Divulgaciones Matemáticas Vol. 18, No. 2 (2017), pp. 18–25

Lema de Poincaré para un álgebra de Heisenberg semitrenzada

Poincaré Lemma for a quasibraided Heisenberg algebra

Fernando Mejías (fmejias@ula.ve)
Universidad de Los Andes,
Núcleo Universitario "Rafael Rangel",
Trujillo, Venezuela

Resumen

Un álgebra semitrenzada es un álgebra A sobre un anillo conmutativo Λ con unidad, equipada con un operador $R \in End(A \otimes A)$ que satisface la ecuación de Yang-Baxter, $R(1 \otimes a) = a \otimes 1$ y $R(a \otimes 1) = 1 \otimes a$. El cálculo diferencial semitrenzado $\Omega_R(A)$ se obtiene del cálculo diferencial universal módulo las relaciones $a\,db = \sum_i (db^i)a_i$, donde $R(a \otimes b) = \sum_i a_i \otimes b_i$. Demostramos una versión del Lema de Poincaré para el álgebra semitrenzada de Heisenberg sobre $\mathbb{R}[x]$.

Palabras y frases clave: formas diferenciales no conmutativas, álgebra semitrenzada, Lema de Poincaré.

Abstract

A quasi-braided algebra is an algebra A on a commutative ring Λ with unit, equipped with an operator $R \in End(A \otimes A)$ which satisfaces the Yang-Baxter equation, $R(1 \otimes a) = a \otimes 1$ and $R(a \otimes 1) = 1 \otimes a$. The quasi-braided differential calculus $\Omega_R(A)$ is obtained from the universal differential calculus modulo the relations $a\,db = \sum_i (db^i)a_i$, where $R(a \otimes b) = \sum_i a_i \otimes b_i$. We show a version of Poincaré's Lemma for a quasibraided Heisenberg algebra on $\mathbb{R}[x]$.

Key words and phrases: non-commutative differential forms, quasi-braided algebra, Poincaré's Lemma.

1 Introducción

El Lema de Poincaré es un resultado clásico en topología diferencial que establece que si M es una variedad suavemente contráctil a un punto $p \in M$, entonces que toda forma diferencial cerrada sobre M es exacta (ver Corolario 18 en Spivak [16]). En términos del complejo de De Rham $(\Omega^*(M), d)$, el resultado establece que para tal variedad la cohomología es trivial, por ejemplo, en el caso de coeficientes reales, tenemos que

$$H^i(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Recibido 25/08/2017. Revisado 15/09/2017. Aceptado 07/12/2017.
MSC (2010): Primary 55N35; Secondary 55Q55.
Autor de correspondencia: Fernando Mejías

El Lema de Poincaré constituye, junto con el Teorema de Stokes, las piezas fundamentales para demostrar el Teorema de De Rham que establece un isomorfismo entre la cohomología del complejo de formas diferenciales y la cohomolgía singular de la variedad (ver Spivak [16, p. 457]).

Algunos resultados se han obtenido al aplicar versiones generalizadas del complejo de De Rham. Por ejemplo, Cenkl y Porter [5] estudiaron el complejo de formas diferenciales moderadas. Similarmente, Karoubi [9] analizó el complejo de formas diferenciales no conmutativas con coeficientes racionales y Mejías [13] trabajó con el complejo de formas no conmutativas moderadas.

Un álgebra trenzada es un álgebra A sobre un anillo conmutativo Λ con unidad y equipada con un operador de Yang-Baxter R, es decir, un operador invertible $R \in End(A \otimes A)$ tal que, si $R_1(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = R(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3$ y $R_2(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_1 \otimes R(a_2 \otimes a_3)$, se satisface la ecuación $R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2$. Además, $R(1 \otimes a) = a \otimes 1$, $R(a \otimes 1) = 1 \otimes a$, $R(\mu \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \mu)R_1R_2$ y $R(\mathrm{id} \otimes \mu) = (\mu \otimes \mathrm{id})R_2R_1$, siendo μ la multiplicación en A. Las dos últimas igualdades establecen cierta compatibilidad entre un álgebra trenzada y el grupo trenzado B_n (ver Baez [1] y Kassel [11]).

