CIENCIA 16(2), 215 - 219, 2008
Maracaibo, Venezuela

Sobre la enseñanza de la función de Green Neumann*

Eder Valdeblanquez[1,2]**, *Sergio Rojas*[3] *y Pablo Martin*[3]

[1]*Ciclo Básico, Departamento de Física, Apartado 4011- A 526.* [2]*Centro de Investigación de Matemáticas Aplicadas, CIMA, Apartado 10486. Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, Maracaibo, estado Zulia, Venezuela.* [3]*Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Apartado 89000, Caracas 1080A, Venezuela.*

Recibido: 30-11-05 Aceptado: 10-04-06

Resumen

Ejemplos ilustrativos del formalismo de Green (técnica de función de Green) para resolver la ecuación de Poisson con condiciones de bordes tipo Neumann sustituirán un vacío sobre el tópico en la literatura de la enseñanza relacionada con el tema, en la cual se tratan principalmente las condiciones de borde tipo Dirichlet.

Palabras claves: función de Green Neumann, ecuación de Poisson.

On teaching Neumann Green's function

Abstract

Illustrative examples of the Green formalism (Green function technique) to solve the Poisson equation with Neumann Boundary Condition will fill an existing gap on the topic in the teaching literature related to the subject, on which mainly Dirichlet boundary conditions are dealt with.

Key words: Neumann Green's function, Poisson's equation.

Introducción

Las funciones de Green son usadas en muchos temas de la física clásica y cuántica en los cuales su estructura depende de los sistemas dinámicos, mas no de la forma de la fuerza aplicada, y pueden ser usadas para formular clásicamente la teoría de *scattering* de las ondas; es por ello que la ecuación de Schrodinger tiene una forma similar a la ecuación de onda (1).

En electrodinámica cuántica (QED) es claro por qué las funciones de Green juegan un papel natural y fundamental en la teoría de partículas, en la que las interacciones entre partículas son eventos de *scattering* múltiples complicados, en los cuales las fuerzas son trasmitidas por campos cuánticos. La propagación de los campos entre los eventos es precisamente el objetivo para el que la función de Green fue originalmente descrita; es por eso que las funciones de Green son llamadas frecuentemente propagadores de Feynman en la física de partículas, son bien tratadas en (2) y están entre las herramientas de trabajo más comunes del análisis teórico en la física cuántica moderna.

* Trabajo presentado en el V Congreso de la Sociedad Venezolana de Física, Universidad del Zulia. Nucleo Punto Fijo - Edo. Falcón, Venezuela, Noviembre 2005.

** Autor para la correspondencia. E-mail: eder@luz.edu.ve.

La técnica de la función de Green es una herramienta muy útil para resolver la ecuación de Poisson (3) o ecuaciones diferenciales parciales, todas muy similares al describir fenómenos eléctricos, magnéticos, mecánicos y térmicos (así como también ecuaciones diferenciales ordinarias), siendo su uso de extrema utilidad cuando los problemas considerados son muy elaborados, problemas que, en muchos de los casos, son más complicados que los encontrados en los textos de estudios (4, 5, 6, 7). Una de las ventajas de este método es que es capaz de desarrollar una solución aproximada a problemas para los cuales no se puede tener una solución exacta. La técnica de la función de Green, en muchas de sus aplicaciones, se trata con las condiciones de borde tipo Dirichlet, que en problemas electrostáticos son simétricas en sus argumentos (8, 9), y la propiedad de simetría es frecuentemente muy útil en la construcción de una representación explícita de la función de Green.

Un artículo de 1993, escrito por Kim y Jackson (10), muestra cómo obtener funciones de Green simétricas con condiciones de bordes tipo Neumann. El artículo sugiere una aplicación importante usando estas funciones de Green, para la cual la simetría puede ser impuesta como un requisito adicional y en la que se desarrolla una función de Green esférica, tipo Neumann simetrizada.

Los problemas electrostáticos, aun con condiciones de bordes tipo Neumann, se tratan con otras técnicas que muy bien muestra el libro de Jackson (3), pero en este artículo ilustraremos una técnica no usual que será de gran ayuda para los estudiantes sobre el aprendizaje de la función de Green (10, 11, 12) y que mostrará que la función de Green tipo Neumann es también una herramienta muy útil para resolver la ecuación de Poisson cuando las condiciones de bordes no son tipo Dirichlet.

