

Modelo analítico del vuelo de dispersión del aquenio de *Triplaris caracasana* Cham.

Celso L. Ladera^{1*}, Pedro A. Pineda Jr.¹ y Gustavo Alcalá²

¹Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Apdo. 89000.
Caracas 1080A, Venezuela.

²Departamento de Ciencias Naturales, Instituto Pedagógico-UPEL.
Barquisimeto, Venezuela.

Recibido: 11-01-00 Aceptado: 29-09-00

Resumen

Se presenta un modelo físico del movimiento vertical de dispersión de los *achenios* (frutos alados) de *Triplaris caracasana* Cham, especie de árbol autóctono de la región Norte de Venezuela, y que crece en selvas tropicales de vientos alisios. Hemos encontrado que estos achenios inician su "vuelo" de dispersión con un *régimen transitorio no-lineal* de rotación y traslación simultáneas, que luego es seguido por un *régimen terminal*. Nuestro modelo teórico del aquenio proporciona dos ecuaciones diferenciales no-lineales que representan con buena exactitud ambos regímenes de rotación y traslación de un espécimen real. Basado en formalismos de mecánica analítica, el modelo predice un descenso inicial con una rapidez que tiene dependencia temporal *tangente-hiperbólica*, y luego el *régimen terminal* con rapidez de traslación vertical y rapidez angular de rotación constantes. Los resultados experimentales, obtenidos mediante localización ultrasónica y estroboscopia electrónica, confirman la validez de nuestro modelo. En el régimen uniforme la rapidez de descenso alcanza entre 0,9 y 1,2 m/s, mientras que la rapidez angular alcanza un valor entre 95 y 125 rad/s. Esta sucesión de regímenes cinemáticos, no-lineal y lineal, para traslación y rotación, y los torques que actúan sobre el aquenio, permiten a *Triplaris* maximizar su proceso de dispersión.

Palabras clave: Aerodinámica; aquenio; dispersión; mecánica aplicada; modelo físico; *Triplaris*.

Mechanical analysis of the dispersal flight of *Triplaris caracasana* Cham.

Abstract

We present a physical model of the vertical motion of the *achenios* (winged fruits) of *Triplaris caracasana* Cham, a tree species autochthonous to the northern region of Venezuela, where it grows in the trade-winds tropical forests. We have discovered that these achenios begin their dispersal motion with a *nonlinear transient regime* of simultaneous rotation and translation, followed by a *terminal regime*. Our model of the achenio leads to two nonlinear differential equations which predict both regimes of rotation and translation of a real specimen. Based on the formalisms of analytical mechanics, our model predicts an initial descent with a speed

* Autor para la correspondencia. E-mail: clladera@usb.ve

whose time dependence is *tangent-hiperbolic*, followed by the terminal regime of motion for which the speed of vertical translation and the speed of angular rotation are constants. Our experimental results, obtained using electronic stroboscopy and ultrasonic ranging, have confirmed the validity of our model. In uniform motion the linear speed of the achenio ranges between 0.9 and 1.2 m/s, while the angular speed reaches between 95 and 125 rad/s. This succession of kinematical regimes, nonlinear and linear, for both translation and rotation, and the torques acting on the achenio, ensure maximal dispersal of *Triplaris* achenios.

Key words: Achenio; aerodynamics; analytical model; applied mechanics; dispersion; *Triplaris*.

1. Introducción

Existe un número de especies tropicales, e.g. *Swietenia mahogany*, *Machaerium robinaefolium*, y *Zanonia macrocarpa*, que han desarrollado, mediante evolución, interesantes vuelos de dispersión de sus semillas aladas (*samaras*), o de sus frutos alados (*achenios*). Se trata de movimientos inusuales pero con regularidades tales que los hacen susceptibles de investigación científica. En Venezuela, aparte de las primeras dos especies mencionadas, existen otras, como los casos de *Triplaris caracasana* (vulgo *Palo María*) y *Tabebuia rosea* (vulgo *Apamate*) para las cuales la dispersión de semillas, o frutos, se logra mediante llamativos movimientos de rotación, y de traslación, simultáneos. *T. caracasana* es un árbol autóctono de Venezuela (1) que dispersa sus *achenios*, entre junio y julio, cuando la temporada de lluvia comienza su clímax. El achenio de *T. caracasana* es un objeto, que por su simetría y elaborada estructura aerodinámica (Figura 1), merece por sí mismo estudio analítico. Su dispersión se inicia con el desprendimiento desde la copa del árbol, usualmente a unos 14-18 m de altura sobre el piso, y como se demuestra en este trabajo, consiste de dos regímenes distintos de movimiento vertical: un corto *régimen transitorio no-lineal* seguido de un largo *régimen terminal o estacionario*, motorizados por torques relativamente poderosos. Como el movimiento es además una combinación de rotación y traslación es bastante difícil explicarlo desde el punto de vista de la física, a partir de meras observaciones fenomenológicas. En el pri-

mer régimen, casi imposible de observar a simple vista, tanto la rapidez de traslación como la rapidez angular muestran dependencia no-lineal con respecto al tiempo. Este régimen no-lineal evoluciona en forma continua hacia el régimen terminal. Hemos investigado lo que consideramos más importante, y predecible, del complejo movimiento de dispersión de los achenios de *T. caracasana*. Por tal entendemos su movimiento en la dirección vertical. A tal efecto hemos realizado experimentos de laboratorio, en los cuales se ha medido la rapidez de caída, y de rotación, de los achenios en aire en calma. Apoyándonos en el *formalismo lagrangiano* de la mecánica analítica (2, 3), y un número de suposiciones básicas, elaboramos un modelo matemático-físico para explicar el movimiento de caída vertical del achenio de *T. caracasana*: tanto su movimiento de traslación como el de rotación. El modelo conduce a dos ecuaciones diferenciales no-lineales que luego de resueltas –como se explica más abajo– describen con buena exactitud la rotación y traslación del achenio, tanto en el régimen no-lineal como en el régimen terminal de caída. En su medio natural, los achenios de *T. caracasana* son además trasladados horizontalmente por vientos cruzados. Como es conocido, esta interacción no es en general lo suficientemente regular como para poderla describir con exactitud salvo, por supuesto, en el caso de que se suponga viento *no turbulento* cruzado sobre el achenio, mientras éste cae a tierra. En principio sería relativamente fácil determinar su desplazamiento horizontal

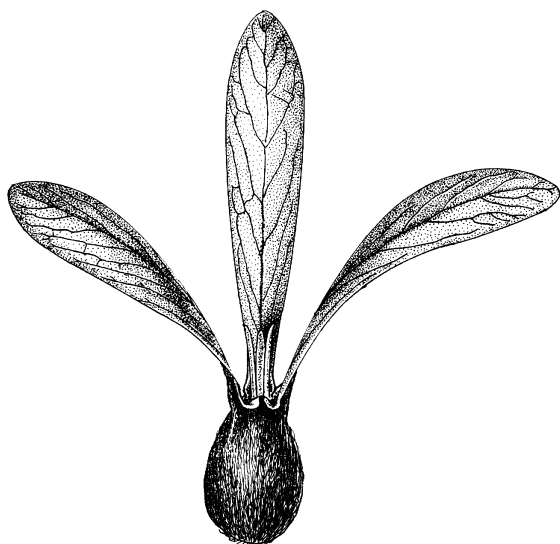


Figura 1. Aquenio de *T. caracasana* C. El bulbo que contiene la semilla es el cuerpo elipsoidal en la parte inferior. Nótese la simetría con respecto al eje longitudinal del bulbo. Cada ala está unida al bulbo por un talluelo semi-rígido que le permite mantener su inclinación.

debido a una interacción con viento cruzado de régimen *laminar*, si el viento es moderado (< 15 Km/h). Debemos hacer notar que se han hecho escasos esfuerzos por estudiar analítica y/o experimentalmente la dispersión (4) de samaras y aquenios; entre las excepciones están los casos de la semilla voladora del *Acer macrophyllum* (vulgo *Arce*) (5), y la del fruto del árbol tropical llamado *Jabillo* en Venezuela (*Hura crepitans* L) (6).

2. Materiales y Métodos

Recolección de los aquenios y toma de muestras

Se recolectaron un poco más de trescientos aquenios provenientes de dos especímenes de *T. caracasana* en el Valle de Sartenejas (a 1193 m de altura sobre el nivel del mar, 10° 25' N, 66° 53' W, en las afueras de Caracas). Estos aquenios fueron recogidos en el suelo circundante a los árboles, en for-

ma arbitraria. La recolección se realizó durante los últimos días de julio, cuando la dispersión ya había alcanzado su clímax, en condiciones favorables de alta humedad ambiental, tanto en el aire circundante como en el suelo, y temperatura de 26°. El desprendimiento de estos aquenios desde las copas de los árboles, luego de su proceso de maduración, se debió al movimiento de las ramas por la acción del viento, o mediante la intervención ocasional de aves, o de insectos. De la muestra inicial, doce aquenios fueron seleccionados al azar, para la realización de los experimentos. Otros diez fueron seleccionados, también al azar, para realizar las mediciones más simples, i.e. dimensiones geométricas, masa total, masa de las alas, y similares.

