CIENCIA 14(3), 305 - 308, 2006
Maracaibo, Venezuela

Teoría de calibre *GL*(3,*R*) de la gravedad acoplada con un campo electromagnético

Rolando Gaitan* y F. Vera

[†] Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. A.P. 129 Valencia 2001, Edo. Carabobo, Venezuela.

Recibido: 23-03-06 Aceptado: 27-06-06

Resumen

Se estudia la consistencia de la teoría de calibre *GL*(3,*R*) de la gravedad acoplada con un campo electromagnético como fuente externa. Se muestra que las posibles restricciones sobre el campo de Maxwell pueden ser evitadas mediante la introducción de campos auxiliares.

Palabras clave: Formulación lagrangiana; gravitación; teoría de calibre.

GL (3, R) gauge theory of gravity coupled to an electro magnetic field

Abstract

Consistency of *GL*(3,*R*) gauge theory of gravity coupled with an external electromagnetic field, is studied. It is shown that possible restrictions on Maxwell field can be avoided through introduction of auxiliary fields.

Key words: Gauge theory; gravitation; lagrangian formulation.

I. Introducción

Entre las diversas formulaciones de calibre para la gravitación, consideramos la que parte de pensar en el grupo *GL*(3,*R*) como grupo de calibre (1, 2), y dentro de la cual ya es conocido un esquema covariante de interacción con materia en un espacio con torsión (2). Aquí, enfocaremos nuestra atención en examinar la consistencia entre la teoría de Einstein (TE) y la formulación de calibre de la gravedad acoplada con el electromagnetismo, en un espacio 2+1 dimensional con torsión no necesariamente nula. Allí, la definición estándar del campo de Maxwell dependerá del potencial vector y la torsión, haciendo que la fuente de gravitación, proporcionada por el tensor momento-energía electromagnético dependa de la conexión, siendo esto una extensión del modelo discutido en la referencia (2) a un caso particular de una formulación con términos de autointeracción hasta de orden cuatro en la conexión.

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 revisamos la formulación de calibre de la gravedad sobre el fibrado de referenciales. Seguidamente, la acoplamos con los campos de Maxwell y auxiliares, verificándose la consistencia con la TE en el límite de torsión nula. Finalizamos con las conclusiones.

II. Formulación de calibre *GL*(3,*R*) de la gravedad

Sea un fibrado de referenciales con grupo *GL*(3,*R*), definido sobre un espacio-tiempo 2+1 dimensional como variedad diferencial base, *M*

* Autor para la correspondencia. E-mail: rolandogd@hotmail.com

provista con una métrica $g_{\mu\nu}$ y coordenadas curvilíneas x^{μ}, y sobre la cual definiremos una acción dada mediante $S=\int_M d^3x\sqrt{-g}L$. La 1-forma de conexión será pensada como un objeto independiente de la métrica y es introducida mediante $(A_\lambda)^{\mu}{}_{\nu}\equiv\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$, donde $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$ es la conexión afín que permite definir la derivada covariante, ∇_μ, el tensor de torsión, $T^{\mu}_{\lambda\nu}=(A_\lambda)^{\mu}_{\nu}-(A_\nu)^{\mu}_{\lambda}$ y el tensor de curvatura, $R^{\sigma}_{\alpha\mu\sigma}\equiv(F_{\mu\nu})^{\sigma}{}_{\alpha}=\left(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu+[A_\mu,A_\nu]\right)^{\sigma}{}_{\alpha}$. Así, la densidad Lagrangiana invariante de calibre $GL(3,R)$ del modelo libre en el límite de torsión nula es

$$L_o=-\frac{k}{4}trF^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}+kC_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\lambda\sigma}(A_\lambda)^{\alpha}{}_{\sigma}, \qquad [1]$$

donde k posee dimensiones de longitud y los $C_{\alpha\beta}$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de torsión. El modelo podría ser cosmológicamente extendido si se agregase a [1] un término Lagrangiano de la forma "$k\lambda^2$" [2], con λ la constante cosmológica.

Las variaciones en la conexión y la métrica proporcionan las ecuaciones de campo siguientes

$$\nabla_\alpha R_{\lambda\sigma}-\nabla_\sigma R_{\lambda\alpha}=0 \qquad [2]$$

$$8R_{\sigma\mu}R^{\sigma}{}_{\nu}-8RR_{\mu\nu}-4g_{\mu\nu}R_{\sigma\lambda}R^{\sigma\lambda}+3g_{\mu\nu}R^2=0, \qquad [3]$$

las cuales conducen a una solución plana de la forma $F_{\alpha\beta}=0$, en consistencia con lo ocurrido en la teoría de Einstein libre en 2+1 dimensiones.