Teoría

Se ilustrará un método para resolver problemas electrostáticos con condiciones de bordes tipo Neumann, en el que la función de Green tipo Neumann, con dependencia radial para esferas concéntricas, tiene la siguiente expresión [1]

$$g_l(\vec{r},\vec{r}') = \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} + \frac{1}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \left[\frac{(l+1)}{l}(rr') + \frac{l}{(l+1)}\frac{(ab)^{2l+1}}{(rr')^{l+1}} + a^{2l+1}\left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} + \frac{r'^l}{r^{l+1}}\right)\right] \quad [1]$$

Esta función de Green se utiliza para encontrar la solución interior y exterior de la ecuación de Poisson $\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$, con la condición de frontera tipo Neumann. En este artículo utilizaremos la siguiente condición de frontera del potencial electrostático con dependencia acimutal

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_s = \frac{\Phi_0}{R}\cos\theta \quad [2]$$

En la electrodinámica clásica, la expresión integro diferencial de la ecuación de Poisson es

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\in_0}\int_V \rho(\vec{r})G_N(\vec{r},\vec{r}')d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G_N(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial n'}\right]da' \quad [3]$$

Y la expresión de las técnicas más usadas en electromagnetismo, cuando las condiciones de bordes son tipo Dirichlet, está dada por

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\in_0}\int_V \rho(\vec{r}')G_D(\vec{r},\vec{r}')d^3r' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\vec{r}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}da' \quad [4]$$

Pero en este artículo utilizaremos la solución general de la ecuación de Poisson con valores específicos del potencial en la superficie de contorno, con la condición tipo Neumann.

$$\Phi(r) = \langle\Phi\rangle_s + \frac{1}{4\pi \in_0}\int_V \rho(\vec{r}\,')G_N(\vec{r},\vec{r}\,') d^3r'' \frac{1}{4\pi}\oint_S G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\Phi}{\partial n'}da' \quad [5]$$

Donde $\langle\Phi\rangle$ es el valor medio del potencial sobre la superficie completa. Para las condiciones de borde tipo Neumann, la condición de contorno que se debe elegir para la función de Green $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ se obtiene al aplicar el teorema de Gauss a

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad [6]$$

Con lo cual

$$\oint \frac{\partial G_N}{\partial n'}da' = -4\pi \quad [7]$$

Por consiguiente, debe cumplir con esta condición de contorno.

Ahora, siguiendo análogamente las técnicas que se usan en el libro de Jackson para una función de Green tipo Dirichlet, la solución interior del cascarón esférico de radio R se tiene al hacerse $\alpha \to 0$ en la función de Green, ecuación 1. Luego, la función de Green radial toma la forma

$$g_l(\vec{r},\vec{r}\,')P\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} + \frac{1}{R^{2l+1}}\left(\frac{(1+l)}{l}(rr')^l\right) \quad [8]$$

Y la función de Green, tipo Neumann,

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(\vec{r},\vec{r}\,')P_l(\cos\gamma) \quad [9]$$

Los polinomios de Legendre están dados en términos de los armónicos esféricos, donde
$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + sen\theta\, sen\theta'\cos(\varphi-\varphi')$

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \quad [10]$$

Y los armónicos esféricos están dados en términos de los polinomios asociados de Legendre

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l-m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad [11]$$

Y dado que este problema está dotado de simetría acimutal, $m = 0$

$$Y_{l0}(\theta,0) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \quad [12]$$

Luego, la función de Green toma la forma

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)} \left(\frac{r'}{r^{l+1}} + \frac{(l+1)}{lR^{2l+1}}(rr')\right) \quad [13]$$

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\Big|_{r'=R} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{(2l+1)} \left(\frac{r^l}{R^{l+1}} + \frac{r^l(l+1)}{R^{l+1}}\right) \quad [14]$$

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,')\Big|_{r'=R} = \frac{4\pi}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^l \quad [15]$$

Y dado que este problema está dotado de simetría acimutal, $m = 0$

$$G_N(\vec{r},R) = \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta')\left(\frac{r}{R}\right)^l \quad [16]$$