Morfología y mediciones del aquenio de *T. caracasana*

En la Figura 1 se muestra el aquenio de *T. caracasana*. El fruto seco, de color marrón claro, es semi-rígido, frágil, y sus superficies tienen una textura que recuerda a la madera. Su longitud total (altura) varía entre 4 a 5 cm. En su parte inferior tiene un *bulbo* que contiene la semilla. El bulbo es un cuerpo elipsoidal de pequeña excentricidad, 1,5 cm de altura y aproximadamente 1,0 cm de diámetro. Salvo por su reducido tamaño y por las tres alas, que emergen inclinadas por su extremo superior, el bulbo se asemeja mucho al fruto de la conocida especie *Cocos nucifera* (vulgo *Coco*). Las tres alas inclinadas y el bulbo determinan así una cuasi-perfecta simetría rotacional de 120° (simetría de 3er. Orden) con respecto al eje vertical que coincide con el eje principal del bulbo. Cada ala está unida al bulbo mediante un corto talluelo que es algo flexible, y que apenas mantiene constante la inclinación del ala. Se trata pues de un fruto alado muy especializado cuya apariencia externa es casi la de una flor.

Las alas, son cuasi-fusiformes, arqueadas y además ligeramente alabeadas, y tienen entre 33 y 45 mm de largo, y de 6,0 a

8,0 mm de ancho máximo. Cuando un ala es vista de perfil su sección lateral tiene, debido a su alabeo, un espesor aparente de 0,2 a 0,6 mm. Las alas se separan de la parte superior del bulbo con una inclinación que, para un fruto completamente maduro, varía aproximadamente entre 30° y 48° , con respecto al eje vertical. La simetría rotacional no es perfecta sin embargo. En un mismo aquenio las alas muestran ligeras asimetrías naturales, como por ejemplo en su tamaño.

Cada ala tiene una pequeña inclinación lateral que debe ser explicada en detalle: por ejemplo existe una nervadura central a todo lo largo de cada ala y que es claramente visible (Figura 1). Esa nervadura define un eje central longitudinal en el ala. Considérese el plano vertical que biseca el ala a lo largo de ese eje. Sucede que el plano medio, definido por el ala, no es ortogonal a ese plano vertical (Figura 2), sino que forma con este último un ángulo de $(90 + \phi)^\circ$. La pe-

queña inclinación lateral, $\phi = 1^\circ - 2^\circ$, equivale a un pequeño giro de toda el ala alrededor de su eje central, o nervadura. Como veremos esta inclinación lateral determina la aparición del torque aerodinámico que hace rotar al aquenio. Las tres alas de un aquenio recuerdan a las aspas de la hélice de un helicóptero, pero en el caso de un aquenio (además de arqueadas), las alas están inclinadas $30^\circ - 48^\circ$ con respecto a la vertical. La inclinación lateral adicional del ala de un aquenio equivaldría al caso de un helicóptero, cada una de cuyas aspas estuviese girada con respecto a su eje longitudinal el pequeño ángulo ϕ .

Con una balanza electrónica de precisión se determinó la masa promedio 0,150 g de los aquenios, de la cual el bulbo por sí solo tiene una masa promedio de 0,130 g. La masa promedio de un ala es 0,007 g.

Mediciones cinemáticas

Para las mediciones del aquenio en movimiento se utilizaron, inicialmente, un decámetro (apreciación de milímetros) y un cronómetro de precisión. Un aquenio cual-

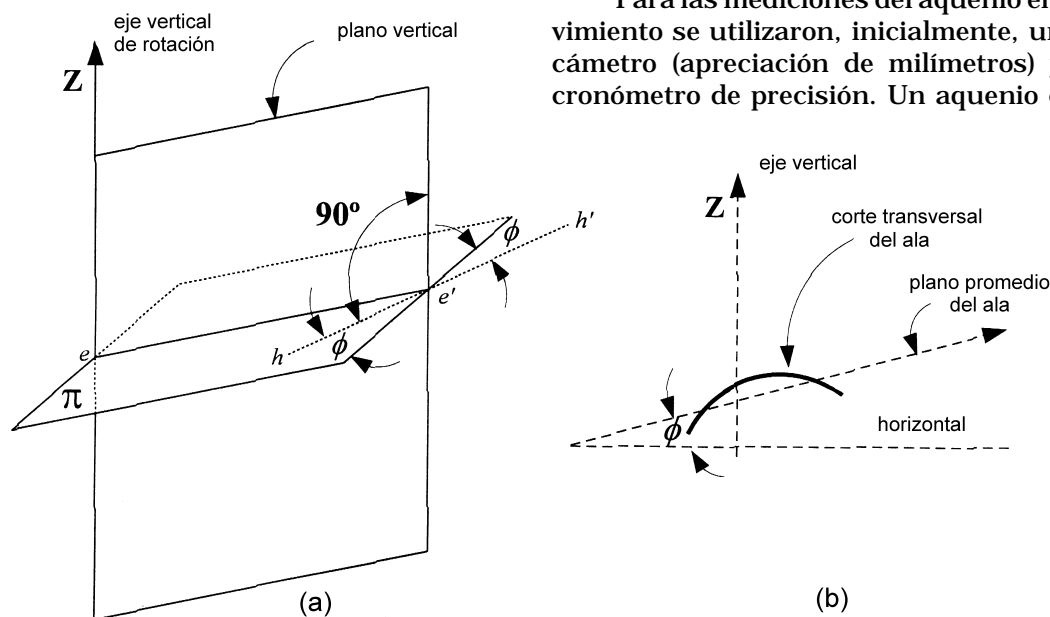


Figura 2. Pequeña inclinación lateral del ala del aquenio de *T. caracasana* con respecto a la horizontal hh' . El ala (combada) define un plano medio π . (a) El plano medio π , definido por el ala, forma un ángulo $(90 + \phi)$ con el plano vertical definido por el eje de rotación del aquenio zy y el eje central ee' que corre a lo largo del ala; (b) Corte transversal del ala (combada) que muestra la pequeña inclinación lateral ϕ del plano promedio del ala.

quiera fue dejado caer libremente, desde una altura inicial de 3-4 m, y los tiempos de descenso para alcanzar posiciones verticales pre-establecidas fueron registrados. Es un método de que no tiene gran exactitud, pero que proporcionó información útil para la comprobación de nuestra hipótesis inicial sobre el vuelo de dispersión del aquenio (ver sección **Resultados**). Este simple método permitió conocer por primera vez el valor aproximado de la rapidez terminal de caída con exactitud relativamente aceptable. Posteriormente se utilizó un equipo más avanzado y un método mucho más exacto y confiable: localización ultrasónica. Con un transductor piezoeléctrico que funciona como emisor/sensor (Vernier Software, Ultrasonic Motion Detector, Oregon, U.S.A.), y cuya fuente de excitación eléctrica se controla con un microcomputador, se lanzaron periódicamente paquetes *cortos* de ondas ultrasónicas (duración 5 μ s), centrados en la frecuencia 40 kHz hacia un aquenio en caída vertical. El aquenio fue dejado caer, desde una altura inicial de 2,5-3,0 m, hacia el sensor colocado sobre el piso. Los pulsos de ultrasonido reflejados por el aquenio en movimiento fueron detectados por el mismo transductor. Las señales eléctricas así generadas fueron procesadas con el computador, mediante programación adecuada, y los tiempos de ida/retorno de los pulsos fueron almacenados en disco duro. Este método es bastante preciso y permite determinar la posición vertical de un aquenio, mientras “vuela” a tierra, en aire quieto, con un error de sólo ± 2 mm y una resolución de 1,5 mm; también permite determinar cual es la magnitud de la rapidez de descenso del aquenio. Con este método el error en la medición de intervalos de tiempo es prácticamente despreciable (del orden de 0,001 ms).

Método estroboscópico electrónico y la simetría de 3er. orden del aquenio

Para medir la rapidez angular terminal de un aquenio dado se utilizó un estroboscopio electrónico (General Radio: Modelo

1540-P4, U.S.A.: Strobolume Oscillator/Delay Unit) cuya frecuencia de pulsación, o sea de destellos de luz, fue cuidadosamente calibrada con un circuito opto-electrónico auxiliar. Este circuito consiste de un fotodiodo (PIN-10, United Detector Technology, U.S.A.) tipo PIN que fue conectado en polarización reversa, y utilizado para detectar los pulsos de luz del estroboscopio. El estroboscopio utilizado puede emitir pulsos de luz en el rango de frecuencias 1-120 Hz con una resolución de 0,02 Hz. Los pulsos eléctricos generados por el fotodetector fueron medidos con un osciloscopio de amplio ancho de banda (Osciloscopio Digital Tektronix TDS-210. U.S.A.; 60 MHz y 1 Gs/s), que además permite registrar en memoria digital propia las señales electrónicas observadas.

