba está constituida por cinco preguntas o ítems, cuya estructura y contenido se detalla continuación:

Ítem 1.- Determine  $f'(x)$  para:  $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \operatorname{Arcsec}(2x)$

Ítem 2.- Determine  $f'(x)$  para:  $f(x) = \frac{7^{3x}}{\operatorname{Arctan}(x)}$

Ítem 3.- Determine  $f'(x)$  para:  $f(x) = \csc^5(\sqrt{3x^4 - 2x + 12})$

Ítem 4.- Aplicando logaritmos determine  $f'(x)$  para:

$$f(x) = \frac{(2x^3 + 5x^2 - 6x + 9) e^x \sec(x)}{\tan(x) \log_4(x)}$$

Ítem 5.- Determine las ecuaciones de las rectas Tangente y Normal a:

$$f(x) = \arctan(2x) \quad \text{en} \quad x_0 = -1$$

El objetivo de esta prueba es evaluar que significados atribuyen los estudiantes a las reglas de derivación: producto de una constante por una función, suma algebraica, producto y cociente de funciones, así como de las derivadas de las funciones algebraicas y trascendentes más comunes, la regla de la cadena, la derivación aplicando logaritmos y la aplicación de la derivada en un punto de una función para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva.

En este trabajo se hace referencia a los resultados correspondientes al ítem N° 1; por lo tanto, el lector interesado en la totalidad de los resultados o de algunos de los ítems en particular, deberá consultar a Meléndez (2005). En el ítem 1 se evalúa la derivada de: producto de una



constante por una función, de la suma algebraica de funciones potencia (polinómicas), de una constante, del producto de dos funciones, de una función trigonométrica inversa y de la regla de la cadena.

La respuesta se considera correcta cuando el estudiante:

1. Aplica la fórmula de la derivada a un producto de funciones
2. Obtiene la derivada de la función polinómica propuesta
3. Obtiene la derivada de la función trigonométrica propuesta
4. Aplica la regla de la cadena para derivar una función compuesta
5. Hace las reducciones correspondientes

Las fórmulas que se debe aplicar para resolver esta pregunta, considerando que  $k$  es una constante, que  $u$  es función de  $x$  y que  $f'$  o  $u'$  es la derivada de una función con respecto a  $x$ , son las siguientes:

$$(k)' = 0; \quad (x)' = 1; \quad (ku)' = ku'; \quad (u^n)' = nu^{n-1}u';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad (\text{Arcsec}(u))' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

Respuesta correcta tipo:

Para obtener la derivada de  $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \text{Arcsec}(2x)$ , se debe identificar la operación producto de funciones y aplicar la fórmula:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)' \text{Arcsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) (\text{Arcsec}(2x))'$$

Luego se derivan las funciones  $u = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)$  y  $v = \text{Arcsec}(2x)$ ; como el argumento de  $v$  es también una función, se debe aplicar la regla de la cadena a una función compuesta:

$$v = h \circ g = h[g(x)]; \quad v' = (h[g(x)])' = (h'(g))g'(x) \implies (\text{Arcsec}(u))' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \text{Arcsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \frac{(2x)'}{2x\sqrt{(2x)^2 - 1}}$$

Se deriva el argumento de la función arcosecante y se hacen las simplificaciones correspondientes, hasta obtener el resultado final.

$$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \text{Arcsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \frac{2}{x\sqrt{(2x)^2 - 1}}$$

Resultado final:

$$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \text{Arcsec}(2x) + \frac{3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8}{x\sqrt{(2x)^2 - 1}}$$

## 5 Análisis y discusión de los datos

Se quiere determinar los significados personales de los estudiantes de Ingeniería sobre las derivadas, haciendo el análisis de los resultados generales de la prueba de conocimientos mediante tablas de frecuencia y porcentajes de las diferentes respuestas obtenidas y, la interpretación de los mismos.

