CIENCIA 19(2), 126 - 135, 2011
Maracaibo, Venezuela

Operadores tipo Laplace-Beltramí sobre el elipsoide n-dimensional E_n

Jorge Guíñez, Robert Quintero, Jhonny Araque, Nithal El Mejmissani y Oscar León*

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA), Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia Maracaibo 4002A, Venezuela.

Recibido: 11-11-09 Aceptado: 22-03-11

Resumen

En este trabajo introducimos un par de estructuras riemannianas, a y b, sobre el elipsoide n-dimensional E_n, lo que nos permite definir los operadores *gradiente* ∇_a y *divergencia* div_b así como el operador de Laplace-Beltramí $\Delta_{ab} = div_b(\nabla_a)$. Estos operadores pueden ser interpretados como deformaciones de los correspondientes a la esfera n-dimensional con la estructura riemanniana usual. Para casos especiales resolvemos la ecuación de Poisson $\Delta_{ab}(u) = f$ y en situaciones particulares, obtenemos un operador $\tilde{\Delta}$ sobre E_n cuyas funciones propias son polinomiales.

Palabras clave: estructuras riemannianas, operador de Laplace-Beltramí, elemento de volumen riemanniano, operadores auto-adjunto.

Operators tipe Laplace-Beltrami on the n-dimentional ellipsoid E_n

Abstract

In this paper we introduce a pair of Riemannian structures, a and b, on the n-dimensional ellipsoid E_n, this let us define the *gradient* ∇_a and *divergence* $div_b\nabla$ operators, as the Laplace-Beltrami operator $\Delta_{ab} = div_b(\nabla_a)$. These operators can be interpreted as deformations of the corresponding to the n-dimensional sphere with the usual Riemannian structure. For special cases we solve the Poisson equation $\Delta_{ab} = f$ and in particular situations, we get an operator $\tilde{\Delta}$ sobre E_n which proper functions are polynomial functions.

Key words: Riemannian structures, Laplace-Beltrami operator, Riemannian volume element, self-adjoint operator.

Introducción

Consideremos el elipsoide n-dimensional

$$E_n = \left\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 = 1\right\}$$

donde: $a_1,\ldots,a_{n+1}$ son números reales positivos. E_n es una subvariedad riemanniana para cada estructura de Riemann de una vecindad Ω de E_n en $\mathbb{R}^{n+1}$.

El principal objetivo de este trabajo es construir un operador tipo Laplace-Beltramí sobre el elipsoide E_n cuyas funciones propias sean funciones polinomiales, como

* Autor para la correspondencia: quintero-r@hotmail.com

sucede en el caso de la esfera S_n (1). Para ello, nos interesa, en este artículo, denotar por:

$$e(x) = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2, \qquad [1]$$

$$\vec{r}(x) = \frac{1}{2}\nabla e(x) = \left(\frac{x_1}{a_1^2}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{a_{n+1}^2}\right), \qquad [2]$$

$$r = \|\vec{r}(x)\| = \sqrt{\left(\frac{x_1}{a_1^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}^2}\right)^2}, \qquad [3]$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Obsérvese que el vector $\vec{r}(x)$ es un vector normal a E_n para la estructura de Riemann usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. También lo es para estructuras riemannianas que provienen de un producto escalar de la forma

$$(x, y)_a = a(z)\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad [4]$$

siendo a una función positiva y diferenciable en una vecindad de E_n. El número r en [3] es la norma de $\vec{r}(x)$ para el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^{n+1}$.

El trabajo se ha estructurado de la siguiente manera; primero probamos que E_n es una variedad radical y damos los conceptos de *campos tangentes* a E_n y *campos extensiones normales* de un campo tangente a E_n. Se obtienen algunos resultados relacionados con estas definiciones. Luego para una estructura riemanniana a sobre E_n heredada de un producto escalar definido en $\mathbb{R}^{n+1}$, ver [4], se obtienen fórmulas explícitas para los operadores gradiente (∇_a^E) y divergencia (div_a^E) sobre E_n, así podemos definir el operador de Laplace-Beltramí asociado. Estos operadores se pueden interpretar como deformaciones de los correspondientes operadores en la esfera S_n para la estructura riemanniana usual heredada de $\mathbb{R}^{n+1}$. Guíñez en 2002 muestra las fórmulas explícitas (1). Mostramos algunos ejemplos y se observa que el operador de Laplace-Beltramí no transforma, en general, polinomios en polinomios. Ahora, para dos estructuras riemannianas paralelas, a y b, sobre E_n y se define un operador tipo Laplace-Beltramí, $\Delta_{a,b}(f) = div_a^E(\nabla_a^E)$, que para casos particulares de a y b nos permite obtener un operador $\tilde{\Delta}$ el cual deja invariante al conjunto de los polinomios de grado k sobre E_n. Finalmente se prueba que existe una base ortogonal del espacio $L_{2,b}(E_n)$ (de todas las funciones de cuadrado integrable sobre E_n con la estructura riemanniana b) formada por funciones propias polinomiales de $\tilde{\Delta}$.