El método estroboscópico explota, con gran ventaja, la simetría rotacional de 3er. orden del aquenio. Se comienza por hacer que el estroboscopio emita pulsos de luz a muy baja frecuencia, algo menos de 7 pulsos por segundo. Se deja entonces caer repetidamente al aquenio, en aire en calma y con el laboratorio a oscuras, desde una altura mínima de 2,8 m. Esta altura mínima garantiza que el tiempo de vuelo del aquenio será de unos 3 s, y que alcanzará su régimen terminal de movimiento luego de aproximadamente 1 s de vuelo. La frecuencia de pulsos del estroboscopio puede entonces ser disminuida gradualmente hasta una frecuencia f_0 4-6 pulsos/s tal que el aquenio es visto caer sin rotar –desde arriba y a lo largo de la vertical– durante el último metro y medio de recorrido (o sea durante su régimen terminal). Se le observa caer sin rotar pues esta baja frecuencia f_0 de los pulsos del estroboscopio resulta ser un sub-múltiplo de la frecuencia real de rotación del aquenio (en nuestro caso el periodo de pulsación $T_0 = 1/f_0$, como demostramos a continuación, es tres veces más largo que el periodo real de rotación T_1 del aquenio). Dado que f_0 es muy baja, en comparación con lo rápido que rota el aquenio, se puede asegurar que esta primera frecuencia es solamente un

sub-múltiplo de la frecuencia real del aqueño. Esto es así pues el tiempo de respuesta del sistema ojo-cerebro humano es en realidad suficiente como para poder resolver este bajo valor de frecuencia (i.e. se podrían diferenciar a simple vista, y sin estroboscopia, las alas del aqueño en rotación si su frecuencia fuese sólo de 4-6 Hz, lo cual no ocurre). Se aumenta entonces la frecuencia del estroboscopia hasta aproximadamente $3f_0$. La frecuencia es entonces ligeramente ajustada hasta que de nuevo se observa caer al aqueño sin rotar. Sea entonces $f_1 \cong 3f_0$ esta nueva frecuencia. Finalmente se ajusta el estroboscopia para que produzca pulsos luminosos a la frecuencia $2f_1$ y se observa de nuevo caer al aqueño. Se puede notar entonces que el aqueño parece caer sin rotar, pero se le observa como si tuviese seis alas, en lugar de las tres que en realidad tiene. Se observan seis alas debido a que el aqueño es iluminado por dos destellos de luz en dos posiciones sucesivas (Figura 3), separadas por un ángulo de 180° (dos destellos de luz del estroboscopia en cada vuelta completa del aqueño). Este efecto visual ficticio indica que esta nueva frecuencia $2f_1$ es el doble de la frecuencia real de rotación terminal, y que por lo tanto la frecuencia terminal de rotación del aqueño es la previamente observada f_1 . Alguien puede argumentar que la frecuencia podría ser $3f_1$, $9f_1$, $27f_1$, en lugar de f_1 . Pero estas frecuencias son, en la práctica, mayores que 50 Hz, y corresponden a rotaciones que el aqueño difícilmente puede adquirir, o sostener. Por una parte, un observador familiarizado con cuerpos en rotación reconocería inmediatamente que aun $3f_1 \approx 50$ revoluciones por segundo, es una rapidez de rotación muy alta para un aqueño (e.g. compárese con el caso cotidiano de un disco *long-play* de música de 33,3 revoluciones por minuto, el cual rota a sólo 0,55 Hz, o sea a 0,55 revoluciones por segundo). Por otra parte, podemos hacer cálculos sencillos, y aproximados, para demostrar que 50 Hz es una frecuencia de rotación muy alta para un aqueño de *T. caracasana*.

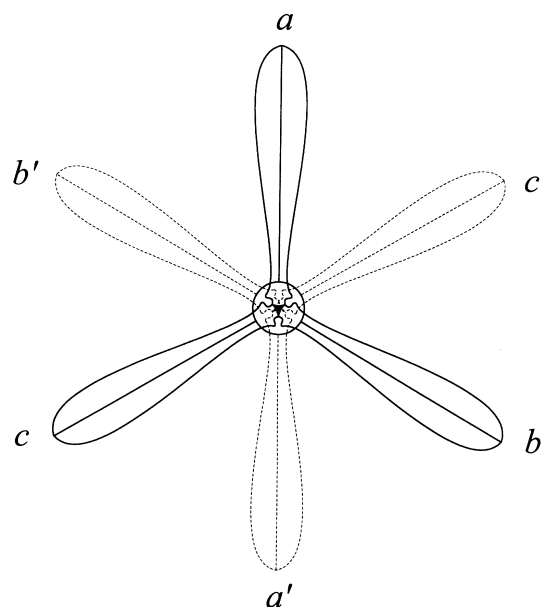


Figura 3. Efecto visual ficticio estroboscópico de un "aqueño de seis alas". Si un aqueño es observado a lo largo de la vertical, y desde arriba, con destellos de luz cuya frecuencia es el doble de la frecuencia de rotación terminal del aqueño, entonces cada ala es observada en dos posiciones diametralmente opuestas durante cada giro, cuya separación angular es 180° .

Así, la distancia radial del centro de masa del ala de un aqueño a su eje de rotación es $b_0 \approx 12$ mm, y a unos 50 Hz la fuerza centrípeta resultante típica sobre un ala del aqueño (dada por el muy conocido producto $m(2\pi 50)^2 b_0$) sería aproximadamente $8,3 \times 10^{-3}$ N (o sea unos 0,85 gf). Esta fuerza puede deformar fácilmente al aqueño mientras rota, pues no se trata en realidad de un cuerpo rígido. Sin embargo, no hemos observado jamás ninguna deformación momentánea significativa, o permanente, en un aqueño rotante. Si alguna deformación instantánea existe, debe ser sin duda muy pequeña (por ejemplo a 16 Hz la fuerza centrípeta resultante sobre un ala de aqueño es menor que $9,2 \times 10^{-4}$ N (o sea unos 0,1 gf), y

es además parcialmente compensada por la pequeña fuerza componente horizontal de la reacción generada por la interacción con el aire mientras el aquenio cae. Por lo tanto concluimos que la frecuencia terminal de rotación del aquenio es, la ya medida, f_1 .

El uso de un estroboscopio para medir rotaciones tiene un componente subjetivo pues es el observador quien decide si ve, o no, descender al aquenio "sin rotar". Con práctica sin embargo, y como lo confirman muchos otros experimentos con estroboscopios, es posible realizar mediciones consistentes de frecuencias de rotación con este tipo de instrumento. Con el objeto de poder obtener evidencia experimental independiente pudimos desarrollar, afortunadamente, un método óptico novedoso basado en un haz de luz láser, para medir la frecuencia de rotación del aquenio, y que ha confirmado que nuestros resultados experimentales obtenidos con el estroboscopio electrónico, son definitivamente confiables. Este tercer método (puramente óptico) será reportado en otro trabajo. La frecuencia de rotación terminal medida de un aquenio en aire es, en definitiva, aproximadamente $f_1 = 17$ Hz (ver la sección **Resultados**).

Descripción del movimiento de dispersión

El vuelo de dispersión del aquenio de *T. caracasana* es un interesante, y complicado, fenómeno natural que muestra características físicas bien definidas, y tan particulares que sugieren la posibilidad de un modelo físico explicativo. El estudio exacto del movimiento del aquenio es sin embargo bastante complejo dada la forma geométrica tan particular que tiene el aquenio, y la combinación de movimientos que ejecuta durante la dispersión. Se observa al aquenio rotar rápidamente como consecuencia de su interacción aerodinámica con el aire, una interacción forzada por la fuerza de gravedad, mientras que su eje principal de simetría se mantiene prácticamente vertical durante todo el vuelo a tierra (aun cuando el aquenio

sea trasladado horizontalmente por viento cruzado). Se nota que las mínimas perturbaciones sobre este eje principal durante la caída (Figura 9), son rápidamente amortiguadas por el aquenio rotante: es evidente que torques muy eficientes, y relativamente grandes, están en juego para lograr tan efectiva amortiguación de la libración del aquenio. Dado que el movimiento vertical ocurre siempre en la dirección del **vector aceleración de gravedad** local, se concluye que ese movimiento es bien un descenso con una cierta aceleración o una caída uniforme. La estructura pasiva del aquenio, i.e. su carencia de un dispositivo motor, determina que la primera hipótesis debe ser estudiada con mucho cuidado. Es claro además que el movimiento de rotación está vinculado al de traslación, pero la explicación de esta correlación no es inicialmente aparente, ni aún a los ojos de un observador bien entrenado.