En tal sentido se han establecido tres categorías de respuesta, de acuerdo con el esquema siguiente:

- *Respuesta correcta*: Si el estudiante dio respuesta a todo lo solicitado, sin cometer errores.
- *Respuesta parcialmente correcta*: Si el estudiante respondió parcialmente o totalmente la pregunta y cometió errores; sin embargo, algunos o la mayoría de los conceptos preestablecidos como respuesta correcta fueron satisfechos.
- *Respuesta incorrecta*: Cuando el estudiante no dio respuesta alguna o inició y/o desarrolló un procedimiento para resolver la pregunta pero sin satisfacer ninguno de los conceptos que caracterizan a la respuesta como correcta.

Por otra parte, se clasifican los errores que cometen los estudiantes de la manera siguiente:

- *Conflictos semióticos conceptuales*: Cuando el estudiante desconoce o ha interpretado mal tanto la noción que está aplicando como las operaciones básicas.
- *Conflictos semióticos proposicional*: Cuando el estudiante desconoce o interpreta mal una propiedad.
- *Conflictos semióticos procedimentales*: El estudiante conoce los conceptos y las propiedades pero se equivoca al aplicarlos.
- *Conflictos semióticos lingüístico*: Cuando el estudiante no usa o hace mal uso de la notación y/o nomenclatura.

### 5.1 Resultados generales de la prueba y análisis de errores

Los resultados de la prueba son expresados mediante el análisis a las respuestas parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes en primer lugar, y luego la clasificación de los errores cometidos por los estudiantes. En cada caso se hace una transcripción textual de lo que el estudiante escribió y los comentarios a que haya lugar. Para el Ítem 1 los resultados fueron los siguientes:

Ítem 1: Determine la derivada de  $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \operatorname{Arcsec}(2x)$ .

Se considera parcialmente correcta si el estudiante aplica bien la propiedad de la derivada de un producto pero comete errores de signos u operaciones elementales en la derivada del polinomio, o en la aplicación de la regla de la cadena al equivocarse en la derivada interna de la función trigonométrica planteada. Algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes, son los siguientes:

**Respuestas parcialmente correctas:**

**Alumno 09:**

$$"f'(x) = 12x^3 + 10x^{-6} + 10\operatorname{Arcsec}(2x) + \frac{1}{2x\sqrt{2x^2 - 1}}(3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)"$$

El estudiante no aplica la regla de la cadena a la derivada de  $\text{Arcsec}(2x)$  al no multiplicar por 2, derivada del argumento; omite el signo negativo a  $10x^{-6}$ , no usa los paréntesis para separar las funciones polinómicas como factores multiplicativos y asume que  $2x^2 = (2x)^2$ .

**Alumno 17:**

$$“f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \text{Arcsec}(2x) + \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 1}}(2) (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)”$$

El estudiante no usa bien la fórmula de la derivada de  $\text{Arcsec}(2x)$  al omitir el factor 2x en el denominador.

**Alumno 24:**

$$“f'(x) = 12x^3 - 10x^{-6} + 10\text{Arcsec}(2x) + \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8”$$

El estudiante no aplica la regla de la cadena en la derivada de  $\text{Arcsec}(2x)$ , aparentemente usó la fórmula para derivar  $\text{Arcsec}(x)$ .

**Alumno 44:**

$$“f'(x) = (12x^3 - 10x^{-4} + 10) \text{Arcsec}(2x) + \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 + 1}} (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) (2)”$$

En la derivada de  $-2x^{-5}$  equivoca el exponente a colocar  $10x^{-4}$  y en la derivada de  $\text{Arcsec}(2x)$  cambia el signo del 1 en el radical.

**Respuestas incorrectas:**

**Alumno 15:**

$$“f'(x) = (12x^3 + 10x^2 + 10) \left( \frac{2}{x\sqrt{(x)^2 + 1}} \right)”$$

No aplica la fórmula de la derivada del producto de funciones y no deriva bien ninguna de las funciones propuestas.