Funciones polinomiales y campos polinomiales en E_n

Sea $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ el álgebra de las funciones polinomiales en las variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Denotemos por: $C_p^\infty(E_n)$ al conjunto de funciones definidas sobre E_n por restricciones de elementos de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. $C_p^\infty(E_n)$ es, entonces, el cociente de $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ respecto el ideal de las funciones polinomiales nulas en E_n. Tenemos así el siguiente resultado:

Lema 1

E_n es una variedad radical. Esto es, si $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ con $p(x) = 0, \forall x \in E_n$, entonces, existe $q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ tal que $p(x) = q(x)[e(x) - 1], \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Prueba. Para $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ de grado k podemos escribir

$$p(x) = p_1(x_1) = \sum_{i=1}^{k} A_i x_1^i \quad \text{y}$$

$$e(x) - 1 = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 - 1 = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - A,$$

donde los A_i y $A \in \mathbb{R}[x_2, \ldots, x_{n+1}]$.

Aplicando el algoritmo de la división de polinomios en la variable x_1 resulta que:

$$p_1(x_1) = \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - A\right] q_1(x_1) + Px_1 + Q, \qquad [5]$$

donde, P y $Q \in \mathbb{R}[x_2,\ldots,x_{n+1}]$. De allí obtenemos

$$p(x) = \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - A\right] q_1(x_1) + Px_1 + Q, \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}. \qquad [6]$$

Así que:

$$p(x)Px_1 = \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - A\right] q_1(x_1)Px_1 + (Px_1)^2 + QPx_1 \qquad [7]$$

$$p(x)Q = \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - A\right] q_1(x_1)Q + Px_1Q + Q^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}. \qquad [8]$$

Integrando ambos miembros de la ecuación [8] sobre E_n obtenemos:

$$\int_{E_n} Px_1Q ds + \int_{E_n} Q^2 ds = 0$$

y como $\int_{E_n} Px_1Q ds = 0$, por simetría, resulta que $\int_{E_n} Q^2 ds = 0$, con lo cual $Q(x_2,\ldots,x_{n+1}) = 0$, $\forall (x_1, x_2,\ldots,x_{n+1}) \in E_n$. De allí que $Q(x_2,\ldots,x_{n+1}) = 0$ en el abierto

$$\Omega = \left\{(x_2,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 \leq 1\right\}$$

de modo que Q es un polinomio nulo.

Si se integra la ecuación [7] sobre E_n, resulta $\int_{E_n} (Px_1)^2 ds = 0$ y por lo tanto $Px_1 = 0$, $\forall (x_1, x_2,\ldots,x_{n+1}) \in E_n$. Así, $P = 0$, $\forall (x_1, x_2,\ldots,x_{n+1}) \in E_n$, con $x_1 \neq 0$.

Se deduce entonces, pasando al límite, que $P = 0$ en E_n. En estas condiciones, el mismo argumento aplicado al polinomio Q muestra también que P es un polinomio nulo en $\mathbb{R}^{n+1}$. De allí que:

$$p(x) = \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - A\right] q_1(x_1).$$

Definición 1

Un campo $X = (X_1,\ldots,X_{n+1})$ definido en una vecindad de E_n es un *campo tangente* a E_n si se cumple que $X(x).\vec{r}(x) = 0$, $\forall x \in E_n$. Un campo Z se dice que es una *extensión normal* de un campo tangente X a E_n, si $Z(x) = X(x)$, $\forall x \in E_n$ y si $Z(x).\vec{r}(x) = 0$ en una vecindad de E_n.

Obsérvese que, decir que Z es una extensión normal de un campo tangente a E_n, equivale a decir que existe un $\varepsilon > 0$, tal que $\forall 1-\varepsilon < |t| < 1+\varepsilon$, Z es tangente a

$$E_n(t) = \left\{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 = t^2\right\} \qquad [9]$$

Lema 2

Todo campo de vectores tangente a E_n admite una extensión normal.

Prueba. Sea X un campo de vectores tangente a E_n y definido en una vecindad Ω de E_n. Definimos el campo Z de la siguiente manera:

$$Z(x) = X(x) - \frac{1}{[r(x)]^2}[X(x).\vec{r}(x)].\vec{r}(x) \qquad [10]$$

$\forall\ x = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \Omega$. Se verifica que Z es una extensión normal de X,

Resulta claro que si X es un campo polinomial, la extensión normal Z obtenida de [10] no es necesariamente un campo polinomial y, que si X es de clase C^k para algún $k \geq 0$, el campo Z también lo será. Sin embargo, se tiene lo siguiente.