3. Modelo Analítico

Dada la condición inicial de absoluto reposo de un aquenio, y dadas las velocidades, lineal y angular, terminales constantes que se observaron y midieron en este trabajo (ver sección **Resultados**, más abajo), es necesario concluir que debe existir un régimen transitorio durante el cual el aquenio experimenta aceleraciones variables, tanto lineal como angular (paso de la condición de reposo a la de movimiento estacionario final).

La complejidad de todo el movimiento del aquenio sugiere casi de inmediato la aplicación del formalismo lagrangiano de la mecánica analítica (2, 3) para poder establecer un modelo físico capaz de explicarlo. Se hicieron entonces varias suposiciones básicas simples. Dado que en su vuelo a tierra el aquenio rota con respecto a su eje principal de simetría, el cual permanece prácticamente invariante mientras desciende, suponemos que el aquenio se comporta como un cuerpo rígido cuya rotación se produce con respecto a este eje vertical fijo. En aras de simplificar los cálculos consideramos despreciables tanto la combadura, o alabeo, de

las alas del akenio como su forma arqueada, i.e. nuestro modelo tiene alas planas delgadas y de anchura constante. Como veremos, aún con todas estas simplificaciones, nuestro modelo resulta exitoso.

Como la acción de la fuerza de arrastre del aire sobre un akenio es una fuerza no-conservativa, decidimos aplicar un lagrangiano (2, 3) que tomara en cuenta la existencia de fuerzas de este tipo. Las coordenadas naturales para la descripción del movimiento son: la posición vertical (z) medida desde el punto de partida (Figura 4), y el ángulo azimutal (θ) medido sobre un plano horizontal, desde la punta de una de las alas, y a partir de un eje horizontal inicial arbitrario. La energía potencial inicial de un akenio de masa m está dada por supuesto por la relación $U(z) = -mgz$, donde g denota la aceleración de gravedad. Su energía cinética T es la suma de su energía traslacional y de su energía rotacional (que corresponden al movimiento de traslación con rapidez v , y al movimiento de rotación con rapidez angular ω):

$$T = mv^2/2 + I\omega^2/2 \quad [1]$$

El momento de inercia del akenio, con respecto a su eje principal de simetría, es denotado I . Este momento de inercia permanece invariante durante el vuelo de nuestro modelo de akenio (suposición del cuerpo rígido). Para la evaluación de este momento de inercia consideramos al akenio como un cuerpo de geometría simple: una esfera (el bulbo) y tres barras inclinadas (las tres alas) espaciadas a 120° . Consideremos entonces la ecuación básica (2, 3) del formalismo lagrangiano en presencia de una fuerza disipativa Q_k ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad [2]$$

donde q_k es la coordenada generalizada que se considera, y $L = T - U$ es el lagrangiano del sistema físico (el akenio). Como es usual

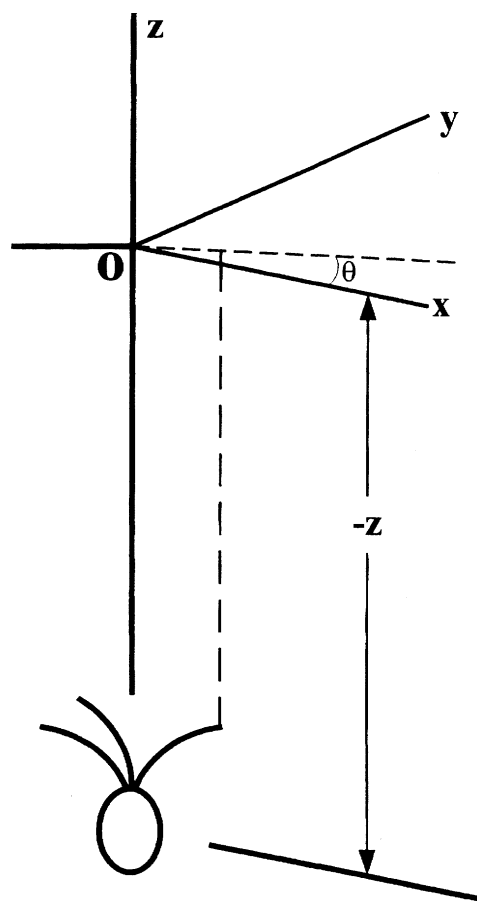


Figura 4. Coordenadas geométricas (z, θ) para el estudio del movimiento del akenio de *T. caracasana*.

denotamos con el símbolo \dot{q}_k a la derivada temporal de la variable generalizada q_k con respecto al tiempo.

Con las expresiones de la energía potencial $U(z)$ y de la cinética $T(v, \omega)$ dadas dos párrafos más arriba, se puede escribir de inmediato el lagrangiano L del sistema:

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2} - mgz \quad [3]$$

Estudio teórico del movimiento vertical

Para el caso del movimiento a lo largo de la vertical la coordenada generalizada es simplemente la coordenada z . El rol de la

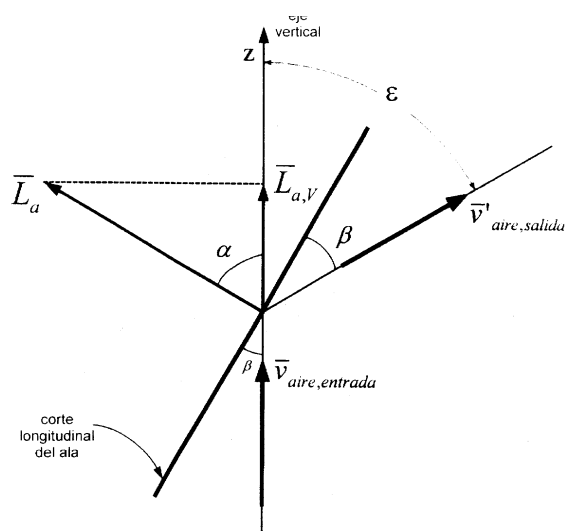


Figura 5. Modelo teórico del ala de un akenio: el ala es modelada como una lámina plana de inclinación β con respecto a la vertical. El vector L_a es la fuerza de levantamiento, o de elevación, aerodinámica y forma el ángulo α con la vertical. En su interacción con el ala, el aire experimenta una desviación angular ϵ .

fuerza disipativa es por supuesto desempeñado por la componente vertical $L_{a,v}$ del denominado *vector fuerza de elevación, o levante aerodinámico*, L_a (4, 7-9). Esta última es la fuerza de reacción, debida a la interacción de las alas del akenio con el aire, mientras éste desciende a tierra. Si se sustituye la expresión del lagrangiano L , dado por la ecuación [3] en la ecuación [2], luego de la evaluación de las dos derivadas necesarias (con respecto a z , y con respecto a la derivada \dot{z}) se obtiene la siguiente ecuación que representa el movimiento vertical de nuestro modelo,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - L_{a,v} \quad [4]$$

Sean entonces ρ la densidad del aire, l la longitud del ala (modelada aquí como una

lámina plana y recta) y sean β , y los ángulos mostrados en la Figura 5. En esa figura el ángulo ϵ es la inclinación del ala con respecto a la vertical, ϵ denota al ángulo total de desviación del flujo de aire al golpear el ala del akenio, mientras que α es el ángulo que forma el vector fuerza de levante aerodinámico L_a con la dirección vertical. Es bien conocido (7, 8) que la magnitud L_a de esta fuerza es proporcional a la densidad del aire, al seno del ángulo de desviación del flujo de aire, al cuadrado $v^2(t)$ de la rapidez relativa, y finalmente al área transversal que ofrece un objeto aerodinámico. En nuestro caso dicha área es $\pi (l \sin \beta)^2$. Entonces la componente vertical $L_{a,v}$ del vector fuerza de levante aerodinámico está dada por,

$$L_{a,v}(t) = 3 \rho (l \sin \beta)^2 \sin(\alpha) \cos(\epsilon) v^2(t). \quad [5]$$

Esta fuerza, donde el factor 3 se debe a que el akenio tiene tres alas, surge del intercambio de momentum del akenio con el aire que golpea sus alas desde abajo, mientras él desciende a tierra. Suponemos que no hay cambio en la rapidez del aire al interactuar con el ala; sólo hay un cambio de dirección de su vector velocidad (Figura 5), lo cual equivale a despreciar el arrastre por fricción. La fuerza de levante aerodinámico depende en la mayoría de los casos del cuadrado de la rapidez con la cual se mueve un cuerpo en un fluido (i.e. depende de $v^2(t)$). En este trabajo, a falta de información más exacta, estamos suponiendo que dicha dependencia cuadrática se cumple. Podría ser que para el ala de un akenio de *T. caracasana* la fuerza de levante aerodinámico aumentara más drásticamente (4, 9) con la rapidez de caída (e.g. el exponente de v en la ecuación [5] podría ser un número entre 2 y 3). Es un asunto que requiere investigación aparte, y que escapa al alcance de este trabajo.