El cálculo diferencial trenzado $\Omega_R(A)$ se obtiene del cálculo diferencial universal $\Omega_u(A)$ (formas diferenciales no conmutativas introducidas por Connes [6]) módulo las relaciones $a\,db = \sum_i (db^i)a_i$, donde $R(a \otimes b) = \sum_i a_i \otimes b^i$.

En este artículo consideramos un concepto más débil que el de álgebra trenzada: Un "álgebra semitrenzada", un álgebra A sobre un anillo conmutativo Λ con unidad, equipada con un operador $R \in End(A \otimes A)$ que satisface la ecuación de Yang-Baxter, $R(1 \otimes a) = a \otimes 1$ y $R(a \otimes 1) = 1 \otimes a$; es decir, suprimimimos la condición de invertibilidad y la compatibilidad con el grupo trenzado. Seguidamente se establece el cálculo diferencial semitrenzado $\Omega_R(A)$ como el cociente del cálculo diferencial universal $\Omega_u(A)$ por el ideal generado por las relaciones $a\,db = \sum_i (db^i)a_i$, donde $R(a \otimes b) = \sum_i a_i \otimes b^i$.

Aplicando construcciones y técnicas similares a las de Baez [1] demostramos una versión del Lema de Poincaré para el álgebra semitrenzada de Heisenberg sobre $\mathbb{R}[x]$ (Teorema 6.2).

2 El cálculo diferencial universal

El cálculo diferencial universal sobre un álgebra fue introducido por Connes [6] y [7] como una generalización del complejo de formas diferenciales sobre una variedad y fue utilizado posteriormente por Karoubi [10] para construir el complejo no conmutativo de De Rham.

Sea A un álgebra sobre un anillo conmutativo Λ con unidad. Las *formas diferenciales de grado* n son los elementos del producto tensorial de Λ-álgebras

$$T^n(A) = \underbrace{A \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \cdots \otimes_\Lambda A}_{n+1 \text{ factores}}.$$

Tenemos pues que $T^*(A) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(A)$ es una Λ-álgebra con multiplicación $\cdot : T^n(A) \otimes T^m(A) \to T^{n+m}(A)$ definida por

$$\alpha \cdot \beta = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_0) \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m.$$

para todos $\alpha = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in T^n(A)$ y $\beta = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m \in T^m(A)$.

El *operador diferencial* $D : T^n(A) \to T^{n+1}(A)$ está definido por

$$\begin{aligned} D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes 1 \otimes a_j \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned}$$

Teorema 2.1. *Si $\omega \in T^n(A)$ y $\theta \in T^m(A)$, entonces*

(1) $D^2(\omega) = 0$.

(2) $D(\omega \cdot \theta) = D(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot D(\theta)$ *(la identidad de Leibniz).*

Es decir, $T^*(A)$ es un álgebra diferencial graduada. La cohomología del complejo $(T^*(A), D)$ es trivial.

Ahora consideremos $\Omega^0(A) = A$ y $\Omega^1(A) = \ker(\mu)$, entonces el módulo $\Omega^1(A)$ sobre Λ es un bimódulo sobre A. Las *formas diferenciales no conmutativas de grado* n son los elementos del producto tensorial de A-módulos

$$\Omega^n(A) = \underbrace{\Omega^1(A) \otimes_A \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A)}_{n \text{ factores}}.$$

La suma directa

$$\Omega_u(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n(A)$$

es un álgebra graduada cuyo producto está definido por yuxtaposición de productos tensoriales. La *diferencial* $d : \Omega^0(A) \to \Omega^1(A)$ está dada por

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

Así tenemos el isomorfismo de Λ-módulos $A \otimes A/\Lambda \to \Omega^1(A)$ tal que $a \otimes \bar{b} \mapsto a\, db$, entonces $\Omega^n(A)$ puede ser identificado con el producto tensorial de Λ-módulos

$$A \otimes \underbrace{A/\Lambda \otimes A/\Lambda \otimes \cdots \otimes A/\Lambda}_{n \text{ factores}}.$$

Una forma $\omega \in \Omega^1(A)$ puede escribirse como una combinación lineal de términos del tipo $a_0\, da_1 da_2 \dots da_n$ y el morfismo d se extiende a las formas de grado n de $\Omega^n(A)$ por

$$d(a_0\, da_1 \dots da_n) = da_0 da_1 \dots da_n = 1\, da_0 da_1 \dots da_n.$$

Teorema 2.2. *Si $\omega \in \Omega^n(A)$ y $\theta \in \Omega^m(A)$, entonces*

(1) $d^2(\omega) = 0$.