III. Acoplamiento con los campos de Maxwell y auxiliares

En primer lugar, es sabido que el campo electromagnético se acopla naturalmente con la torsión ya que, si α_μ es el trivector potencial electromagnético, entonces el tensor de Maxwell es

$$f_{\mu\nu}=f^{(o)}_{\mu\nu}+a_\lambda\varepsilon^{\rho\alpha\beta}\varepsilon_{\rho\mu\nu}(A_\alpha)^{\lambda}{}_{\beta}, \qquad [4]$$

donde $f^{(o)}_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu$ y $\varepsilon^{\rho\alpha\beta}$ es el (pseudo) tensor de Levi-Civita. Con [4] se definen la bien conocida densidad Lagrangiana de Maxwell (L_M) y el tensor momento-energía simétrico, dado por

$$T^{(M)}_{\mu\nu}=\psi_{\mu\nu}-\frac{g_{\mu\nu}}{4}\psi. \qquad [5]$$

donde hemos introducido la notación $\psi_{\mu\nu}\equiv f_{\mu\sigma}f^{\sigma}_{\nu}$ y $\psi\equiv f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}$.

Siguiendo a (2), consideramos el modelo completo de la densidad Lagrangiana con acoplamiento no minimal covariante entre el electromagnetismo y la gravitación, considerando la presencia de la conexión auxiliar ($\mathbf{W}_\alpha$), en el límite de torsión nula

$$L=L_0+\kappa\ell-8\pi G\kappa\tau\rho\mathrm{M}^{\alpha*}F_\alpha+\kappa tr\mathbf{J}^{\alpha}(\mathbf{A}_\alpha\mathbf{W}_A)$$
$$+\kappa tr\mathbf{H}^{\alpha\beta}(\mathbf{A}_\alpha-\mathbf{W}_\alpha)(\mathbf{A}_\beta-\mathbf{W}_\beta) \qquad [6]$$

donde ℓ es la densidad Lagrangiana del campo electromagnético con correcciones de segundo orden, según los parámetros b_1 y b_2

$$\ell\equiv L_M+b_1T^{(M)2}+b_2T^{(M)}_{\mu\nu}T^{(M)\mu\nu}. \qquad [7]$$

Las componentes del tensor de acoplamiento $\mathbf{M}^{\mu}$ poseen una dependencia lineal en $T^{(M)}_{\mu\nu}$, y están dadas por

$$(\mathbf{M}^{\alpha})^{\mu}{}_{\nu}=\left[c_1\varepsilon^{\alpha\mu}{}_{\nu}g^{\sigma\rho}+c_2\varepsilon^{\alpha\rho}{}_{\nu}g^{\sigma\mu}+c_3\varepsilon^{\alpha\mu\rho}\delta^{\sigma}{}_{\nu}\right]$$
$$T^{(M)}{}_{\sigma\rho}+a\varepsilon^{\alpha\mu}{}_{\nu}, \qquad [8]$$

donde c_1, c_2, c_3 y α son parámetros libres, y $^*F_\alpha$ es el dual de Poincaré de la curvatura de Riemann, dado por $^*F_\alpha=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Los tensores de acoplamiento con los campos auxiliares, se definen como

$$(\mathrm{J}_\beta)_{\mu\nu}\equiv(d_1+d_2\psi)\varepsilon_{\beta\mu\nu}, \qquad [9]$$

$$(\mathrm{H}^{\alpha\beta})^{\mu\nu}\equiv a_1g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}+a_2g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}+a_3g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} \qquad [10]$$

donde d_1, d_2, a_1, a_2 y a_3 son parámetros libres.

Es de comentarse los siguientes aspectos de la acción [6]. La densidad Lagrangiana ℓ considera la densidad de Maxwell más contribuciones de segundo orden en el tensor momento-energía que equivalen a segundo orden en el tensor $\psi_{\mu\nu}$. Por otro lado, el término Lagrangiano de acoplamiento "$8\pi G\kappa tr\mathrm{M}^{\alpha}F_{\alpha}$", es construido de una manera covariantemente explícita y proporciona un término de acoplamiento minimal más otro no minimal de tipo "Proca". Esto último sugiere la forma de los términos Lagrangianos de acoplamiento con el campo auxiliar $\mathbf{W}_{\alpha}$.