Queremos hacer notar que una reflexión *a posteriori* sobre la ecuación diferencial de movimiento [4] conduce a concluir que dicha ecuación pudo haber sido plan-

teada sin recurrir al formalismo lagrangiano. Pero es claro que la complejidad inicialmente observada en el movimiento del aquenio de *T. caracasana* justifica ampliamente la aplicación de ese formalismo en nuestro estudio.

Luego de sustituir la expresión de la componente vertical $L_{a,v}$ (ecuación [5] en la ecuación [4]) y dado que $v = dz/dt$, se obtiene la ecuación diferencial no-lineal que representa el movimiento del aquenio a lo largo del eje vertical z :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + A \frac{dz}{dt} = B, \quad [6]$$

donde las constantes A y B , que se obtienen en forma simple y directa a partir de las ecuaciones [4] y [5], luego de dividir por la masa m , están dadas por:

$$A = \frac{3(l \sin \theta)^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{m}, \quad [7]$$

$$B = g. \quad [8]$$

La ecuación diferencial [6] de movimiento vertical es del tipo Ricatti (12), muy conocida en matemática, y es una de las dos ecuaciones importantes de este trabajo. En nuestro caso pudimos resolverla en forma exacta, o sea cerrada (ver **Apéndice A**), mediante dos simples cambios de variables y con las condiciones iniciales conocidas, que son por supuesto: posición inicial cero ($z(0) = 0$) y rapidez inicial nula ($v(0) = 0$). Se obtienen así la rapidez vertical $v(t)$ de caída y –luego de un paso adicional de integración exacta– la posición $z(t)$ del aquenio durante su descenso:

$$v(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh(\sqrt{AB} t), \quad [9]$$

$$z(t) = \frac{1}{A} \ln \cosh(\sqrt{AB} t). \quad [10]$$

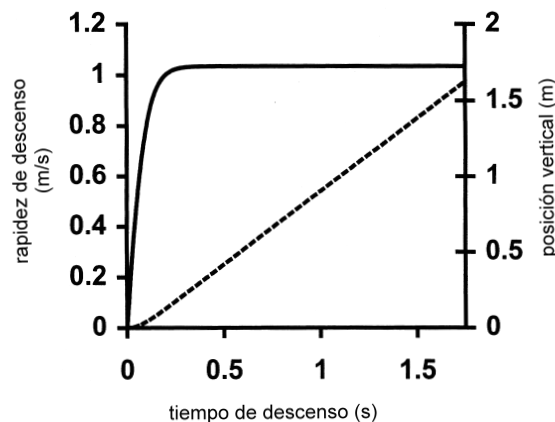


Figura 6. Rapidez vertical (línea continua), y posición vertical (línea punteada) de descenso de un aquenio, en función del tiempo. Se trata de las predicciones dadas por el modelo teórico de aquenio: la rapidez terminal es aproximadamente 1 m/s. Nótese el régimen transitorio no-lineal al inicio del descenso, y que sólo dura unos 0,3 s.

Estas dos funciones aparecen graficadas en la Figura 6 para un aquenio de masa y dimensiones promedio. En ambas curvas se puede apreciar claramente que nuestro modelo teórico de aquenio “cae a tierra” siguiendo un régimen transitorio que evoluciona rápidamente, y en forma continua, hasta un régimen terminal donde la rapidez terminal es aproximadamente 1 m/s. Según la ecuación [9], y conocido que el límite en el infinito de la función \tanh es 1, la rapidez terminal v_t de un aquenio está dada por:

$$v_t = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad [11]$$

El régimen transitorio inicial es claramente visible en la curva $v(t)$ de la Figura 6, y tiene una duración aproximada de aproximadamente 0,3 s. Como veremos más abajo los resultados experimentales demuestran la validez de nuestro modelo teórico, ya que en efecto observamos que para un aquenio real el régimen transitorio dura sólo pocas

décimas de segundo, y que su rapidez vertical alcanza finalmente un valor constante cercano a 1 m/s.

Estudio teórico del movimiento de rotación

Para el estudio de la rotación de los aqenios fue aplicado de nuevo el formalismo lagrangiano. Esta vez se tomó la posición azimutal de la punta de un ala de aqenio, medida con respecto a su posición inicial de reposo, como coordenada generalizada (Figura 4). La rotación del aqenio es determinada por dos torques dinámicos opuestos que actúan sobre él: el torque aerodinámico de rotación, que denotaremos τ_{rot} , y el torque de arrastre que denotaremos τ_d , ambos funciones del tiempo.

El torque aerodinámico de rotación (τ_{rot}) tiene su origen en la interacción del aire en reposo con las alas del aqenio en descenso. Como ya se mencionó en la descripción del aqenio (ver sección **Morfología**) cada ala posee, amén de un ángulo de inclinación con respecto a la vertical, un pequeño ángulo de inclinación lateral (Figura 2) que es su ángulo de ataque (7-10) para "cortar" el aire mientras rota (ver sección **Morfología**). Este ángulo de ataque es usualmente pequeño, y para un aqenio mide aproximadamente 1°-2° con respecto al plano promedio definido por el ala. Esta inclinación adicional determina que el vector fuerza de reacción L_a (Figura 10) está así desviado unos pocos grados con respecto al plano vertical que corta longitudinalmente al ala del aqenio. En consecuencia hay una pequeña componente de fuerza horizontal $L_{a,H}$ sobre cada ala, cuya magnitud es por supuesto $L_{a,H} = L_a \cos \phi$. Son estas fuerzas las que producen el torque rotacional aerodinámico τ_{rot} sobre el aqenio, y lo obligan a rotar mientras desciende.

Si denotamos b_0 al brazo promedio de $L_{a,H}$, medido con respecto al eje de rotación del aqenio, entonces el torque τ_{rot} está dado por (ver **Apéndice B**):

$$\tau_{rot} = 3(L_{a,H} b_0), \quad [12]$$

donde

$$L_{a,H}(t) = L_a(t) \sin \phi = \pi \rho (l \sin \beta)^2 \sin \epsilon \sin \phi v(t)^2 \quad [13]$$

El segundo torque dinámico que actúa sobre el aqenio, y que hemos denominado torque de arrastre τ_d , es consecuencia de la fuerza de arrastre por fricción, causada por el flujo de aire sobre la superficie superior de las alas cuando el aqenio rota. Hemos deducido una expresión matemática para este torque de arrastre mediante integración de la fuerza de arrastre a lo largo de un ala (ver **Apéndice C**):

$$\tau_d(t) = 3 \frac{C_d}{8} (al^4) \sin^3 \omega^2(t), \quad [14]$$

donde a es el ancho del ala, C_d es el coeficiente de arrastre de la superficie del ala con el aire, y finalmente $\omega = d\theta/dt$ es la rapidez angular de rotación.

El formalismo lagrangiano (ecuaciones (2) y (3)) fue aplicado de nuevo, pero esta vez a la coordenada angular θ . Evaluadas las derivadas parciales necesarias, i.e. L/q , $L/\dot{\theta}$ se obtiene la ecuación de movimiento rotacional:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \tau_{rot} - \tau_d \quad [15]$$

Una vez sustituidas, en esta última ecuación, las expresiones de los torques dinámicos, τ_{rot} y τ_d (ecuaciones [12], [13] y [14]), y luego de dividir por el momento de inercia I , se obtiene la segunda ecuación diferencial más importante de este trabajo:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = D \frac{d \theta}{dt} - E v^2(t) \quad [16]$$

Como puede verse para la rotación se obtiene de nuevo una ecuación diferencial

con dos constantes de integración D y E , pero ahora puede notarse que a diferencia de la ecuación [6], en el lado derecho de la ecuación [16] existe un término cuadrático en la rapidez vertical $v(t)$ de descenso. Tenemos así una ecuación diferencial no-lineal mucho más difícil de resolver. La primera constante D de la ecuación [16] se obtiene, a partir del torque del arrastre aerodinámico (ecuación [14]), luego de dividir por el momento de inercia I :

$$D = \frac{3}{8I} C_d (l^4 a) \sin^3 \theta, \quad [17]$$

mientras que la segunda constante E , asociada al torque aerodinámico que favorece la rotación, tiene un valor que está dado por la expresión (ver la deducción en el **Apéndice B**):

$$E = \frac{3}{I} (l \sin \theta)^2 b_0 \sin \theta \cos \theta. \quad [18]$$

Las mediciones hechas sobre los aquenios permiten asignar valores promedio a las variables (l longitud $l = 37$ mm, ancho $a = 7$ mm, inclinación $\theta = 35^\circ$), y así obtener un valor para la constante $D = 4,07 \times 10^{-2}$ de nuestro modelo de aquenio. Hemos asignado el valor $C_d \approx 0,2$ al coeficiente de arrastre, el cual es un valor que resulta razonable para un objeto aerodinámico pero de superficies rugosas, como es el aquenio. La densidad del aire húmedo a la presión atmosférica de 670 Torr y a 26°C es $\rho = 1,05$ Kg/m³ (14). Conocido el brazo promedio medido $b_0 = 12$ mm se puede estimar el valor aproximado, dado por nuestro modelo, para la constante E , que resulta ser $3,862 \times 10^2$ m⁻². Su valor numérico es así mucho mayor que el valor numérico de la constante D ($4,07 \times 10^{-2}$), como en realidad debe ser si es que el aquenio va a comenzar a rotar, cuando parte de la situación inicial de reposo. El torque aerodinámico rotacional debe ser mayor que el torque debido al arrastre del aire.