**Alumno 42:**

$$“f'(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)' (\text{Arcsec}(2x))'”$$

$$f'(x) = (3x^4 + 2x^5 + 10x - 8) \frac{2x \ln_a(2)}{\sqrt{3x^4 - 2x^{-5} - 10}}”$$

No aplica bien la fórmula para derivar el producto de funciones y no deriva bien ninguna de las funciones.

**Cuadro 1. Estadística de respuestas. Ítem 1**

Incorrectas		Parcialmente Correctas		Correctas		Respuestas en blanco		
Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	% respecto a las Incorrectas	% del total
21	35	33	55	6	10	1	4,76	1,67
Total de respuestas				60	100 %			

Frec.: Frecuencia

Sólo 6 estudiantes (10 %) respondieron correctamente la pregunta lo cual indica un alto nivel de dificultad; 33 estudiantes (55 %) manifestaron tener alguna noción del concepto evaluado. (Cuadro 1)

Cuadro 2. Errores cometidos por los estudiantes. Ítem 1									
Conceptuales		Operaciones Básicas		Aplicación de fórmulas		Procedimiento		Simbología y nomenclatura	
Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
23	32.86	8	11.43	20	28.57	3	4.29	16	22.86
Total de errores registrados:				70					

Frec.: Frecuencia

La mayoría de los errores cometidos son conceptuales (32,86 %) y de aplicación de fórmulas (28,57), no identifican la operación producto a derivar, aplican fórmulas no correspondientes o no aplican bien la regla de la cadena. Se remite al lector interesado a Meléndez (2005) en donde se hace un análisis detallado y pormenorizado de toda la prueba.

## 5.2 Análisis Semiótico de la Prueba

Se definieron los aspectos para calificar una respuesta como correcta, parcialmente correcta o incorrecta; el investigador desarrolla y explica su visión sobre cuál debe ser la respuesta correcta a cada ítem; esto constituye un significado institucional de referencia (Godino, 2003), a partir del cual se identificarán los errores y conflictos semióticos producto de las discordancias con el significado personal logrado de los estudiantes. El análisis semiótico se desarrolla en tres fases: exposición del texto y unidades primarias de análisis, identificación de las componentes y unidades elementales y la identificación de los conocimientos puestos en juego y conflictos semióticos potenciales. Los detalles debe consultarlos el lector interesado, en Meléndez (2005), para indagar sobre la totalidad de los resultados del análisis.

A continuación, a manera de ejemplo, presentamos el desarrollo del análisis realizado al ítem 1:

**Ítem 1. Derivar la función:**  $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \text{Arcsec}(2x)$

Texto y unidades primarias del análisis:

1.1	Para obtener la <i>derivada</i> de $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \text{Arcsec}(2x)$ , se debe identificar la operación <i>producto de funciones</i> y aplicar la fórmula: $(uv)' = u'v + uv'$
1.2	$f'(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)' \text{Arcsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) (\text{Arcsec}(2x))'$
1.3	Luego se derivan las funciones $u = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)$ y $v = \text{Arcsec}(2x)$ ; como el argumento de $v$ es también una <i>función</i> , se debe aplicar la <i>regla de la cadena</i> a una <i>función compuesta</i> : $v = h \circ g = h[g(x)]; \quad v' = (h[g(x)])' = (h'(g))g'(x) \implies (\text{Arcsec}(u))' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

1.4	$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \operatorname{Arcsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \frac{(2x)'}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}$
1.5	Se <i>deriva</i> el <i>argumento</i> de la <i>función arcosecante</i> y se hacen las <i>simplificaciones</i> correspondientes, hasta obtener el resultado final.
1.6	$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \operatorname{Arcsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \frac{2}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}$
1.7	Resultado final : $f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \operatorname{Arcsec}(2x) + \frac{3x^4+2x^{-5}+10x-8}{x\sqrt{(2x)^2-1}}$

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones: Problema de aplicación de la derivada del producto de una función polinómica y una función trigonométrica. Técnicas: Derivación, aplicación de la regla de la cadena, simplificación.	Términos y expresiones: Derivar, producto de funciones, función, argumento, regla de la cadena, simplificaciones, arcosecante. Notaciones: $f(x) x^n$	Conceptos: Derivada, función, función compuesta, regla de la cadena, arcosecante. Propiedades: El argumento es una función. Reglas para derivar funciones y regla de la cadena. Validaciones: Justificación de cada operación y del resultado.