(2) $d(\omega \cdot \theta) = d(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot d(\theta)$ *(la identidad de Leibniz).*

El álgebra $\Omega_u(A)$ es *el cálculo diferencial universal* para A debido a que constituye la solución a un problema universal: Para un álgebra diferencial graduada B^* y un morfismo de álgebras $f : A \to B^0$ existe un único morfismo de álgebras diferenciales graduadas $f^* : \Omega_u(A) \to B^*$ el cual coincide con f en grado 0.

Existe una inclusión que envía $\Omega_u(A) \to T^*(A)$. Por otra parte, para cualquier $n \geq 0$ existe un *operador proyección* $J : T^n(A) \to \Omega^n(A)$ dado por $J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0\, da_1 \dots da_n$.

3 Álgebras trenzadas

Considerables esfuerzos han sido realizados, particularmente por Karoubi [9, 10], Baez [1, 2] y Cenkl [4] para el estudio de la cohomología del cálculo diferencial de un álgebra trenzada, la cual es un álgebra A sobre un anillo Λ con un operador $R \in End(A \otimes A)$ que generaliza la función $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ y está relacionado de una forma especial con el grupo trenzado.

Si $R \in End(A \otimes A)$, entonces para cada i, con $1 \leq i \leq n-1$, definimos $R_i \in End(A^{\otimes n})$ por

$$R_i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes R(a_i \otimes a_{i+1}) \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

La siguiente igualdad sobre $A^{\otimes 3}$

$$R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2 \tag{3.1}$$

es conocida como la *ecuación de Yang-Baxter*. Si $R \in End(A \otimes A)$ es invertible y satisface la ecuación (3.1) decimos que R es un *operador de Yang-Baxter*. Decimos que R es fuerte si $R^2 = \mathrm{id}$.

Ejemplo 3.1. Para cualquier álgebra A, la función $R : A \otimes A \to A \otimes A$ dada por

$$R(a \otimes b) = b \otimes a$$

es un operador de Yang-Baxter fuerte.

Ejemplo 3.2. Si A es un álgebra graduada, la función $R : A \otimes A \to A \otimes A$ dada por

$$R(a \otimes b) = (-1)^{\deg\, a\, \deg\, b}\, b \otimes a$$

es un operador de Yang-Baxter (deg denota el grado).

Ejemplo 3.3. La función $R : \mathbb{R}[x] \otimes \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] \otimes \mathbb{R}[x]$ dada por

$$R(x^m \otimes x^n) = 2^{mn}\, x^n \otimes x^n$$

satisface la igualdad (3.1), pero no es un operador de Yang-Baxter porque no es invertible.

El *grupo trenzado* B_n generado por $s_1, \ldots, s_n$ es aquél determinado por las relaciones

$$s_is_j = s_js_i, \quad \text{si } |i-j| \geq 2,$$

y

$$s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $R \in End(A \otimes A)$ es un operador de Yang-Baxter si solo si las n funciones $s_i \mapsto R_i$ se extienden a una representación ρ de B_n a $A^{\otimes(n+1)}$.

Un *álgebra trenzada* o una *r-estructura* es un par (A, R), donde A es un álgebra con multiplicación μ y R es un operador de Yang-Baxter sobre A, tal que se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$R(1 \otimes a) = a \otimes 1 \quad \text{y} \quad R(a \otimes 1) = 1 \otimes a. \tag{3.2}$$

para todo $a \in A$, y

$$R(\mu \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \mu)R_1R_2 \quad \text{y} \quad R(\mathrm{id} \otimes \mu) = (\mu \otimes \mathrm{id})R_2R_1, \tag{3.3}$$

como funciones de $A^{\otimes 3}$ en $A^{\otimes 2}$. Cuando en el contexto está claro el operador R nos referimos a A como un álgebra trenzada. Las ecuaciones (3.3) describen la relación entre el operador R y el grupo trenzado B_n (ver [1]).