Lema 3

Todo campo polinomial homogéneo tangente a E_n es una extensión normal.

Prueba. Sea X un campo polinomial homogéneo de grado k tangente a E_n. $f(x) = X(x).\vec{r}(x)$ es un polinomio homogéneo de grado $k+1$ que se anula en E_n, por el lema 1, se puede escribir $f(x) = h(x)[e(x)-1]$ $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $h(x)$ polinomial de grado $k-1$. Lo que lleva a una contradicción si $h(x)$ es distinto de cero.

Lema 4

Si X y Y son extensiones normales polinomiales de un mismo campo tangente a E_n, existe un campo polinomial H extensión normal tal que

$$X(x) - Y(x) = H(x)[e(x)-1],\ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Prueba. Si X y Y son extensiones normales polinomiales que definen el mismo campo tangente a E_n, para $i = 1,2,\ldots,n+1$, $p_i(x) = X_i(x) - Y_i(x)$ son polinomios nulos sobre E_n. Por el lema 1, existen polinomios H_i tal que:

$$p_i(x) = X_i(x) - Y_i(x) = H_i(x)[e(x)-1],\ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad [11]$$

Pero de [11] no se deduce que $H = (H_1, \ldots, H_{n+1})$ sea tangente a E_n. Sin embargo, H es tangente a $E_n(t)$, $\forall 1-\varepsilon < |t| < 1+\varepsilon$. En efecto,

$$0 = \vec{r}(x).[X(x) - Y(x)] = \vec{r}(x).H(x)[e(x)-1], \quad [12]$$

$\forall x$ en una vecindad de E_n. De modo que existe un $\varepsilon > 0$, tal que, $\vec{r}(x).H(x) = 0, \forall x \in E_n(t)$ con $1-\varepsilon < |t| < 1+\varepsilon$, ver [9]. Por continuidad, se obtiene que $\vec{r}(x).H(x) = 0\ \forall x \in E_n$.

Operadores gradiente y divergencia en E_n

Consideremos sobre E_n la estructura riemanniana heredada de la estructura riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por:

$$(\vec{u},\vec{v})_a = a(x)\sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i \quad [13]$$

donde $\vec{u} = (u_1,\ldots,u_{n+1})$ y $\vec{v} = (v_1,\ldots,v_{n+1})$ son vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$, mientras que a es una función positiva definida sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Obsérvese que estas estructuras de Riemann preservan los ángulos entre los vectores. Se prueba, de manera inmediata, que para una función diferenciable $f:\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, el *gradiente* de f para esta estructura riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$ es:

$$\nabla_a f(x) = \frac{1}{a(x)} \nabla f(x), \quad [14]$$

donde, $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_{n+1}}\right)$. Por otro lado, el *elemento de volumen riemanniano* en $\mathbb{R}^{n+1}$ viene dado por (2, 6):

$$\vartheta_a = [a(x)]^{\frac{n+1}{2}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}. \quad [15]$$

Además, el vector normal a E_n es dado por:

$$\vec{\eta}(x) = \frac{\vec{r}(x)}{r(x)\sqrt{a(x)}}. \quad [16]$$

Si f es una función diferenciable en una vecindad Ω de E_n, *el gradiente de f en E_n* con la estructura riemanniana heredada de la de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por a, es:

$$\nabla_a^E f = \nabla_a f - (\nabla_a f, \vec{\eta})_a . \vec{\eta} \quad [17]$$

Se deduce de [14], [16] y [17] que:

$$\nabla_a^E f(x) = \frac{1}{a(x)}\left[\nabla f(x) - \left(\frac{\nabla f(x).\vec{r}(x)}{r^2(x)}\right)\vec{r}(x)\right]$$

$$\forall x \in \Omega \quad [18]$$

Teorema 1

Si f es una función diferenciable en una vecindad Ω de E_n, entonces el campo vectorial $\nabla_a^E f$ es una extensión normal de un campo tangente a E_n