Ahora, de las ecuaciones 2, 5 y 16 se tiene la solución interior del cascarón cuando no hay fuente en el interior

$$\Phi(\vec{r}\,) = \frac{1}{2\pi}\oint_s\left[\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')\left(\frac{r}{R}\right)^l\right] \left(\frac{\Phi_0}{R}\cos\theta'\right)da' \quad [17]$$

donde $da' = R^2 d\Omega'$

$$\Phi(\vec{r}\,) = \frac{\Phi_0}{4\pi R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta) \int_{-1}\left[(\cos\theta')P_l(\cos\theta')d(\cos\theta')\right]\int_0^{2\pi} d\varphi' R\left(\frac{r}{R}\right)^l \quad [18]$$

Por tanto, utilizando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \qquad [19]$$

se tiene que el potencial electrostático interior al cascarón es

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{R} P_1(\cos\theta)r = \frac{\Phi_0}{R}\cos\theta r \qquad [20]$$

Ahora, la solución exterior del cascarón esférico de radio R se tiene al hacerse $b \to \infty$ en la función de Green, ecuación 1, y la parte radial de la función de Green toma la forma

$$g_l(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \qquad [21]$$

Por tanto, la función de Green tipo Neumann es

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(\vec{r},\vec{r}\,')P_l(\cos\gamma) \qquad [22]$$

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(\vec{r},\vec{r}\,')\left(\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\right) \qquad [23]$$

$$G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_l(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}{2l+1} \qquad [24]$$

Como este problema está dotado de simetría acimutal, la función de Green toma la forma

$$G_N(\vec{r},R) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')\frac{R^l}{r^{l+1}} \qquad [25]$$

Por tanto, de las ecuaciones 2, 5 y 25 se tiene la solución exterior del cascarón cuando no hay fuente

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\oint_s\left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')\left(\frac{R^l}{r^{l+1}}\right)\right]\left(\frac{\Phi_0}{R}\cos\theta'\right)da' \qquad [26]$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{4\pi R}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\int_{-1}^{1}\left[P_l(\cos\theta')P_1(\cos\theta')d(\cos\theta')\right]\int_0^{2\pi} d\varphi'\left(\frac{R^{l+2}}{r^{l+1}}\right) \qquad [27]$$

Utilizando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, se tiene que el potencial fuera del cascarón tiene la forma

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{3}\cos\theta\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad [28]$$

Por consiguiente, la condición de contorno más sencilla para que pueda cumplir la solución interior y exterior es, por tanto,

$$\frac{\partial G_N(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} + \frac{4\pi}{S} = 0 \text{ para } \vec{r}\,' \text{ sobre } S \qquad [29]$$

donde S es el área total de la superficie, la cual es finita; la condición de contorno, ecuación 29, resulta homogénea, y el valor medio $\langle\Phi\rangle$ de la ecuación 5 se anula. El problema habitual de Neumann es el llamado "problema exterior", donde la ecuación 29 está limitada por dos superficies, una cerrada y finita, y la otra en el infinito.

Referencias bibliográficas

1. CHALLIS L., SHEARD F. ***Phys. Today.*** 12 (41), 2003.
2. BARTOSN G. ***Elements of Green´s functions and propagation.*** Oxford University Press, 1989.
3. JACKSON J.D. ***Electrodinámica clásica*** 2.ª ed., pp. 115-117, 1980.
4. GRIFFITHS D.J. ***Introduction to electrodynamics*** 3.ª ed. Prentice Hall, 1998.

5. POLLACK P.G., STUMP D. ***Electromagnetism***. Addison-Wesley, 2002.
6. J.R. REITZ J.R., MILFORD F.J., CHRISTY R.W. ***Foundations of Electromagnetic Theory***. 4.ª ed. Addison-Wesley, 1992.
7. FEYNMAN R., LEIGHTON R.B., SANDS M. ***Electromagnetismo y materia***. Addison-Wesley, 1987. Vol II.
8. STANKGOLD I. ***Green´s functions and boundary value problems***. 2.ª ed. Jhon Wiley and Sons Inc., 1997.
9. ARFKEN G.B. ***Mathematical methods for physicists*** 3.ª ed. Academic Press, 1985
10. KIM K.J., JACKSON J.D. ***Am. J. Phy.*** 61(12), 1993.
11. MATHEWS J., WALKER R.L. Mathematical Methods of Physics. 2.ª ed. Addison-Wesley, 1970.
12. HASSANI S. ***Foundations of Mathematical Physics*** Allyn & Bacon, 1991.