Así, en particular, las estructuras indicadas en los ejemplos 3.1 y 3.1 son álgebras trenzadas. El operador indicado en el Ejemplo 3.3, además de no ser invertible, no cumple la segunda ecuación de (3.3).

Un *ideal trenzado* I de un álgebra trenzada A es un ideal $I \subset A$ tal que R preserva a $I \otimes A + A \otimes I$. Dadas dos álgebras trenzadas (A, R_A) y (B, R_B) decimos que $f : A \to B$ es un *morfismo de álgebras trenzadas* si es un morfismo y $(f \otimes f)R_A = R_B(f \otimes f)$.

Para algunos casos especiales Baez [1] estudia el cálculo diferencial $\Omega_R(A)$ de un álgebra trenzada (A, R), considerado como el cociente del cálculo diferencial universal $\Omega_u(A)$ por las relaciones

$$a\,db = \sum_i (db^i)a_i, \tag{3.4}$$

donde

$$R(a \otimes b) = \sum_i b^i \otimes a_i. \tag{3.5}$$

4 Álgebras semitrenzadas

Como se indicó en el Ejemplo 3.3, el hecho de que un operador $R \in End(A \otimes A)$ sea solución de la ecuación (3.1) no dota al álgebra A con una estructura trenzada porque no es invertible ni es compatible con el grupo trenzado B_n. Sin embargo, para este tipo de operadores, se obtienen algunos resultados parciales en el espíritu de aquéllos que Baez [1] probó para álgebras trenzadas.

Un *álgebra semitrenzada* es un par (A, R), donde A es un álgebra y $R \in End(A \otimes A)$ satisface las ecuaciones (3.1) y (3.2). Un *ideal semitrenzado* I de un álgebra semitrenzada A es un ideal $I \subset A$, tal que R preserva a $I \otimes A + A \otimes I$. Dadas dos álgebras trenzadas (A, R_A) y (B, R_B) decimos que $f : A \to B$ es un *morfismo de álgebras semitrenzadas* si es un morfismo y $(f \otimes f)R_A = R_B(f \otimes f)$.

Análogamente, el cálculo diferencial $\Omega_R(A)$ para un álgebra semitrenzada (A, R) se define por ecuaciones (3.4) y (3.5) puestas en contexto.

5 La fórmula de Künneth y el Lema del Diamante

En esta sección presentamos dos teoremas clásicos que cumplen una función de resultados auxiliares en la prueba del "Lema de Poincaré". En primer lugar la fórmula de Künneth para cohomología, que establece que si Λ es un campo, y X e Y son dos espacios topológicos con $H_i(X)$ de tipo finito, entonces existe un isomorfismo de álgebras

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(X \times Y). \tag{5.1}$$

Esta ecuación es una consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Sean C y C' complejos de cadenas que se anulan por debajo de cierta dimensión. Supongamos que C es libre y finitamente generado en cada dimensión, entonces existe una sucesión exacta natural*

$$0 \longrightarrow \oplus_{p+q=m} H^p(C) \otimes H^q(C) \xrightarrow{\Theta} H^m(C \otimes C') \longrightarrow \oplus_{p+q=m} H^{p+1}(C) * H^q(C') \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión se escinde si C' es libre y finitamente generada en cada dimensión.

Para la demostración de este resultado ver Munkres [14, pp. 357-358]. También puede considerarse la presentación análoga en Spanier [15, pp. 246-247].

El otro resultado auxiliar es un resultado que algunas veces es conocido como el "Lema del Diamante". Sean Λ un anillo conmutativo, $\mathcal{L}[\cdot,\cdot]$ un álgebra de Lie sobre Λ y $\Lambda\langle X\rangle$ el álgebra libre sobre Λ. Denotemos por $\Lambda[\mathcal{L}]$ al cociente $\Lambda\langle X\rangle/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es el ideal generado por todos los elementos $ab-ba-[a,b]$ con $a,b\in\mathcal{L}$. Identificamos a $\mathcal{L}$ con el submódulo de $\Lambda\langle X\rangle$ generado por X y para $a\in\mathcal{L}$ denotamos por a' la imagen de a en $\Lambda[\mathcal{L}]$.