Procedemos ahora a calcular el operador *divergencia* para campos de vectores X que son extensiones normales de un campo tangente a E_n. Para ello, sea X un campo de vectores definido en una vecindad Ω de E_n, tal que $X(x).\vec{r}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como el elemento de volumen de $\mathbb{R}^{n+1}$ para la estructura riemanniana dada por [13] es [15], el elemento de volumen riemanniano de E_n para la estructura de Riemann inducida es (6),

$$\omega = \vartheta_a \llcorner \vec{\eta} = \left([a(x)]^{\frac{n+1}{2}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}\right) \llcorner \left[\frac{\vec{r}(x)}{r(x)\sqrt{a(x)}}\right] \quad [19]$$

de donde se deduce que

$$\omega = \frac{[a(x)]^{\frac{n+1}{2}}}{r(x)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1} \llcorner \vec{r}(x) =$$
$$= \frac{1}{r(x)}[a(x)]^{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{x_i}{a_i^2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1} + \frac{1}{r(x)}[a(x)]^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{n+2} \frac{x_{n+1}}{a_{n+1}^2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Aquí $\widehat{dx_i}$ indica que ese término es suprimido en la suma. Como en el semi-espacio $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus x_{n+1} > 0\}$, se cumple que: $\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}^2} dx_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i^2} dx_i$ al sustituir en la expresión de ω resulta:

$$\omega = (-1)^n \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) r(x)[a(x)]^{\frac{n}{2}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad [20]$$

Podemos escribir, entonces, para un campo $Y = (Y_1, \ldots, Y_n, 0)$ extensión normal de un campo tangente a E_n

$$\omega \llcorner Y = (-1)^n \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) r(x)[a(x)]^{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} Y_i \, \widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_\iota \wedge \ldots \wedge dx_{n+1};$$

$$d(\omega \llcorner Y) = d\left[(-1)^n \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) r(x)[a(x)]^{\frac{n}{2}}\right] \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} Y_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_\iota \wedge \ldots \wedge dx_{n+1} + (-1)^n \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) r(x)[a(x)]^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i}\right) \widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Luego, reagrupando,

$$d(\omega \llcorner Y) = \left\{(-1)^n \frac{[a(x)]^{\frac{n}{2}}}{r(x)} \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i^4} Y_i + \left(\frac{n}{2}\right)(-1)^n \frac{[a(x)]^{\frac{n}{2}}}{r(x)} \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} Y_i + (-1)^n \left(\frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}\right) r(x)[a(x)]^{\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \right\}$$

Se deduce que la divergencia del campo Y para la estructura riemanniana inducida sobre E_n es:

$$div_a^E Y = div Y + \frac{1}{r(x)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{a_i^4}Y_i + \left(\frac{n}{2}\right)\frac{1}{a(x)}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}Y_i \qquad [21]$$

En esta expresión el sumando $divY$ es la divergencia usual del campo Y en $\mathbb{R}^{n+1}$. Desde luego, la fórmula [21] vale para todo campo Y extensión normal de un campo diferenciable, tangente a E_n y con una componente nula. Pero, un campo cualquiera Y extensión normal de un campo diferenciable, tangente a E_n se puede expresar como $Y = Y^1 + Y^2$ con Y^1 e Y^2 campos extensiones normales con al menos una componente nula. Esto termina de completar la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2

Si Y es un campo de vectores diferenciable extensión normal de un campo tangente a E_n, la divergencia de Y para la estructura riemanniana inducida sobre E_n, por la estructura de $\mathbb{R}^{n+1}$ dada en [13], se calcula con la fórmula [21].

Ejemplo 1:

1. Si la función a es de la forma: $a(x) = ke(x)$ que es constante en E_n la fórmula [21] se reduce a:

$$div_a^E Y = div Y + \frac{1}{r(x)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{a_i^4}Y_i.$$

2. Si $a(x) = [r(x)^2]^t$, con $t \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$div_a^E Y = div Y + \frac{1}{r(x)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{a_i^4}Y_i + \left(\frac{n}{2}\right)\frac{1}{[r(x)^2]^t}\sum_{i=1}^{n+1}[r(x)^2]^{t-1}\frac{2x_i}{a_i^4}Y_i \Rightarrow$$

$$div_a^E Y = div Y + \left(\frac{nt+1}{r(x)^2}\right)\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i}{a_i^4}Y_i. \qquad [22]$$

Obsérvese que si elegimos $t = -\frac{1}{n}$ en la fórmula [22], se recupera la fórmula usual de la divergencia en $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. En los ejemplos anteriores (1 y 2), si Y es un campo polinomial extensión normal de un campo tangente a E_n, $div_a^E Y$ no es, en general, un campo polinomial. Sin embargo, $div_a^E(r^2 Y)$ sí resulta polinomial.

El operador de Laplace-Beltramí en E_n

En la sección anterior se hemos logrado conseguir fórmulas para los operadores gradiente (∇_a^E) y divergencia (div_a^E) sobre el elipsoide E_n con la estructura riemanniana dada por [13]. Definimos, ahora, el operador de Laplace-Beltramí para una función f, diferenciable, en un entorno de E_n para esta estructura riemanniana:

$$\Delta_a^E(f) = div_a^E(\nabla_a^E f) \qquad [23]$$

Obsérvese que para $a(x) = r(x)^{-4}$ y f polinomial, $\nabla_a^E f = r^4\left[\nabla f - \left(\frac{\nabla f.\vec{r}}{r^2}\right)\tilde{\vec{r}}\right]$, ver [18], es un campo polinomial. $\Delta_a^E(f)$ es también polinomial, sin embargo, si f es de grado k, $\Delta_a^E(f)$ será de grado $k+2$ y no hay conjuntos de polinomios que sean invariantes para el operador de Laplace-Beltramí definido por [23].