Hace falta además conocer (ecuación [15]) el momento de inercia del aquenio I ,

con respecto a su eje vertical de rotación. Es casi imposible determinar este parámetro con toda exactitud para un aquenio real. Optamos por modelar el aquenio como un bulbo de forma esférica perfecta, y tres barras iguales e inclinadas el mismo ángulo con respecto al eje principal de simetría del aquenio. A cada barra se le asignó la masa promedio del ala de un aquenio real, y a la esfera se le asignó la masa promedio medida del bulbo. El momento de inercia que se obtiene, luego de aplicar relaciones y fórmulas bien conocidas y tabuladas (13), para barra y esfera, es $4,3 \times 10^{-9}$ Kg-m².

La ecuación diferencial [16] no puede resolverse en forma analítica exacta (forma cerrada) por lo tanto se procedió a resolverla numéricamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden (15, 16), y con la condición inicial conocida para la rapidez angular:

$\dot{\theta}(0) = 0$ para $t = 0$. Para la resolución se utilizó, por supuesto, la misma función $v(t)$ obtenida, ecuación [9], en el estudio de la traslación del aquenio. El análisis numérico permitió así conocer la función rapidez angular $\dot{\theta}(t)$ del aquenio, y además su ángulo total de rotación, $\theta(t)$, luego de una segunda integración numérica, esta vez de la función $\dot{\theta}(t)$. Esta función aparece graficada en la Figura 7. Nuestro modelo teórico predice que un aquenio debe alcanzar una rapidez angular terminal $\dot{\theta}_t$ luego de aproximadamente 0,9 s.

La importante desigualdad ($E v^2 \gg D \dot{\theta}^2$) entre los términos principales de la ecuación [16] corresponde a la desigualdad entre los torques dinámicos que actúan sobre el aquenio, y determina que nuestro modelo teórico de aquenio alcanza rapidez angular constante algo después de haber alcanzado su rapidez terminal de descenso vertical (Figuras 6 y 7). Como se puede apreciar, en esas figuras, el modelo teórico predice una diferencia de alrededor de 0,7 s entre los inicios de los dos regímenes terminales de traslación y rotación.

Con los valores de las constantes D y E dadas en el párrafo anterior, el modelo teóri-

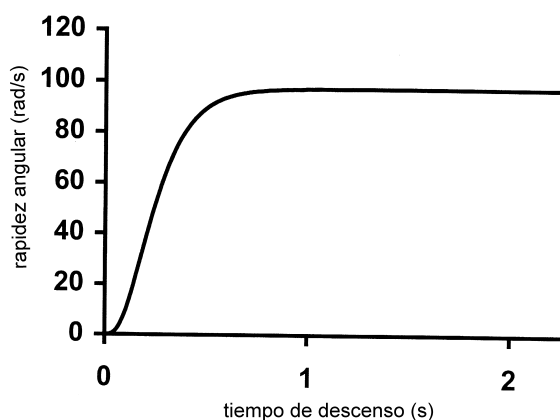


Figura 7. Rapidez angular en función del tiempo, predicha por el modelo teórico de aquenio. La rapidez angular terminal es aproximadamente 97 rad/s, equivalente a 15,4 Hz. Nótese el régimen transitorio no-lineal al inicio del descenso, y que termina a aproximadamente a los 0,9 s.

co predice el valor terminal de rapidez angular $\omega_t = 97,05 \text{ rad/s} = 15,45 \text{ Hz}$. Como veremos en la sección siguiente las mediciones experimentales hechas en el laboratorio, utilizando el método estroboscópico, confirmaron esta predicción.

4. Resultados

Experimento 1. Es muy difícil realizar observaciones sistemáticas y controladas del movimiento del aquenio de *T. caracasana* en su medio natural. La altura (12-20 m) de la copa del árbol y el viento cruzado, a veces turbulento, impiden cualquier estudio sistemático. Como el aquenio tiene tres alas casi iguales y su rapidez de rotación no es despreciable (rota a unas 900 revoluciones por minuto) no es posible medir fácilmente esa rapidez. Por ello decidimos realizar experimentos en aire en calma, en ambiente de laboratorio y con el equipo adecuado que fue descrito en la Sección 2 (**Materiales y Métodos**).

Determinadas las masas de los 12 especímenes de la muestra aleatoria, se proce-

dió a realizar un experimento inicial con el fin de medir su rapidez de descenso, a partir del reposo, con el equipo simple mencionado en la Sección 2, un decámetro y un cronómetro. Se intentaba determinar además la ocurrencia de otras perturbaciones, como por ejemplo si un aquenio se desvía apreciablemente de su línea vertical inicial de descenso. Esto haría más difícil cualquier otro experimento o estudio analítico ulterior. Afortunadamente los aquenios mostraron que, en aire quieto, el movimiento a lo largo de una vertical (i.e. eje de rotación invariante) es suficientemente frecuente como para obtener data experimental confiable. Se observó también que los aquenios son fácilmente arrastrados por viento suave cruzado.

Se elaboró una hipótesis de trabajo basada en un criterio de preservación de especies, mas no en un principio físico: si un espécimen de *T. caracasana* va a maximizar su dispersión, entonces la rapidez de descenso de sus aquenios debe ser relativamente pequeña, de manera que puedan ser acarreados horizontalmente por viento cruzado, a la mayor distancia posible del árbol. Como los aquenios no tienen elementos motores que le produzcan aceleración negativa, entonces deben caer a tierra con movimiento uniforme (aceleración nula). El experimento inicial estaba fundamentalmente destinado a la comprobación de esta hipótesis del movimiento uniforme, imposible de corroborar a simple vista en el medio ambiente natural.

Los primeros resultados experimentales (Tabla 1) corroboraron esta hipótesis del movimiento con rapidez constante baja, pero también mostraron que al comienzo del movimiento se produce un efecto de corta duración, notable, e interesante: en la Figura 8 se muestra un resultado típico experimental para un aquenio de masa total 0,15 g (especimen N° 7). Allí se ha graficado la distancia vertical recorrida por el aquenio versus el tiempo. Puede notarse el régimen de movimiento uniforme, pero el intercepto en el eje de ordenadas no es el origen, lo cual re-

Tabla 1
Desplazamiento vertical del aquenio de *Triplaris caracasana*

Distancia (m)	1	2	3
Medida #	Tiempo medido (s)		
1	1,09	2,24	3,40
2	1,22	2,30	3,33
3	1,10	2,18	3,45
4	1,17	2,42	3,35
5	1,10	2,40	3,47
6	1,13	2,33	3,41
7	1,22	2,39	3,60
8	1,26	2,20	3,60
9	1,32	2,30	3,36
10	1,13	2,40	3,47
Promedio (s)	1,17	2,32	3,44
Dispersión (s)	0,07	0,08	0,09

veló por primera vez que debe existir un corto régimen de movimiento transitorio inicial no-lineal. Este régimen no es susceptible de estudio con nuestro primer método experimental, pero si con el método de localización ultrasónica descrito en **Materiales y Métodos**.