Teorema 5.2 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Si $\preceq$ es un orden total en X, entonces $k[\mathcal{L}]$ es un k-módulo libre con una base formada por todos los productos $x'y'\cdots z'$ tal que $x,y,...,z\in X$, y $x\preceq y\preceq\cdots\preceq z$.*

Este resultado es una consecuencia de un resultado de gran generalidad conocido más frecuentemente como el Lema del Diamante. Para la demostración del Teorema 5.2 ver Bergman [3, pp. 186-187].

6 Lema de Poincaré para álgebras semitrenzadas

En esta sección demostramos el "Lema de Poincaré" para un álgebra semitrenzada construida a partir del Ejemplo 3.3, utilizando técnicas similares a las de Baez [1]. Recordemos que para un álgebra de Lie $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$, el *cubrimiento universal* $\mathcal{U}(L)=T(L)/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es el ideal generado por los elementos de la forma $xy-yx-[x,y]$. Dados un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $\phi: V\times V\to\mathbb{F}$ una forma bilineal antisimétrica, entonces el espacio $V\oplus\mathbb{F}$ es un álgebra de Lie con:

$$[u+\alpha\mathrm{e}, v+\beta\mathrm{e}]=\phi(u,v)\mathrm{e},$$

para todos $u,v\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $\mathrm{e}=(0,1)\in V\oplus\mathbb{F}$. El *álgebra de Heisenberg* $\mathfrak{H}$ sobre V es el cubrimiento universal $U(V\oplus\mathbb{F})$. Dado $\hbar\in\mathbb{F}$, el *álgebra de Weyl* $\mathfrak{H}_\hbar$ es el cociente de $\mathfrak{H}$ por ideal generado por $\mathrm{e}-\hbar$ y denotemos por j la proyección $j:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_\hbar$. Por el Teorema 1 de Baez [1] existe una única estructura de álgebra trenzada sobre $\mathfrak{H}_\hbar$ dada por

$$\widehat{R}(u\otimes v)=v\otimes u+\hbar\phi(u,v)(1\otimes 1),$$

para todos $u,v\in V$.

Tomando el caso $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ y $V=\mathbb{R}[x]$ podemos utilizar $\widehat{R}$ y el Ejemplo 3.3 para definir una estructura semitrenzada sobre $\mathfrak{H}_\hbar$ así:

$$R(x^m\otimes x^n)=2^{mn}x^n\otimes x^m+\hbar\phi(x^m,x^n)(1\otimes 1),$$

Ahora consideramos $\Omega(\mathfrak{H}_\hbar)=\Omega_R(\mathfrak{H}_\hbar)$ el cociente $\Omega_u(\mathfrak{H}_\hbar)$ por las relaciones

$$a\,db=\sum_i(db^i)a_i,$$

donde

$$R(a\otimes b)=\sum_i b^i\otimes a_i.$$

Teorema 6.1. *Sean $\hbar \in \mathbb{R}$, $j_* : \Omega(\mathfrak{H}) \to \Omega(\mathbb{R}[x]) \otimes \Omega(\mathfrak{H}_\hbar)$ inducida por la proyección $j : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_\hbar$ y $p : \Omega(\mathbb{R}[x]) \to \mathbb{R}$ el homomorfismo determinado por $p(x) = \hbar$ y $p(dx) = 0$, entonces existe un isomorfismo de complejos diferenciales y de $\Omega(\mathbb{R}[x])$-módulos $\varphi : \Omega(\mathfrak{H}) \to \Omega(\mathbb{R}[x]) \otimes \Omega(\mathfrak{H}_\hbar)$ tal que*

$$(p \otimes \mathrm{id}) \circ \varphi = j_*.$$

Demostración. Por el Teorema 5.2 tenemos que los elementos del tipo

$$\omega = x^{i_0}(dx)^{k_0} x^{i_1}(dx)^{k_1} \cdots x^{i_n}(dx)^{k_n}$$

constituyen una base para $\Omega(\mathfrak{H})$. Definimos $\varphi : \Omega(\mathfrak{H}) \to \Omega(\mathbb{R}[x]) \otimes \Omega(\mathfrak{H}_\hbar)$ por

$$\varphi(\omega) = x^{i_0}(dx)^{k_0} \otimes x^{i_1}(dx)^{k_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_n}(dx)^{k_n}.$$