Familia de operadores tipo Laplace-Beltramí sobre E_n

Sean, Ω una vecindad de E_n en $\mathbb{R}^{n+1}$, a y b funciones diferenciables definidas en Ω. Para cualquier función f de clase $C^2(\Omega)$ definimos el operador de Laplace-Beltramí $\Delta_{a,b}$ estipulando:

$$\Delta_{a,b}(f) = div_b^E(\nabla_b^E f) \qquad [24]$$

Se tiene entonces el siguiente resultado,

Lema 5

Si $\Delta_{a,b}(f) = 0$ entonces, f es constante.

Prueba. Para f de clase $C^2(\Omega)$ se tiene: $div_b^E(f\,\nabla_a^E f) = \nabla_b^E f.\nabla_a^E f + f\Delta_{a,b}(f)$.

Así, para $\Delta_{a,b}(f) = 0$ obtenemos:

$$div_b^E(f\,\nabla_a^E f) = \nabla_b^E f.\nabla_a^E f = \frac{1}{ab}\left(\nabla f - \frac{\nabla f.\vec{r}}{r^2}.\vec{r}\right)^2.$$

Integrando ahora en E_n con respecto a la unidad de volumen riemanniana, se obtiene:

$$0 = \int_{E_n} \frac{1}{ab}\left(\nabla f - \frac{\nabla f.\vec{r}}{r^2}.\vec{r}\right)^2 d\sigma_b$$

Lo que implica que $\nabla f(x) - \frac{\nabla f(x).\vec{r}(x)}{r(x)^2}.\vec{r}(x) = 0,\ \forall x \in E_n$ de modo que, $\nabla f(x) = 0,\ \forall x \in E_n$ y de allí que f = constante.

Teorema 3

La ecuación $\Delta_{a,b}(f) = g$, para f de clase $C^2(\Omega)$ y g continua, tiene solución en E_n si y sólo si $\int_{E_n} g\,d\sigma_b = 0$. Aquí, $d\sigma_b$ es el elemento de volumen para la estructura riemanniana b.

Prueba. Bastará probar que el operador $\Delta_{a,b}$, dado por [24], es uniformemente elíptico y auto-adjunto. El teorema se sigue de los mismos argumentos para un operador de Laplace-Beltramí sobre una variedad riemanniana compacta (6).

Para probar que el operador es uniformemente elíptico, observemos que en el sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ con $x_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}\sqrt{1-\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2}$ para una función $f(x_1,\ldots,x_n)$ de clase $C^2(\Omega)$, de [18] y [21], obtenemos:

$$\Delta_{a,b}(f) = div[(g^{-1})\nabla f] + M$$

donde M contiene sólo derivadas de primer orden de f y g es una matriz de orden $(n+1)\times(n+1)$, definida positiva la cual determina la métrica riemanniana sobre la variedad (2). Por lo tanto, la parte principal del símbolo asociado al operador en el compacto $\{x \in E_n \,/\, x_{n+1} \geq \varepsilon\}$, para un $\varepsilon > 0$ dado, es una forma cuadrática definida. Ahora bien, E_n puede ser recubierto por una familia finita de compactos de esta forma y de allí que nuestro operador resulte uniformemente elíptico.

Introducimos en $C^2(\Omega)$ el siguiente producto escalar para la métrica b:

$$\langle u,v\rangle_b = \int_{E_n} u.v d\sigma_b$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned}\langle u,\Delta_{a,b}v\rangle_b &= \int_{E_n} u.\Delta_{a,b}v d\sigma_b\\ &= \int_{E_n} \nabla_b^E u.\nabla_a^E v d\sigma_b\\ &= \int_{E_n} \frac{1}{ab}\nabla u.\nabla v d\sigma_b = \langle \Delta_{a,b}u,v\rangle_b\end{aligned}$$

Esto es, el operador $\Delta_{a,b}$ resulta auto-adjunto y queda probado el teorema.

