Divulgaciones Matemáticas Vol. 21 No. 1-2 (2020), pp. 78–80

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la EGMO (European Girls Mathematical Olympiad) 2020, competencia que este año se realizó de manera virtual.

147. Los enteros positivos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ satisfacen $2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots, 3028$. Pruebe que al menos uno de los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ es divisible entre 2^{2020}.

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 54, 59, 69, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–146. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

51. [**9**(2) (2001) p. 209.] Sea $\alpha > 0$ un número real y consideremos $x_1 < x_2 < \cdots$ las soluciones reales de la ecuación $x \operatorname{sen}(x^\alpha) = \log(x)$. Hallar los valores de α para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ converge.

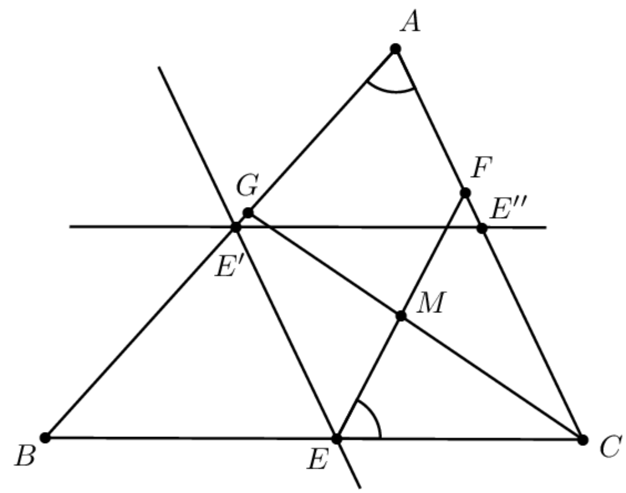
Solución del editor: Sea $f(x) = x \operatorname{sen}(x^\alpha) - \log(x)$. Sea $y_k = ((2k+1)\frac{\pi}{2})^{1/\alpha}$. Como para $k = 0, 1, 2 \ldots$ se tiene que $\operatorname{sen}((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 1$ si k es par y -1 si k es impar, es fácil ver que $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < \cdots$ Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ converge si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^{1/\alpha}$$

converge, y ésto ocurre si y sólo si $1/\alpha > 1$, es decir si $\alpha < 1$.

82. [**12**(1) (2004) p. 96.] Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Solución del editor: Sea E' el corte de la paralela a CA por E con el lado AB. Sea E'' el corte de la paralela a CB por E' con el lado CA.



Tenemos entonces:

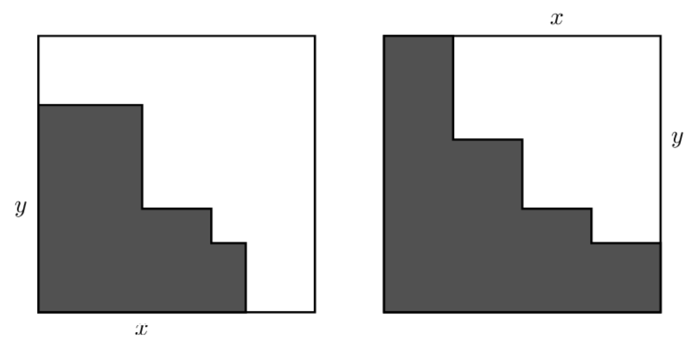
$$\frac{CE''}{CA} = \frac{BE'}{BA} = \frac{BE}{BC} = \left(1 - \frac{CE}{CB}\right) = \frac{CF}{CA},$$

de donde se deduce que $F = E''$. Por lo tanto $CEE'F$ es un paralelogramo (ya que $EE' \parallel CF$ y $E'F \parallel CE$). Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, entonces CE' pasa por M, de donde $G = E'$. Entonces $CEGF$ es un paralelogramo y por lo tanto $\triangle FEG \sim \triangle EFC$. Por otro lado, $\angle ECF = \angle ACB$ y $\angle CEF = \angle CAB$, de donde $\triangle EFC \sim \triangle ABC$. Tenemos entonces que $\triangle FEC \sim \triangle EFC \sim \triangle ABC$.

83. [**12**(1) (2004) p. 96.] Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

Solución del editor: El máximo es 180 y se obtiene cuando el tablero se colorea como un tablero de damas. En efecto, los segmentos que pueden ser frontera son los interiores (los que no pertenecen al borde del tablero) y todos ellos son frontera cuando se colorea el tablero como un damero.

El mínimo es 10, y se obtiene cuando todas las casillas a un lado de una mediana (una de las dos líneas que unen puntos medios de lados opuestos) se pintan de un color y las que están del otro lado se pintan del otro color. Para probar que efectivamente 10 es el mínimo observemos que el número de segmentos frontera verticales entre dos columnas adyacentes no puede ser inferior a la diferencia (en valor absoluto) entre los números de casillas negras en cada columna. Por lo tanto, si se modifica cada columna poniendo todas las casillas blancas encima de las negras, el número de segmentos frontera no crece. Repitiendo este proceso para las filas, se obtiene una coloración con menor o igual número de segmentos frontera y en la cual si una casilla es negra también lo son todas las que se encuentran debajo o a la izquierda de ella. Si en esta coloración hay una fila completamente blanca y otra completamente negra (o una columna completamente blanca y otra completamente negra) es claro que debe haber al menos 10 segmentos frontera. De lo contrario se presentará una de las dos siguientes configuraciones:



En cada una de ellas el número de segmentos frontera es $x + y$, y en ambos casos se tiene

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{50} > 14.$$