Divulgaciones Matemáticas Vol. 18 No. 1 (2017), pp. 55–57

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–28, 44, 51, 54, 59, 69, 72, 74–76, 79–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–139. Trataremos de ir llenando ese vacío, publicando en los números siguientes más soluciones que problemas nuevos. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones a los problemas mencionados en la lista anterior.

140. *(XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, El Salvador, junio 2017.)*

     Sea $k > 1$ un entero. Inicialmente la rana Tita se encuentra situada sobre el punto k de la recta numérica. En un movimiento, si Tita se encuentra sobre el punto n, entonces salta al punto $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son el mayor y el menor número primo (ambos positivos) que dividen a n, respectivamente. Determine todos los valores de k para los cuales Tita puede visitar una cantidad infinita de puntos diferentes de la recta numérica.

141. *(Propuesto por Dones Colmenarez, UPEL, Barquisimeto.)* Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo. Sean h_i, w_i y m_i la altura, la bisectriz y la mediana, respectivamente, que parten del vértice A_i. Pruebe que si h_1, w_2 y m_3 son concurrentes, y también h_2, w_3 y m_1 son concurrentes, entonces $A_1A_2A_3$ es equilátero.

2 Soluciones

Se recibieron soluciones de Wilson Pacheco a los problemas 61, 62 y 63. Lamentablemente las mismas llegaron después de la fecha de cierre del número anterior, en el cual ya se habían incluido soluciones de esos problemas.

68. [**11**(1) (2003) p. 84.] Con un grupo de 100 personas, se forman algunos comités de dos personas. Se sabe que, sin importar cómo se acomoden las 100 personas en una mesa redonda, siempre hay exactamente dos comités para los que cada miembro se encuentra vecino a su compañero.

   (a) Determinar el número de comités que hay.

   (b) £Es cierto que existe una persona que pertenece a todos los comités?

   Solución del editor: a) Las 100 personas se pueden ordenar circularmente de 99! maneras. Para cada una de estas ordenaciones hay dos comités cuyos miembros son vecinos, lo cual da $2 \cdot 99!$ comités. Pero en esta cuenta cada comité aparece repetido $2 \cdot 98!$ veces, pues sus dos miembros se pueden ordenar de 2 maneras y las 98 restantes personas de 98! maneras. Luego hay $(2 \cdot 99!)/(2 \cdot 98!) = 99$ comités.

   b) La respuesta es que sí. En primer lugar observemos que cualquier par de comités tiene un elemento común. En efecto, si hubiese dos comités disjuntos $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$, como hay 99 comités y con A, B, C y D sólo se pueden formar $\binom{4}{2} = 6$, debe haber un comité $\{E, F\}$ con E diferente de A, B, C y D. Si F también es diferente de A, B, C y D, entonces colocando $ABCDEF$ en ese orden y completando de cualquier manera tendríamos al menos tres comités con sus miembros vecinos, absurdo. Si por ejemplo $F = A$ entonces colocando $EABCD$ se llega igual a un absurdo, y lo mismo si F coincide con B, C o D.

   Veamos ahora que la persona común es siempre la misma. Tomemos dos comités $\{A, B\}$ y $\{A, C\}$, y supongamos que exista otro comité que no contenga a A. Ese comité sólo puede ser $\{B, C\}$. Sea ahora X otro comité diferente de esos tres. X debe tener un elemento común con $\{A, B\}$, digamos que sea A. Entonces $B \notin X$, pero como $X \cap \{B, C\} \neq \varnothing$, debe ser $C \in X$ y $X = \{B, C\}$, absurdo.

73. [**11**(2) (2003) p. 161.] Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

   Solución del editor: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

   Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (pues la diferencia de dos impares es par).

   - Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.

   - Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

77. [**11**(2) (2003) p. 162.] Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de

lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Solución del editor: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNBNBN o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las 2^8-2 coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2\cdot 2^7+2^8-2=2^9-2=510$ coloraciones.

78. [**11**(2) (2003) p. 162.] Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

   i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

   ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Solución del editor: (i) Se construye N con 2003 unos separados por grupos de tres ceros, así:

$$N = 1000100010001\ldots100010001.$$

Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n, entonces $s(N)=2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N\cdot k$ es igual a 2003 k's separados por grupos de 3, 2, 1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1, 2, 3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N\cdot k)=2003k$ y $N\cdot k$ es *tico*.

(ii) Supongamos por absurdo que exista un tal número N. Es bien conocido que existe un múltiplo suyo M cuyos dígitos son una sucesión de unos seguida posiblemente de una sucesión de ceros, es decir $M=\underbrace{11\ldots1}_{k}0\ldots0$ (esto es consecuencia de que en la sucesión 1, 11, 111, 1111,... debe haber dos términos diferentes que dejan el mismo resto al dividirlos entre N). M y todos sus múltiplos son ticos, por ser múltiplos de N, y lo mismo ocurre con el número M' que se obtiene suprimiendo los ceros finales de M. Ahora

$$19\cdot M' = \underbrace{11\ldots1}_{k}0+\underbrace{99\ldots9}_{k} = 2\underbrace{11\ldots1}_{k-2}09$$

y por tanto $s(19M')=2+(k-2)+9=k+9$. Pero k y $k+9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003, contradicción.