Conocimientos y conflictos semióticos:

1. 1 Se condiciona la aplicación de la derivada, a la identificación de la operación producto, propia del álgebra de funciones, y supone como conocido el término función. La no identificación de la operación o la no interpretación de la fórmula, constituyen conflictos semióticos potenciales.
1. 2 Se han puesto en juego la fórmula para derivar un producto y elementos notacionales; la expresión indica la forma de aplicación de la fórmula y los conflictos semióticos ocurrirían con la identificación de las funciones, las operaciones relacionadas con la aplicación de la derivada de un producto y las fórmulas que se deben aplicar.
1. 3 Se considera necesario conocer el concepto de *argumento*, así como la interpretación del significado y aplicación de la regla de la cadena para relacionar al argumento con la función compuesta y su derivada; de allí surgirían los posibles conflictos semióticos.
1. 4 Se señala la forma general de una función compuesta, su derivada y la derivada de la función arcosecante; podrían surgir conflictos semióticos por incomprensión de la notación.
1. 5 Se ha aplicado la derivada a las funciones polinómica y arcosecante, sólo queda por derivar al argumento  $2x$ . Los conflictos semióticos podrían ubicarse en el manejo de los

exponentes y sus signos, así como en la identificación del argumento o la no adecuada aplicación de la regla de la cadena.

1. 6 Se señala la última derivada que falta por obtener, la del argumento de la función arcosecante; supone conocida la técnica de simplificación de expresiones algebraicas. Conflictos semióticos potenciales los representan la interpretación de la técnica de la simplificación.
1. 7 Se señala qué se debe simplificar. Conflictos semióticos ocurren cuando se simplifica la  $x$  externa a la raíz del denominador, con las  $x$  del polinomio en el numerador o algo similar.
1. 8 Se muestra el resultado final. Cualquier operación que se haga a partir de este nivel, podría generar errores a consecuencia de conflictos semióticos.

## 6 Conclusiones

Se determinó que la prueba resultó bastante difícil, puesto que de 60 estudiantes evaluados, sólo 4 aprobaron y, además, la nota promedio fue de 3 puntos, en una escala del 1 al 10. El análisis realizado a los errores cometidos por los estudiantes en la prueba, permitió detectar que la mayoría de errores fueron de tipo conceptual y de aplicación de fórmulas. La importancia de este análisis radica en que la identificación de los errores, que trae consigo la detección de conflictos semióticos y de obstáculos epistemológicos, nos permite establecer una sistematización de los mismos, identificar qué los produce, cuál es su origen, cómo pueden solucionarse o cómo pueden evitarse, etc., lo que podría ofrecer una oportunidad para desarrollar estrategias conducentes a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada como tema particular, y de la Matemática en todos los sentidos.

Se aplicó el análisis semiótico a la solución de la prueba planteada para establecer un significado institucional de referencia (Godino, 2003) y se identificaron los potenciales conflictos semióticos y obstáculos epistemológicos que podrían presentarse durante el intercambio profesor-alumno para desarrollar el tema en cuestión. Como un ejemplo de los posibles conflictos semióticos detectados tenemos la no identificación de la operación o la no interpretación de la fórmula, la identificación de las funciones, las operaciones relacionadas con la aplicación de la derivada de un producto y las fórmulas que se deben aplicar.

## Referencias

- [1] Arrieche, M. *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*, Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada. 2002.
- [2] Arrieche, M. *Línea de investigación perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de la matemática*, *Paradigma*, **24**(2) (2003), 151–160.
- [3] Contreras de la Fuente, A. *La enseñanza del Análisis matemático en el bachillerato y primer curso de la universidad. Perspectiva desde los enfoques epistemológico y semiótico*, Actas de las XVI Jornadas del SI-IDM. Huelva. 2000.
- [4] Contreras de la Fuente, A. *El límite en el bachillerato y primer curso de la universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión*.