Experimento 2. En la Figura 9 se ha graficado (curva punteada) el descenso de un aquenio real *versus* tiempo, medido experimentalmente mediante el método ultrasónico. Se ha representado además (curva continua) la función del tipo $z(t)$ dada por el modelo teórico (ecuación [10]). La constante B de la ecuación [6], como se demostró arriba, es simplemente el valor local conocido de la aceleración de gravedad, i.e. $B = g = 9,7779 \text{ m/s}^2$. Se ha tomado el valor $A = 7,359 \text{ m}^{-1}$ para la otra constante (que es un valor que se ajusta bien al valor de dicha constante predicho por nuestro modelo). Nótese la casi exacta coincidencia entre los valores experimentales medidos y la curva teórica $z(t)$. Obsérvense las muy pequeñas desviaciones de los datos experimentales con respecto a la curva teórica. Estas se de-

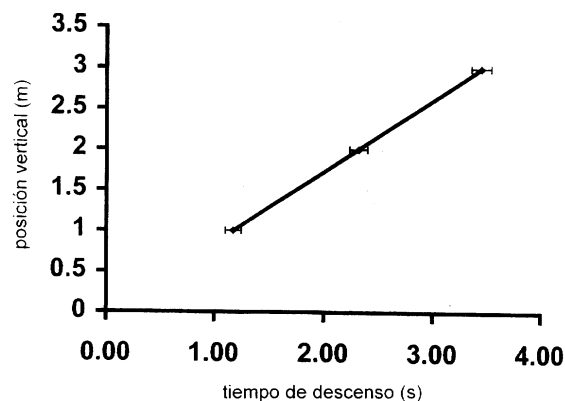


Figura 8. Función posición vertical de un aquenio real en descenso: nótese el intercepto negativo de la línea recta que representa el desplazamiento. La medición fue hecha con el método preliminar (decámetro y cronómetro) que a pesar de su relativa escasa exactitud muestra claramente el régimen terminal. La data graficada corresponde a un promedio de 10 experimentos.

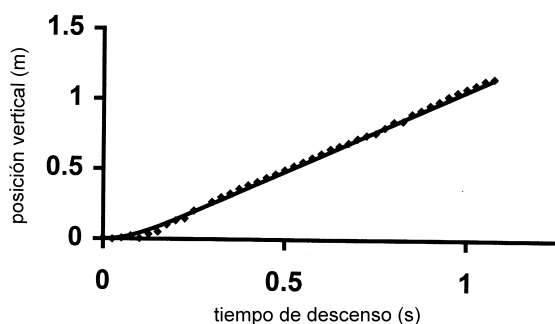


Figura 9. Función posición vertical de un aqueño real en descenso, medida con el método de localización ultrasónico. La curva continua es la dada por el modelo teórico.

ben muy probablemente a pequeñas oscilaciones del eje de rotación del aqueño al descender en el aire. El eje de rotación del modelo teórico fue supuesto invariante, pero en el aqueño real que cae a tierra ese eje no permanece exactamente fijo.

Experimento 3. Al medir la rapidez angular terminal de diez aqueños con el método estroboscópico (ver sección **Métodos**) se obtuvo el valor terminal de la rapidez angular $\dot{\theta} = 17,1 \pm 2,1$ rad/s, que de nuevo confirma la validez del modelo desarrollado para la rotación del aqueño (Figura 7).

5. Discusión

El aqueño de *T. caracasana* realiza un interesante y curioso vuelo de dispersión que a primera vista parece ser una simple combinación de rotación y traslación. Pareciese incluso que es la rotación la que determina de alguna manera su movimiento de descenso vertical. En este trabajo se ha demostrado que en realidad su rotación es inducida por el torque aerodinámico que generan las alas del aqueño en su interacción con el aire, a medida que éste desciende. Hemos medido experimentalmente, y con aceptable precisión y exactitud, tanto la rapidez vertical terminal como la rapidez angular terminal del aqueño. Hemos descu-

bierto que el vuelo de dispersión consta de dos regímenes claramente diferenciados: un corto régimen inicial no-lineal seguido de un régimen terminal uniforme. A partir de un conjunto de suposiciones básicas (e.g. el bulbo es esférico, las alas son planas, el eje de rotación es invariante y vertical) y del formalismo lagrangiano de la mecánica analítica, se ha elaborado un modelo teórico que es capaz de predecir tanto el comportamiento no-lineal como el lineal del aqueño durante su descenso vertical. Nuestro modelo nos ha permitido predecir el régimen terminal de un aqueño real dado con buena exactitud: los aqueños caen a tierra con rapidez terminal promedio de 1 m/s. El valor real varía según las características de cada aqueño (masa, longitud e inclinación de las alas) y, enfatizamos, que coincide con el valor promedio medido experimentalmente. El modelo predice una rapidez angular terminal de unas 16 R.P.S. bajo la suposición razonable de un coeficiente de arrastre ($C_d = 0,2$). Los valores medidos por nosotros en el laboratorio, con aqueños reales, arrojaron un valor promedio de $17,1 \pm 1,2$ R.P.S.

Es muy difícil determinar el valor del importante coeficiente de arrastre C_d , para las superficies de un aqueño real. Una determinación exacta de su valor requiere de técnicas experimentales aerodinámicas que escapan al alcance de este trabajo. Sabemos que para objetos que tienen perfil aerodinámico (9), el coeficiente C_d es mucho menor que si el objeto careciese de tal perfil ya definido sobre sí mismo, e.g. $C_d = 0,001$ para el ala de un *jet* moderno, mientras que para una esfera, en un flujo laminar transversal cuyo número de Reynolds (9-11) sea 3000 el valor es mucho mayor: $C_d = 0,7$ (9). Para el ala de un insecto grande, la langosta del desierto (9), el coeficiente de arrastre es sólo 0,1. Es importante destacar la rápida amortiguación que el aqueño aplica a la libración de su eje de rotación; este hecho permite concluir que la estrategia que *T. caracasana* ha desarrollado para su dispersión está dirigida a mantener el eje de rotación de los

aquenos en dirección vertical para que el bulbo, que contiene la semilla, sea la parte del aquenio que primero toque tierra, y que lo haga rotando como si fuese un tornillo que se va a enroscar en ella. Es claro también que ésta es una estrategia dirigida a dominar regímenes de flujo turbulento moderado a que pueda verse sometido el aquenio ambientes de selva de vientos como las del Norte de Venezuela (la conservación de un relativo alto valor del momentum angular garantiza que el eje de rotación se mantiene vertical en viento turbulento moderado).

Finalmente, hemos descubierto que algunos aquenos son dextrógiros, i.e. rotan con su vector velocidad angular orientado hacia arriba, o suelo, mientras que otros son levógiros, o sea giran con su vector velocidad angular vertical en la dirección opuesta. Dado que los aquenos se desarrollan independientes, unos de otros, en la copa del árbol, esta diferenciación debe en principio tener un origen básico, quizás genético, que determine diferenciación en la inclinación lateral de las alas de los aquenos. Es un tema que amerita investigación aparte.

APÉNDICE A

Resolución de la Ecuación Diferencial de Traslación

Luego de realizar el cambio de variable dado por las ecuaciones,

$$v \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} \frac{d^2z}{dt^2}$$

la ecuación diferencial [6] de traslación vertical se escribe,

$$\frac{dv}{dt} = B - Av^2 \quad \frac{dv}{1 - \frac{A}{b}v^2} = B dt$$

Con el siguiente segundo cambio de variables, y luego de diferenciar,

$$\sqrt{\frac{A}{B}} v \cos(w) = \sqrt{\frac{A}{B}} dv \quad \text{sen } w \, dw,$$

nuestra ecuación diferencial adquiere una forma que permite integrarla de inmediato:

$$\frac{dw}{\text{sen } w} = -\sqrt{AB} dt \Leftrightarrow \ln \left[\tan \left(\frac{w}{2} \right) \right] = -\sqrt{AB} t + \ln c,$$

donde c es una constante cuyo valor podemos determinar a partir de las condiciones iniciales conocidas: $t = 0 \Leftrightarrow v(0) = 0 \Leftrightarrow \cos w = 0 \Leftrightarrow w = \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto $c = 1$ y la solución exacta de la ecuación diferencial (6) es:

$$\exp(\sqrt{AB} t) = \tan \frac{w}{2}.$$

Con la aplicación de la conocida relación trigonométrica, entre el coseno de un ángulo y la tangente de su ángulo medio:

$$\tan \frac{w}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos w}}{\sqrt{1 + \cos w}},$$

y luego de un simple

re-arreglo algebraico se obtiene finalmente la función que representa a la rapidez de descenso del aquenio con respecto al tiempo:

$$v(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh(\sqrt{AB} t)$$

que a su vez puede ser integrada inmediatamente para encontrar la función posición vertical $z(t)$ dada por la ecuación [10].