Es fácil comprobar que φ es un morfismo de complejos diferenciales y de $\Omega(\mathbb{R}[x])$-módulos y que $(p \otimes \mathrm{id}) \circ \varphi = j_*$. Para demostrar que φ es inyectiva basta aplicar nuevamente el "Lema del Diamante" para concluir que los elementos de la forma

$$x^{i_0}(dx)^{k_0} \otimes x^{i_1}(dx)^{k_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_n}(dx)^{k_n}$$

Constituyen una base para $\Omega(\mathbb{R}[x]) \otimes \Omega(\mathfrak{H}_\hbar)$. □

Finalmente tenemos la siguiente versión del Lema de Poincaré para el álgebra de Heisenberg:

Teorema 6.2. *Tenemos que la cohomología de De Rham $H^p(\Omega(\mathfrak{H})) = 0$ si $p > 0$ y $H^0(\Omega(\mathfrak{H})) = \mathbb{R}$.*

Demostración. Por el Teorema 6.1 y la fórmula de Künneth (ecuación (5.1)) tenemos que

$$H(\Omega(\mathfrak{H})) = H(\Omega(\mathbb{R}[x])) \otimes H(\Omega(\mathfrak{H}_\hbar)), \quad \text{para todo } \hbar \in \mathbb{R},$$

Pero tenemos que $H^p(\Omega(\mathbb{R}[x])) = 0$ si $p > 0$ y $H^0(\Omega(\mathbb{R}[x])) = \mathbb{R}$, por lo tanto $H^p(\Omega(\mathfrak{H}_\hbar))$ tambio cumple. Para concluir la prueba basta tomar $\hbar = 0$. □

7 Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo ha sido financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes; Código del Proyecto NURR-C-561-12-05-B.

Referencias

[1] Baez, N. *R-commutative geometry and quantization of Poisson algebras,* Adv. Math. **95** (1992), 61–91.

[2] Baez, N. *Differential calculi on quantum vector spaces with Hecke-type relations,* Lett. Math. Phys. **23** (1991), 133–141.

[3] Bergman, G. *The diammond lemma for ring theory,* Adv. in Math. **29** (1978), 178–218.

[4] Cenkl, B. *Noncommutative geometry,* Course Notes, Northeastern University, Boston, 1998.

[5] Cenkl, B. and Porter, R. *Differential forms and torsion in the fundamental group,* Adv. in Math. **48**(2) (1983), 189–204.

[6] Connes, A. *Noncommutative differential geometry,* Publ. Math. IHES **62** (1985), 257–360.

[7] Connes, A. *Noncommutative geometry,* Academic Press, San Diego, CA, 1994.

[8] Gracía-Bondía, J.M., Várilly, J.C. y Figueroa, H. *Elements of noncommutative geometry,* Birkhäuser, Boston, 2001.

[9] Karoubi, M. *Algebres tressees et q-cohomologie*, (preprint).

[10] Karoubi, M. *Formes différentielles non commutatives et cohomologie a coefficients arbitraires*, Trans. Amer. Math. Soc. **374** (1995), 4277–4299.

[11] Kassel, C. *Quantum groups,* Springer-Verlag, Nueva York, 1995.

[12] MacLane, S. *Homology,* Springer-Verlag, Nueva York, 1976.

[13] Mejías, L. *The de Rham tehorem for the noncommutative complex of Cenkl and Porter*, Internat. J. Math. Math. Sci. **30**(11) (2002), 667–696.

[14] Munkres, J. *Elements of algebraic topology,* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.

[15] Spanier, E. *Algebraic topology,* Springer-Verlag, Nueva York, 1966.

[16] Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry* (volumen I, tercera edición), Publish or Perish, Houston, 1999.