El operador $\tilde{\Delta}$

Sea Ω una vecindad de E_n en $\mathbb{R}^{n+1}$, f de clase $C^2(\Omega)$ y X un campo de vectores diferenciable, extensión normal de un campo tangente a E_n. Para el caso particular en que $a(x) = r(x)^{-2}$ y $b(x) = r(x)^{-\frac{1}{n}}$ las fórmulas [18], [21] y [24] se reducen a los operadores:

$$\tilde{\nabla} f(x) = \nabla_a^E f(x) = r(x)^2\nabla f(x) - [\nabla f(x).\vec{r}(x)].\vec{r}(x) \qquad [25]$$

$$\tilde{div}\,X(x) = div_b^E X(x) = div(X) \qquad [26]$$

$$\tilde{\Delta} f(x) = \Delta_{a,b} f(x) = div\left[\tilde{\nabla} f(x)\right] =$$
$$div\left[r^2 \nabla f - (\nabla f.\vec{r}).\vec{r}\right](x) \qquad [27]$$

Obsérvese que si f es una función polinomial de grado k, $\tilde{\nabla} f$ es un campo polinomial de grado k+1 extensión normal de un campo tangente a E_n, de modo que $\tilde{\Delta} f$ es un polinomio de grado k.

Denotemos por $\mathbb{P}_k$ el espacio de los polinomios de grado k en las variables $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ y por $\mathbb{P}_k^H$ el subespacio de los polinomios homogéneos correspondientes.

Definición 2

Sean $f \in \mathbb{P}_k$.

i. $\mathcal{L}_k : \mathbb{P}_k \to \mathbb{P}_k$ es la aplicación lineal definida por:

$$\mathcal{L}_k(f) = div\left[r^2 \nabla f - (\nabla f.\vec{r}).\vec{r}\right]$$

ii. $\Im_k : \mathbb{P}_k \to \mathbb{P}_{k+2}$ es la aplicación lineal definida por: $\Im_k(f) = e(x).f$.

iii. $\pi_k : \mathbb{P}_k^H \to C_p^\infty(E_n)$ es la aplicación definida por: $\pi_k(f) = f|_{E_n}$.

iv. Se define en $\mathbb{P}_k^H$ el producto escalar:

$$\langle u,v \rangle = \int_{E_n} \pi_k(u).\pi_k(v) d\sigma_b \qquad [28]$$

Teorema 4

i. $\mathbb{P}_k^H$ es invariante por $\mathcal{L}_k$.

ii. $\mathcal{L}_{k+2}\left[\Im_k(f)\right] = e(x).\mathcal{L}_k(f), \forall f \in \mathbb{P}_k$

iii. π_k es inyectiva.

iv. Los auto-valores de la aplicación $\mathcal{L}_k^H = \mathcal{L}_k|_{\mathbb{P}_k^H}$ son reales. Además, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $\mathcal{L}_k^H$ y $v \in \mathbb{P}_k^H$ es su respectiva función propia, entonces, λ es auto-valor del operador $\tilde{\Delta}$ y $\pi_k(v)$ es la correspondiente función propia.

v. El subespacio $\Im_k(\mathbb{P}_k^H)$ de $\mathbb{P}_{k+2}^H$ y su complemento ortogonal H_k son invariantes por $\mathcal{L}_{k+2}^H$.

vi. $\mathbb{P}_{k+2}^H$ admite una base ortogonal $\{u_1^k,\ldots u_{m_k}^k, v_1^k,\ldots,v_{n_k}^k\}$ de funciones propias de $\mathcal{L}_{k+2}^H|_{\Im_k(\mathbb{P}_k^H)}$ y $\mathcal{L}_{k+2}^H|_{H_k}$ respectivamente. Además, el conjunto de funciones:

$$\Gamma = \Big\{1; \pi_{2k+2}(v_1^{2k}),\ldots,\pi_{2k+2}(v_{n_{2k}}^{2k}),\ldots, \pi_1(x_1),\ldots,\pi_1(x_{n+1}), \pi_{2k+3}(v_1^{2k+1}),\ldots, \pi_{2k+3}(v_{n_{2k+1}}^{2k+1})\Big\}_{k=0}^{\infty}$$

constituye una base ortogonal del espacio $L_{2,b}(E_n)$ (de todas las funciones de cuadrado integrable sobre E_n con la estructura riemanniana b), con el producto interno [28], formada por funciones propias del operador $\tilde{\Delta}$.

Prueba. i), ii) y iii) se prueban de manera inmediata a partir de la definición 2.