Seguidamente, la ecuación de movimiento de la conexión auxiliar es de la forma $\mathbf{J}^{\beta}+\mathbf{H}^{\alpha\beta}\left(\mathbf{A}_{\alpha}-\mathbf{W}_{\alpha}\right)+\left(\mathbf{A}_{\alpha}-\mathbf{W}_{\alpha}\right)\mathbf{H}^{\beta\alpha}=0$, por lo cual se considera el siguiente ansatz para los campos W_{α}.

$$\left(\mathbf{A}_{\alpha}-\mathbf{W}_{\alpha}\right)_{\mu\nu}=\left(\theta_1+\theta_2\psi\right)\varepsilon_{\alpha\mu\nu}, \qquad [11]$$

con la relación de consistencia $d_n=2a_{21}\theta_n$ para $n=1,2$ y $a_{21}=a_2-a_1$. Entonces, la ecuación de la conexión $GL(3,R)$, evaluada sobre la de los campos auxiliares es

$$\begin{aligned}&\nabla_{\nu}\left(R^{\alpha\mu}-8\pi Gc_1g^{\mu\nu}T^{(M)}-8\pi Gc_2T^{(M)\alpha\mu}\right)\\&-\nabla^{\mu}\left(R^{\alpha}{}_{\nu}-8\pi Gc_1\delta^{\alpha}{}_{\nu}T^{(M)}-8\pi Gc_3T^{(M)\alpha}{}_{\nu}\right),\\&+8\pi G\nabla_{\beta}\left(c_2\delta^{\alpha}{}_{\nu}T^{(M)\mu\beta}-c_3g^{\alpha\mu}T^{(M)\beta}{}_{\nu}\right)+\kappa^{-3}\varepsilon^{\lambda\alpha\mu}\tilde{C}_{\lambda\nu}=0 \qquad [12]\end{aligned}$$

donde se han redefinido los multiplicadores de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\lambda\nu}\equiv C_{\lambda\nu}&+\left(1-2\left(b_1-b_2\right)T^{(M)}-88\pi GR\right)\\&a_{\nu}{}^{*}f_{\lambda}-8\left(b_2T^{(M)\rho}{}_{\mu}\right)\varepsilon_{\lambda\sigma\rho}a_{\nu}f^{\mu\sigma} \qquad [13]\end{aligned}$$

Demandando la consistencia de [12] con las ecuaciones de la TE, se fijan los parámetros $c_1=-c_2=-c_3=1$ (como en el caso del acoplamiento con un campo escalar real discutido en la referencia (2) y además que el tensor $T^{(M)}{}_{\alpha\beta}$ sea covariantemente conservado, con lo cual se obtiene $\tilde{C}_{\lambda\nu}=0$ y de [13] se obtienen los multiplicadores de Lagrange originales en relación directa con el campo de Maxwell.

Las variaciones en la métrica de la acción [6] proporcionan una ecuación, que al evaluarla sobre [13] toma una forma polinomial de segundo orden en el tensor $\psi_{\mu\nu}$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}&\left(-8b_1-24b_2+24(8\pi G)^2-768a_{21}\theta_1^2\right)\psi\psi^{\rho\sigma}\\&+\left(b_1+3b_2-17(8\pi G)^2+32a_{21}\theta_2^2\right)\psi^2g^{\rho\sigma}\\&+\left(16-32(8\pi G)^2a-768a_{21}\theta_1\theta_2\right)\psi^{\rho\sigma}\\&+\left(-4+8(8\pi G)^2a+192a_{21}\theta_1\theta_2\right)\psi g^{\rho\sigma}\\&+96a_{21}\theta_1^2g^{\rho\sigma}=0 \qquad [14]\end{aligned}$$

pudiéndose establecer condiciones sobre los parámetros libres, dadas por

$$b_1+3b_2=3(8\pi G)^2, \qquad [15]$$

$$a_{21}\theta_2^2=14(8\pi G)^2, \qquad [16]$$

$$\theta_1=0, \qquad [17]$$

$$2(8\pi G)^2a=1, \qquad [18]$$

de tal manera que [14] es satisfecha idénticamente para todo $\psi_{\mu\nu}$, y por tanto el acoplamiento es consistente.

IV. Conclusión

El esquema de acoplamiento no minimal en la formulación de calibre de tipo Yang-Mills proporciona los términos necesarios de tal manera que es suficiente una elección particular de los parámetros libres para que la ecuación de movimiento de la conexión sea consistente con la TE. Por otro lado, esto resalta el hecho de que un acoplamiento minimal es inconsistente por sí solo en este tipo de formulación. No obstante, subrayamos que en relación con la ecuación de campo de la métrica, la fijación de parámetros no es suficiente y se hace necesaria la presencia de los campos auxiliares, de lo contrario aparecen restricciones polinomiales de orden dos sobre $\psi_{\mu\nu}$. Es posible escoger los parámetros indeterminados, b_1 y b_2 a partir de [15] de tal manera que la teoría de Maxwell libre es recuperada, es decir $\ell \to L_M$, cuando se desacopla la gravitación ($G \to 0$).

Referencias Bibliográficas

1. MANSOURI F., CHANG L.N. ***Phys Rev*** D13 12: 3192-3200, 1976.
2. GAITAN R. ***Mod Phys Lett*** A18: 1753-1762, 2003.