- Actas del IV Simposio de la SEIEM. Huesca. Disponible: [http://www.ugr.es/local/seiem/IV\\_Simposio.htm](http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm). 2001.
- [5] Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. *Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal*. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **25**(2) (2005), 151-186.
- [6] Godino, J. y Batanero, C. *Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos*. *Recherches en didactique des Mathématiques*, **14**(3) (1994), 325-355.
- [7] Godino, J.D. y Arrieche, M. *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería. 2001.
- [8] Godino, J. *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: <http://www.ugr.es/local/jgodino/> 2002.
- [9] Godino, J. *Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas*, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: <http://www.ugr.es/local/jgodino/> 2003.
- [10] Goetz, J, y Lecompte, M. *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*, Morata, Madrid, 1988.
- [11] Hitt, F. *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*, XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia. Disponible:[http://www.hemerodigital\\_unam.mx/](http://www.hemerodigital_unam.mx/) 2003.
- [12] Meléndez, A. *Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería*, Tesis de Maestría. Universidad Rómulo Gallegos. San Juan de los Morros. Venezuela. 2005.

# Problemas y Soluciones

## *Problems and Solutions*

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)  
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias  
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en  $\text{\LaTeX}$ ). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

*Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a  $\text{\LaTeX}$  source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.*

## 1 Problemas propuestos

Varios de los problemas propuestos a lo largo de los últimos años han quedado sin resolver hasta el día de hoy, a saber: 24–28, 44, 51, 54, 59, 61–63, 65–66, 68–69, 72–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–137. En los números siguientes se tratará de llenar ese vacío, publicando más soluciones que problemas nuevos. En ese sentido invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para los problemas mencionados en la lista anterior.

138. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.)*

Let  $m, n \geq 1$  be two natural numbers. Calculate

$$\int_0^1 \left\{ \frac{m}{nx} \right\} dx,$$

where  $\{a\} = a - [a]$  denotes the fractional part of  $a$ .

## 2 Soluciones

11. [6(1) (1998) p. 81, propuesto por el editor.]

Dados tres enteros  $r$ ,  $s$  y  $t$  mayores que 1, ¿existirá siempre un grupo finito con dos elementos  $x$  e  $y$  tales que los órdenes de  $x$ ,  $y$  y  $xy$  sean  $r$ ,  $s$  y  $t$  respectivamente?

*Solución del autor.* La respuesta es que sí. Tomemos dos enteros  $n$  y  $k$  tales que  $n \geq r \geq k > 0$ . Sea  $x$  el  $r$ -ciclo  $(1, 2, \dots, r)$  en el grupo simétrico  $G = S_n$ . Sea  $y$  el  $(n - r + k)$ -ciclo



$(k, k-1, \dots, 2, 1, r+1, r+2, \dots, n)$ . Entonces la composición (de izquierda a derecha)  $xy$  es el  $(n-k+1)$ -ciclo  $(k, k+1, \dots, r, \dots, n)$ . Es claro que si conseguimos escoger  $n$  y  $k$  tales que  $n-r+k = s$  y  $n-k+1 = t$  entonces está listo. La solución de este sistema es  $n = (r+s+t-1)/2$ ,  $k = (r+s-t+1)/2$ . Así hemos hallado una solución para las instancias del problema con  $r+s+t$  impar y  $r+s > t$ . La última restricción se elimina fácilmente como sigue: si  $r+s \leq t$  entonces  $s+t > r$ , así se pueden hallar permutaciones  $y, z$  tales que  $o(y) = s$ ,  $o(z) = t$  y  $o(yz) = r$ . Pongamos  $x = (yz)^{-1} = (z^{-1})(y^{-1})$ . Entonces  $o(x) = o(yz) = r$  y  $o(xy) = o(z^{-1}) = o(z) = t$ .

Si  $r+s+t$  es par consideraremos cuatro subcasos:

(a)  $r$  par y  $r+s > t$ .