Prueba de iv). Probemos primero que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_k^H & \xrightarrow{\mathcal{L}_k^H} & \mathbb{P}_k^H \\ \pi_k \downarrow & & \downarrow \pi_k \\ C_p^\infty(E_n) & \xrightarrow[\tilde{\Delta}]{} & C_p^\infty(E_n) \end{array}$$

En efecto, para $f \in \mathbb{P}_k^H$, de [27] y la definición 2-i, se tiene: $\mathcal{L}_k^H(f)|_{E_n} = \tilde{\Delta}(f|_{E_n})$ esto es, $(\pi_k \circ \mathcal{L}_k^H)(f) = (\tilde{\Delta} \circ \pi_k)(f)$ es decir el diagrama conmuta. Se tiene entonces que si $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{L}_k^H(v) = \lambda v$ para algún $v \in \mathbb{P}_k^H$ entonces, $\lambda \pi_k(v) = \lambda \pi_k\left(\mathcal{L}_k^H(v)\right) = \tilde{\Delta}\left(\pi_k(v)\right)$, esto es, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un auto-valor de $\mathcal{L}_k^H$ y $v \in \mathbb{P}_k^H$ es su respectiva función propia, entonces, λ es auto-valor del operador $\tilde{\Delta}$ y $\pi_k(v)$ es la correspondiente función propia.

Falta probar que los auto-valores de $\mathcal{L}_k^H$ son todos reales, para ello probaremos que $\mathcal{L}_k^H$ es un operador auto-adjunto para el producto escalar [28]. Sean u y $v \in \mathbb{P}_k^H$,

$$\left\langle \mathcal{L}_k^H(u), v \right\rangle = \int_{E_n} \pi_k\left(\mathcal{L}_k^H(u)\right).\pi_k(v)d\vartheta_b = \int_{E_n} \tilde{\Delta}\left(\pi_k(u)\right).\pi_k(v)d\vartheta_b,$$

pero, por el teorema 3 (ver la prueba),

$$\left\langle \mathcal{L}_k^H(u), v \right\rangle = \left\langle \tilde{\Delta}\left(\pi_k(u)\right).\pi_k(v) \right\rangle_b = \left\langle \pi_k(u), \tilde{\Delta}\left(\pi_k(v)\right) \right\rangle_b = \left\langle u, \mathcal{L}_k^H(v) \right\rangle.$$

Así, $\mathcal{L}_k^H$ resulta auto-adjunto y en consecuencia todos sus auto-valores reales (5).

Prueba de v).

Sea $u \in \Im_k(\mathbb{P}_k^H) \Rightarrow u = e(x).f$, para algún $f \in \mathbb{P}_k^H$. Entonces,

$$\mathcal{L}_{k+2}^H(u) = \mathcal{L}_{k+2}^H\left[\Im_k(f)\right] = e(x).\mathcal{L}_k^H(f) =$$

$$\Im_k\left[\mathcal{L}_k^H(f)\right] \in \Im_k(\mathbb{P}_k^H)$$

Se sigue que, $\Im_k(\mathbb{P}_k^H)$ es invariante por $\mathcal{L}_{k+2}^H$. Por otro lado, si $u \in H_k$ y $v \in \Im_k(\mathbb{P}_k^H)$, se tiene: $\left\langle \mathcal{L}_{k+2}^H(u), v \right\rangle = \left\langle u, \mathcal{L}_{k+2}^H(u) \right\rangle = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{k+2}^H(u) \in H_k$ y H_k también resulta invariante.

Prueba de vi). Tanto $\Im_k(\mathbb{P}_k^H)$ como H_k son invariantes por $\mathcal{L}_{k+2}^H$, que es auto-adjunto sobre el espacio de dimensión finita $\mathbb{P}_{k+2}^H$, en consecuencia lo será sobre los subespacios $\Im_k(\mathbb{P}_k^H)$ y H_k, así que existen bases ortogonales $\{u_1^k,\ldots,u_{m_k}^k\}$ y $\{v_1^k,\ldots,v_{n_k}^k\}$ de $\Im_k(\mathbb{P}_k^H)$ y H_k respectivamente, formada por funciones propias de $\mathcal{L}_{k+2}^H$. Ahora bien, $\mathbb{P}_{k+2}^H = \Im_k(\mathbb{P}_k^H) \oplus H_k$, así que $\{u_1^k,\ldots,u_{m_k}^k, v_1^k,\ldots,v_{n_k}^k\}$ resulta una base ortogonal de $\mathbb{P}_{k+2}^H$.

Obsérvese que si $\{u_i\}_{i=1}^{m_k}$ es una base ortogonal del espacio $\mathbb{P}_k^H$ formada por funciones propias de $\mathcal{L}_k^H$, el conjunto $\{e(x)u_i\}_{i=1}^{m_k}$ es una base ortogonal del subespacio $\Im_k(\mathbb{P}_k^H)$ formada por funciones propias del operador $\mathcal{L}_{k+2}^H$. Luego, para completar la base ortogonal de $\mathbb{P}_{k+2}^H$ bastará con encontrar la base $\{v_1^k,\ldots,v_{n_k}^k\}$ del subespacio H_k. Por otro lado, $e(x)u_i - u_i = u_i[e(x)-1] = 0$ en E_n con $1 \le i \le m_k$, esto es, $\pi_k(u_i)$ y $\pi_{k+2}[e(x)u_i]$ definen las mismas funciones en $C_p^\infty(E_n)$ (ver lema 1) y por tanto, las mismas funciones propias del operador $\tilde{\Delta}$ con iguales auto-valores. De estas observaciones se desprende que el conjunto Γ cumple con lo exigido en el teorema.

