Divulgaciones Matemáticas Vol. 18, No. 2 (2017), pp. 35–37

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Río de Janeiro, Brasil, del 12 al 23 de Julio de este año, con la participación de 615 jóvenes provenientes de 111 países de los cinco continentes. La delegación venezolana estuvo integrada por cinco estudiantes, Wemp Pacheco Rodríguez del colegio Calicantina, Maracay, medalla de bronce por segundo año consecutivo, Amanda Vanegas Ledesma, colegio San Francisco de Asís, Maracaibo, medalla de bronce, Laura Queipo Morales, colegio San Vicente de Paul, Maracaibo, mención honorífica, Iván Rodríguez, colegio Santiago León de Caracas, mención honorífica y Onice Aguilar, colegio La Presentación, Mérida. El líder de la delegación fue el profesor Rafael Sánchez Lamoneda, y el vice-líder el editor de esta sección. Venezuela obtuvo en esta ocasión la mayor puntuación total de todas las 24 IMO a las que ha asistido.

142. (58^a IMO) Sea $N \geq 2$ un entero dado. Los $N(N+1)$ jugadores de un grupo de futbolistas, todos de distinta estatura, se colocan en fila. El técnico desea quitar $N(N-1)$ jugadores de esta fila, de modo que la fila resultante formada por los $2N$ jugadores restantes satisfaga las N condiciones siguientes:

   (1) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores más altos.

   (2) Que no quede nadie ubicado entre el tercer jugador más alto y el cuarto jugador más alto.

   $\vdots$

   (N) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores de menor estatura.

   Demostrar que esto siempre es posible.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–28, 44, 51, 54, 59, 69, 72, 79–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–141. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones a los problemas mencionados en la lista anterior.

74. [**11**(2) (2003) p. 162.] Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con AC y AD y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

    Solución del editor: Como $\angle AGB = \angle AHB = 90°$ y los triángulos AGB y AHB tienen el lado común AB, será suficiente demostrar que $\angle ABH = \angle ABG$, pues entonces los triángulos AGB y AHB son congruentes y por tanto $AG = AH$. Como $AEBH$ y $AGBF$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle AEH = \angle ABH$ y $\angle GBA = \angle GFA$.

    Ahora, como $\angle AEH + \angle CED = 180° = \angle GFA + \angle CFD$, si $\angle CED = \angle CFD$ entonces $\angle AEH = \angle GFA$.

    Para demostrar que $\angle CED = \angle CFD$ basta mostrar que $CEFD$ es cíclico. Esto se sigue del hecho de que el triángulo ABE es semejante al ABC y de que el triángulo AFB es semejante al ABD. Entonces, de la primera semejanza, $AB^2 = AE \cdot AC$. Y de la segunda semejanza, $AB^2 = AD \cdot AF$. En consecuencia, $AE \cdot AC = AD \cdot AF$ y $CEFD$ es cíclico.

75. [**11**(2) (2003) p. 162.] Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

    Solución del editor: Se procederá por inducción sobre b. Para $b = 3$, se tiene que $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a + 1)$ es suficiente demostrar que $(a^2 - a + 1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a - 1) \geq 2$.

    Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b, es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$. Se demostrará ahora para $b + 1$.

    Nótese que

    $$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a + 1) + 2 \geq ab(a + 1) - (a + 1) + 2,$$

    donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

    $$ab(a + 1) - (a + 1) + 2 = (a + 1)(ab - 1) + 2 > (ab - 1)(a + 1).$$

    Finalmente, $ab - 1 \geq 2b - 1 = (b + 1) + (b - 2) > b + 1$, lo cual es cierto.

    Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a - 1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2$, $b = 3$. Esto concluye la solución.

76. [**11**(2) (2003) p. 162.] Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

    i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.

ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Solución del editor: Se demostrará que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, de donde el resultado se sigue de forma inmediata.

Nótese inicialmente que como $A_1P \parallel B_1Q$, entonces A_1PQB_1 es un trapecio isósceles y sus diagonales son iguales, de donde $A_1Q = B_1P$. Ahora bien, como $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$ por estar inscritos en el mismo arco, y $\angle PA_2Q = PB_2Q$ por la misma razón, entonces $\triangle A_1QA_2$ y $\triangle B_1PB_2$ son semejantes. Como ya se demostró la igualdad entre un par de lados adyacentes, se sigue la congruencia de los triángulos.