Pongamos  $x = (1, 2, \dots, k, k+1, \dots, r) (r+1, r+2)$  y  $y = (k, k-1, \dots, 2, 1, r+1, r+2, \dots, n)$ . Obviamente  $o(x) = r$  y  $o(y) = n-r+k$ . Notemos que  $1, 2, \dots, k-1$  y  $r+2$  permanecen fijos bajo la composición (de izquierda a derecha) de  $x$  e  $y$ , así  $xy = (k, k+1, \dots, r, r+1, r+3, \dots, n)$  y  $o(xy) = n-k$ . Ahora escojamos  $n = (r+s+t)/2$  y  $k = (r+s-t)/2$  para obtener  $o(y) = s$  y  $o(xy) = t$ .

(b)  $r$  par y  $r+s \leq t$ .

En este caso  $r+t > s$  y por (a) hay permutaciones  $w$  y  $z$  tales que  $o(w) = r$ ,  $o(z) = t$  y  $o(wz) = s$ . Pongamos  $x = w^{-1}$ ,  $y = wz$  y listo.

(c)  $s$  par.

Por los casos (a) y (b) hay permutaciones  $y, z$  tales que  $o(y) = s$ ,  $o(z) = t$  y  $o(yz) = r$ . Poniendo  $x = (yz)^{-1}$  se tiene  $o(x) = o(yz) = r$  y  $o(xy) = o(z^{-1}) = o(z) = t$ .

(d)  $t$  par.

En este caso por (b) hay permutaciones  $y, z$  tales que  $o(y) = s$ ,  $o(z) = t$  y  $o(yz) = r$ . Poniendo  $x = (yz)^{-1}$  se tiene  $o(x) = o(yz) = r$ ,  $o(xy) = o(z^{-1}) = o(z) = t$ .

22. [8(1) (2000) p. 88.]

Sean  $n$  puntos distintos,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , sobre una recta del plano ( $n \geq 2$ ). Se consideran las circunferencias de diámetro  $P_iP_j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) y coloreamos cada circunferencia con uno de  $k$  colores dados. Llamamos  $(n, k)$ -nube a esta configuración.

Para cada entero positivo  $k$ , determine todos los  $n$  para los cuales se verifica que toda  $(n, k)$ -nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color,

Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

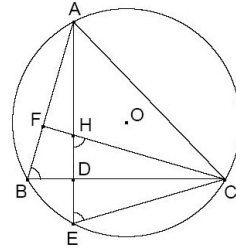
*Solución del editor.* La respuesta es  $n > 2^k$ . En otras palabras, con  $k$  colores se pueden colorear todas las circunferencias de una nube de manera aceptable (es decir de modo que circunferencias tangentes exteriormente sean de distinto color) hasta para  $n = 2^k$ , pero no más. La prueba es por inducción. Si  $k = 1$  el resultado es obvio. Si asumimos que es cierto para  $k$ , entonces la nube con  $2^{k+1}$  puntos se colorea así: primero se colorean de manera aceptable con los colores  $1, \dots, k$  las circunferencias con diámetros  $P_iP_j$  para  $1 \leq i < j \leq 2^k$ . Lo mismo se hace con las circunferencias con diámetros  $P_iP_j$  para  $2^k + 1 \leq i < j \leq 2^{k+1}$ . Finalmente las circunferencias con diámetros  $P_iP_j$  tales que  $i \leq 2^k < j$  se colorean con

el color  $k + 1$ , y listo. Ahora bien, si para algún  $n > k$  la nube se puede colorear con  $k$  colores, consideremos el conjunto  $A$  de los puntos  $P_i$  que son extremo izquierdo (i.e., el más cercano a  $P_1$ ) de un diámetro de una circunferencia de color  $k$ , y sea  $B$  su complemento en  $\{P_1, \dots, P_n\}$ . Las circunferencias con dos puntos en  $A$  no pueden ser de color  $k$ , como tampoco pueden serlo las que tienen dos puntos en  $B$ . Pero uno de estos dos conjuntos debe tener más de  $2^{k-1}$  puntos, y se contradice la hipótesis inductiva.