APÉNDICE B

Evaluación del Torque Aerodinámico de Rotación

Este torque es producto de la fuerza de elevación, o levante aerodinámico, L_a , sobre el ala del aquenio. Esta fuerza se debe a la acción que el aquenio ejerce sobre el aire mientras desciende a tierra. Como se explicó en la Sección 2 (**Morfología**), el ala de un

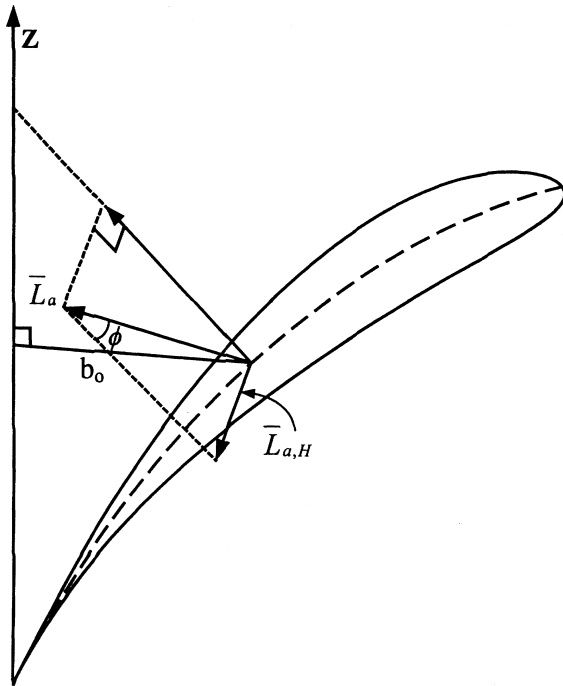


Figura 10. La componente horizontal $L_{a,H}$ (de la fuerza de levante aerodinámico L_a) es la que produce el torque aerodinámico rotacional del aqenio.

aqenio está inclinada (Figura 2), un ángulo $(90^\circ + \beta)$, donde $\beta = 2^\circ$, con respecto al plano vertical que pasa a lo largo de la nervadura central del ala. En consecuencia esta fuerza de reacción L_a no corta al eje de rotación del aqenio y tiene una componente horizontal $L_{a,H}$ que se cruza con dicho eje (Figura 10). La componente horizontal $L_{a,H}$ se encuentra proyectando a la fuerza L_a sobre la dirección horizontal, i.e. $L_{a,H} = L_a \sin \beta$. Es bien conocido (7, 10) que la magnitud de la fuerza de elevación aerodinámica, proporcional al cuadrado de la rapidez de descenso $v(t)$, está dada por:

$$L_a = 3 \rho (l \sin \beta)^2 (\sin \beta) v^2(t)$$

Al multiplicar por el brazo b_0 (Figura 10) y proyectar sobre la dirección horizontal (equivale al factor adicional $\sin \beta$) se obtiene el entonces el torque aerodinámico

total debido a las tres alas (ecuaciones [12, 13]).

APENDICE C Evaluación del Torque de Arrastre

La fuerza de arrastre es causada por la fricción del aire sobre la superficie superior del ala rotante del aqenio. La fuerza de arrastre de un fluido sobre un objeto ha sido exhaustivamente estudiada (8-10). Es una fuerza proporcional a la densidad del aire ρ , al área de la superficie sobre la que fluye el aire, y al cuadrado (u^2) de la rapidez del objeto con respecto al fluido. Denotemos con a al ancho (o cuerda) del ala, y con l a su longitud, y consideremos el elemento de ala de longitud dl (Figura 11) cuya distancia radial al eje de rotación del aqenio es r . Si la rapidez de rotación del aqenio es ω , entonces la rapidez tangencial de este elemento diferencial es simplemente $u(r) = \omega r$. El elemento diferencial de torque de arrastre sobre este elemento del aqenio está dado simplemente por:

$$d\tau_d(r) = r \frac{C_d}{2} (\rho a dl) u^2(r)$$

Pero como se deduce inmediatamente de la Figura 11,

$$dl = \frac{dr}{\sin \beta}$$

que reemplazado en la relación anterior, e integrando a lo largo del ala (entre los límites 0 y $l \sin \beta$), permite encontrar la expresión del torque de arrastre sobre las tres alas del aqenio:

$$\tau_d(t) = 3 \frac{C_d}{2} \rho a^2 (t) \csc(\beta) \int_0^{l \sin \beta} r^3 dr,$$

y finalmente

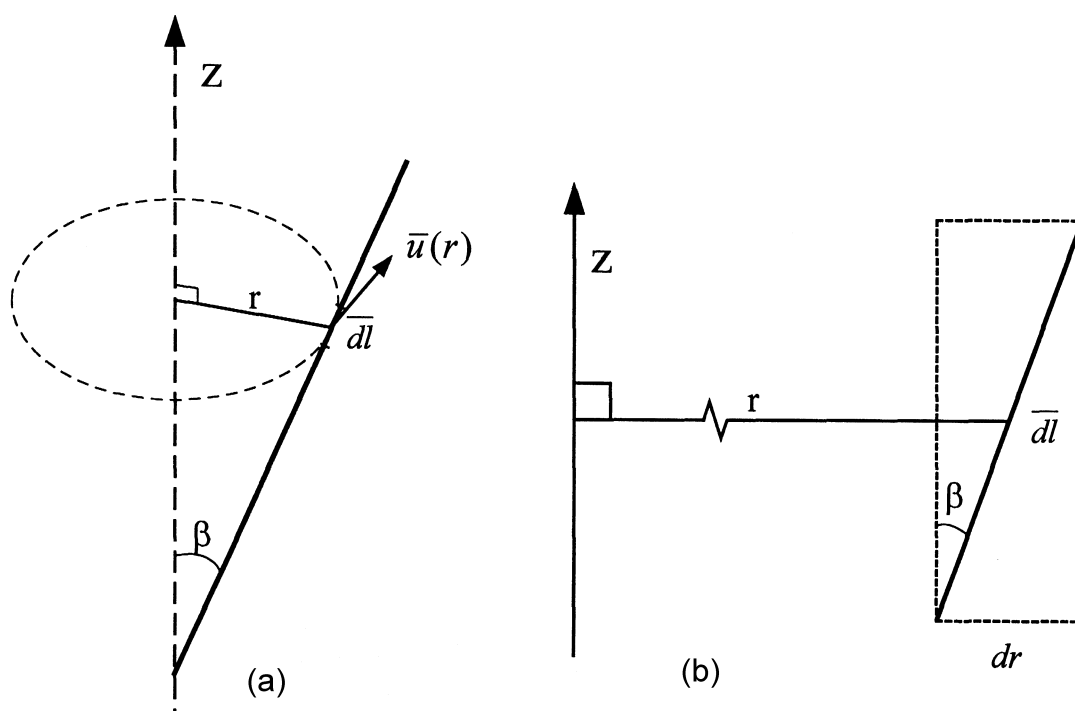


Figura 11. Origen del torque de arrastre sobre el ala de un akenio rotante: (a) el elemento diferencial de ala, cuya longitud es dl , rota con velocidad $u(r)$ alrededor del eje vertical z . La inclinación del ala con respecto a la vertical es el ángulo β ; (b) Relación entre dl y el elemento diferencial de distancia radial dr .

$$d(t) = 3 \frac{C_d}{8} a l^4 \sin^2 \beta (t)^2.$$

Referencias Bibliográficas

- HOYOS J. **Los Arboles de Caracas**, Soc. Ciencias Naturales La Salle: Mon. **24** pp. 262-264, Caracas 1979.
- FOWLES G.R. **Analytical Mechanics**, 3^a Ed., Holt, Rinehart and Winston, New York (USA), pp. 251-257, 1977.
- GOLDSTEIN H. **Classical Mechanics**, 2^a Ed., Addison-Wesley, Reading, Ma. (USA), pp. 14-29, 1966.
- DE MESTRE N. **The Mathematics of Projectiles in Sport**, Lecture Series **6**, Australian Math. Soc. Cambridge University Press, Cambridge (Gran Bretaña), pp. 39-55, 1990.
- SCHLICHTING H., UCKE C. **Physik** 25: 79-80, 1994.
- SWAINE M.D., BEER T. **New Phytol** 78: 695-708, 1977.
- WALTHAM C. **Phys Teach** 36: 457-462, 1998.
- HOUGHTON E.L., BROCK A.E. **Aerodynamics**, 2nd Ed. Arnold, London (Gran Bretaña), pp. 65-105, 1970.
- VOGEL S. **Life's devices: The Physical World of Animals and Plants** Princeton University Press, Princeton (USA), pp. 130-157, 1988.
- STREETER V.L., WILYE E.B. **Fluid Dynamics**, 8^a Ed., McGraw-Hill, New York (USA), pp. 243-277, 1986.
- KUNDU P.K. **Fluid Mechanics**, Academic Press, San Diego (USA), pp. 547-578, 1990.
-

-
- DAVIS H.T. **Introduction to Nonlinear Differential Equations**, Dover, New York (USA), pp. 57-76, 1962.
13. HUDSON R.G. **The Engineer's Handbook**, 2^a Ed. John Wiley, New York (USA), pp. 87-93, 1961.
- 14.
- Handbook of Chemistry and Physics**, The Chemical Rubber Pub. Co., 44th. Ed., Cleveland (USA), 2200-2204, 1962.
15. SHAMPINE L.K., GORDON M.K. **Computer Solutions of Ordinary Differential Equations**, Freeman, San Francisco (USA), 1975.
16. PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., FLANNERY B.P. **Numerical Recipes in C**, Cambridge University Press, New York, pp. 710-714, 1992.