Ejemplo 2

En este ejemplo mostraremos como construir algunas funciones propias del operador $\tilde{\Delta}$, para el caso E_2 con k impar.

Para $k = 1$, el conjunto de funciones $\beta_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ es una base del espacio $\mathbb{P}_1^H\{x_1, x_2, x_3\}$, formado por funciones propias del operador $\mathcal{L}_1^H$ con auto-valores distintos, así que, $e\beta_1 = \{e(x)x_1, e(x)x_2, e(x)x_3\}$ constituye una base del subespacio $\Im_1(\mathbb{P}_1^H) \subset \mathbb{P}_3^H$ formada por funciones propias de $\mathcal{L}_3^H$, bastara con encontrar la base $\{v_1^1,\ldots,v_{n_1}^1\}$ de H_1, complemento ortogonal de $\Im_1(\mathbb{P}_1^H)$ en $\mathbb{P}_3^H$, para completar una base de $\mathbb{P}_3^H$. Ahora bien, β_1 y β_2 definen las mismas funciones propias para $\tilde{\Delta}$.

Para $k = 3$, el conjunto $\beta_3 = \{e(x)x_1, e(x)x_2, e(x)x_3; v_1^1,\ldots,v_{n_1}^1\}$ es una base del espacio $\mathbb{P}_3^H$, formado por funciones propias del operador $\mathcal{L}_3^H$, entonces:

$$e\beta_3 = \{e(x)^2 x_1, e(x)^2 x_2, e(x)^2 x_3; e(x)v_1^1,\ldots, e(x)v_{n_1}^1\}$$

es una base ortogonal del sub-espacio $\Im_3(\mathbb{P}_3^H) \subset \mathbb{P}_5^H$ formada por funciones propias de $\mathcal{L}_5^H$. Si $\{v_1^3,\ldots,v_{n_3}^3\}$ es la base de H_3, complemento ortogonal de $\Im_3(\mathbb{P}_3^H)$ en $\mathbb{P}_5^H$, entonces:

$$\beta_5 = \{e(x)^2 x_1, e(x)^2 x_2, e(x)^2 x_3; e(x)v_1^1,\ldots, e(x)v_{n_1}^1; v_1^3,\ldots,v_{n_3}^3\}$$

Es una base ortogonal de $\mathbb{P}_5^H$ formada por funciones propias de $\mathcal{L}_5^H$. Aquí el conjunto $e\beta_3$ define las mismas funciones propias para $\tilde{\Delta}$ que el conjunto β_3. Siguiendo así, construimos el conjunto de funciones propias de $\tilde{\Delta}$:

$$\Gamma_{\text{impar}} = \{\pi_1(x_1),\ldots,\pi_1(x_{n+1}), \pi_{2k+3}(v_1^{2k+1}),\ldots, \pi_{2k+3}(v_{n_{2k+1}}^{2k+1})\}_{k=0}^{\infty}.$$

En este punto, se hace evidentemente necesaria la implementación de una estrategia numérica-computacional que permita obtener los vectores de la base ortogonal de un H_k, así como sus auto-valores, para valores de k suficientemente grandes y en otras dimensiones.

Referencias bibliográficas

1. GUIÑEZ J., RUEDA A.D. ***Acta Math Hungar*** 94(3): 211-221. 2002.
2. BOOTHBY W.M. ***An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.*** Academic Press, INC. Orlando, Florida (USA). 2nd Edition. 1986.
3. HOFFMAN K., KUNZE R. ***Algebra Lineal.*** Prentice-Hall Hispanoamericana. México. 1973.
4. KOLÁR I., MICHOR P.W., SLOVÁK J. ***Natural Operations in Differential Geometry.*** Springer Verlag. Berlin Heidelberg. 1993.
5. RENARDY M., ROGERS R.C. ***An Introduction to Partial Differential Equations.*** Springer Verlag. USA. Texts in Applied Matematics 13. 1992.
6. WARNER FRANK W. ***Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.*** USA. Springer Verlag. 1987.
7. EL MEJMISSANI N. Solución Numérica de la Ecuación de Poisson en la esfera S_n Mediante los Métodos de Galerkin y de Fourier. Tesis de Maestría para obtener el título de Magister en Matemática Aplicada. Posgrado de Ingeniería. Universidad del Zulia. Maracaibo (Venezuela). 98 pp. 2006.
8. Software Libre: Maxima Computer Algebra System. < http://maxima/sourceforge.net/ >. Versión 5.16.3.