92. [12(2) (2004) p. 183, propuesto por Francisco J. García Capitán, Córdoba, España.]

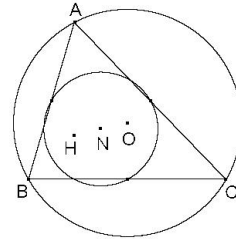
Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos que tienen un ortocentro dado y están inscritos en una circunferencia dada es otra circunferencia.

*Solución del autor.* En la figura hemos trazado el triángulo  $ABC$  y sus alturas  $AD$  y  $CF$  que se cortan en el ortocentro  $H$ . La prolongación de  $AD$  corta en  $E$  a la circunferencia circunscrita. Pues bien, el triángulo  $CEH$  es isósceles. En efecto,  $\angle AEC = \angle ABC$ , ya que ambos son ángulos inscritos que abarcan el mismo ángulo. Por otro lado, los triángulos rectángulos  $BFC$  y  $HDC$  son semejantes, ya que tienen un ángulo común.



Por tanto, es  $\angle ABC = \angle FBC = \angle DHC$  y deducimos que  $\angle DEC = \angle DHC$  y que  $CEH$  es isósceles. Por ser  $CEH$  isósceles, la recta  $BC$  es la mediatriz de  $EH$ , de manera que si del triángulo  $ABC$  conocemos solo el ortocentro  $H$ , la circunferencia circunscrita y el vértice  $A$  sobre ella podemos hallar fácilmente los otros dos vértices.

Por los tres puntos medios de los lados del triángulo así construido pasará la circunferencia de los nueve puntos de dicho triángulo, cuyo centro  $N$  sabemos que está en el punto medio de  $H$  y  $O$ , y cuyo radio  $r$  es la mitad del radio  $R$  de la circunferencia circunscrita. Pero al ser fijos  $O$ ,  $H$  y  $R$  también lo son  $N$  y  $r$ , por lo que todos los puntos medios de los triángulos estarán en una misma circunferencia.

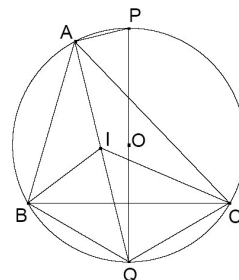


93. [12(2) (2004) p. 183, propuesto por Francisco J. García Capitán, Córdoba, España y Ricardo Barroso Campos, Universidad de Sevilla, España.]

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos que tienen un incentro dado y están inscritos en una circunferencia dada?

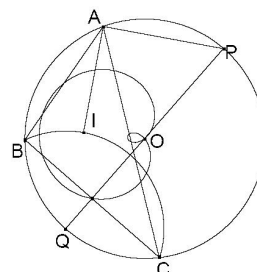
*Solución de los autores.* Sabemos que el ortocentro  $H$ , el baricentro  $G$  y el circuncentro  $O$  son puntos alineados, cumpliéndose además que  $HG : GO = 2 : 1$ , por lo que si el baricentro y el circuncentro fueran fijos, también lo sería el ortocentro, reduciéndose el problema al caso ya resuelto. Observemos para empezar que, con las condiciones del problema, la circunferencia inscrita al triángulo es fija en posición, ya que  $I$  es fijo, y también en tamaño, en virtud de la relación  $OI^2 = R^2 - 2Rr$  (fórmula de Euler), siendo aquí  $R$  y  $r$  los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.

Consideremos la figura de la derecha. En ella hemos trazado un triángulo  $ABC$  y su circunferencia circunscrita con centro  $O$ . También vemos el incentro  $I$  y las bisectrices  $AI$ ,  $BI$ ,  $CI$ . La prolongación de  $AI$  corta a la circunferencia circunscrita en  $Q$ , punto medio del arco  $BC$ , ya que los ángulos  $BAQ$  y  $QAC$  son iguales. Entonces, al trazar el diámetro  $PQ$ , resultará que el ángulo  $PAQ$  es recto, y  $PQ$  será la mediatriz del lado  $BC$ .

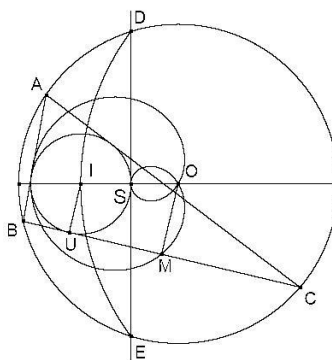


Razonemos ahora que el triángulo  $QBI$  es isósceles, con  $QB = QI$ . Llamemos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  a las mitades de los ángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Entonces  $\angle IBC = \beta$  y  $\angle CBQ = \alpha$ , así que  $\angle IBQ = \alpha + \beta$ . Por otro lado, también es  $\angle BIQ = \alpha + \beta$ , por ser  $\angle IBA = \beta$  y  $\angle BAI = \alpha$ . Razonando de forma parecida concluimos que  $QI = QC$  y por tanto  $B$  y  $C$  están en la circunferencia de centro  $Q$  y radio  $QI$ . Con todo lo expuesto, si del triángulo  $ABC$  sólo nos son dados el incentro  $I$ , la circunferencia circunscrita, con centro  $O$ , y el vértice  $A$  sobre ella, para determinar  $B$  y  $C$  bastará trazar a  $IA$  una perpendicular por  $A$ , que cortará en  $P$  a la circunferencia circunscrita. Uniendo  $P$  con  $O$  podremos obtener el punto  $Q$  y, finalmente, trazando una circunferencia con centro  $Q$  y radio  $QI$ , podremos determinar los puntos  $B$  y  $C$  como intersección de dicha circunferencia con la circunferencia circunscrita dada.

Ahora, podemos usar la orden LUGAR GEOMÉTRICO de *Cabri-Géomètre* sobre el punto medio de uno los lados del triángulo para encontrar el lugar geométrico buscado. El lugar geométrico encontrado se llama *caracol de Pascal* (limaçon de Pascal). Este caracol de Pascal es la curva pedal de la circunferencia inscrita al  $ABC$ , respecto del circuncentro  $O$ . Para hallar la curva pedal de una curva cualquiera respecto de un punto  $O$ , se traza la recta tangente a la curva por cualquier punto  $U$  y se considera en ésta el punto  $M$  tal que  $OM$  es perpendicular a  $MU$ .



Como vemos en la figura siguiente, cada recta tangente a la circunferencia de centro  $I$  corresponde a un lado de un triángulo que tiene a dicha circunferencia como circunferencia inscrita.



Es claro en este caso que  $OM$  es perpendicular a  $MU$  (el lado  $BC$  es una cuerda de la que  $M$

es su punto medio). Si asignamos coordenadas de manera que el circuncentro es  $O = (0, 0)$  y el incentro es  $I = (-a, 0)$ , puede comprobarse que la ecuación del lugar geométrico es

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = r^2(x^2 + y^2),$$

cumpliendo  $r$  que  $a^2 = R^2 + 2Rr$ .

# Guía para los Autores

**Divulgaciones Matemáticas** es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atrayente y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

**Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

**Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

**Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

# Guide for Authors

**Divulgaciones Matemáticas** is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Thankful (optional), and References (use the style exemplified in the template).

**Identification.** This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

**Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

**Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL PROCESS ONLY ARTICLES THAT HOLD ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 17, No. 1  
Se terminó de editar en marzo del 2016  
en el Departamento de Matemática (DEMAT)  
Maracaibo - Venezuela.

**La Universidad del Zulia**

**AUTORIDADES**

Jorge Palencia  
**Rector**

Judith Aular de Durán  
**Vicerrectora Académica**

Marlene Primera  
**Vicerrectora Administrativa**

**Facultad Experimental de Ciencias**

Merlin Rosales  
**Decano**

Vinicio Ríos  
**Director del Departamento de Matemáticas**