Divulgaciones Matemáticas Vol. 19, No. 2 (2018), pp. 52–64

Propiedad multiplicativa, simultánea, de la derivada y la integral en funciones de clase $\mathcal{C}^1$

Simultaneous multiplicative property of the derivative and integral in functions of $\mathcal{C}^1$ class

Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo - Venezuela

Irma Abrigo Córdoba (irabrigoco@uide.edu.ec)
Mayra García Calle (magarciaca@uide.edu.ec)
Eduardo Suárez Vinueza (edsuarezvi@uide.edu.ec)
Universidad Internacional del Ecuador
Ecuador

Resumen

En 2015 el estudio titulado *Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase* $\mathcal{C}^1$ mostró que dada una función $f(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$, con $f(x) \neq e^x$, se puede encontrar una familia de funciones $\mathcal{F}_{f(x)}$ donde $g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$ si cumple que $[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x)$ (ver [3]). En concordancia con el mencionado estudio, y manteniendo como finalidad mostrar al estudiante de Matemática (o cualquier otra ciencia) que es posible realizar investigación con estructuras simples, este artículo muestra que dada una función $f(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$, existe una familia de funciones $\mathcal{I}_{f(x)}$ tal que $g(x) \in \mathcal{I}_{f(x)}$ si cumple que $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx$. También se estudia si existe una familia de funciones $\mathcal{SIF}_{f(x)}$ tal que $h(x) \in \mathcal{SIF}_{f(x)}$ si cumple simultáneamente la propiedad multiplicativa de la derivada y la integral para una función $f(x)$ dada de clase $\mathcal{C}^1$.

Palabras y frases clave: Derivada, integral, funciones de clase $\mathcal{C}^1$, multiplicatividad.

Abstract

In 2015 the study entitled *A multiplicative property of the derivative in* $\mathcal{C}^1$ *class functions* showed that given a function $f(x)$ of $\mathcal{C}^1$ class, with $f(x) \neq e^x$, you can find a family of functions $\mathcal{F}_{f(x)}$ where $g(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$ if it satisfies that $[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x)$ (see [3]). In accordance with the mentioned study, and keeping as purpose to show to the Mathematics student (or any other science) that it is possible to perform research with simple structures, this article shows that given a function $f(x)$ of $\mathcal{C}^1$ class, there is a family of functions $\mathcal{I}_{f(x)}$ such that $g(x) \in \mathcal{I}_{f(x)}$ if it satisfies that $\int [f(x).g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx. \int g(x)\,dx$. The existence of a family of functions $\mathcal{SIF}_{f(x)}$, such that $h(x) \in \mathcal{SIF}_{f(x)}$ if it simultaneously satisfies

Recibido 25/10/2018. Revisado 01/11/2018. Aceptado 20/12/2018.
MSC (2010): Primary 26A36, 26A33; Secondary 26A06, 26A24.
Autor de correspondencia: Irma Abrigo Córdoba

the multiplicative property of the derivative and the integral for a given function $f(x)$ of $\mathcal{C}^1$ class, is also studied.

Key words and phrases: Derivative, integral, $\mathcal{C}^1$ class functions, multiplicativity.

1 Introducción

Gran parte del trabajo de un matemático es realizar nuevas investigaciones que ayuden al desarrollo teórico de la Matemática y su aplicación en otras áreas del saber. Por ende, en la formación de los nuevos profesionales de esta ciencia, se busca incentivar la investigación a sus distintos niveles. Sin embargo, un buen número de docentes e investigadores matemáticos tienden, quizás sin percatarse, a desmotivar al estudiante de pregrado a realizar investigación desde los principios de sus estudios debido al nivel de complejidad en las estructuras matemáticas que exigen estén presentes en una investigación.

Existen investigaciones que han mostrado resultados interesantes en alguna rama de la Matemática, donde gran número de las herramientas usadas en la misma son de un nivel matemático bastante elemental (ver [3, 4, 5]). Es importante resaltar que el conocimiento matemático, por muy simple que este sea, puede tener una aplicación muy importante, la cual no siempre es sencilla de puntualizar o descubrir. Por lo general, gran parte del conocimiento matemático encuentra sus aplicaciones a lo largo del tiempo y no de forma inmediata. De manera que, toda investigación es importante siempre y cuando esté bien estructurada y sea innovadora (que no se haya realizado antes). En este orden de ideas, el siguiente trabajo no busca presentar una investigación profunda sobre el tópico que se estudia, sino que se enfoca en mostrar al estudiante de Matemática la posibilidad de hacer pequeñas investigaciones utilizando estructuras y nociones elementales, a través de la busqueda de respuestas a preguntas capciosas sobre temas básicos, en este caso en el área del cálculo diferencial e integral en una sola variable.

El presente artículo se enfoca esencialmente en cierta propiedad multiplicativa de la integral, que cumplen algunas funciones de clase $\mathcal{C}^1$. A saber, se da respuesta a la siguiente pregunta planteada en [3]: ¿Dada una función $f(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$, existe alguna función $g(x)$ tal que

$$\int f(x).g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx \text{ ?} \tag{1.1}$$

También se estudia si es posible que la función $f(x)$ cumpla, simultáneamente, la propiedad expresada en la ecuación (1.1) y la siguiente igualdad

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \tag{1.2}$$

2 Preliminares

Es importante puntualizar que el nivel de complejidad de las herramientas matemáticas que son usadas en este trabajo se limita al presente en los cursos básicos de cálculo diferencial e integral en una sola variable, incluyendo las nociones básicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo grado.

Para hacer el trabajo lo más autocontenido posible se presentan a continuación, de manera puntual, los conceptos, nociones y notaciones que se usan a lo largo de todo el trabajo. Además, para algunos enunciados se incluirán sus demostraciones.

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se denotará por $\mathsf{Dom}(f)$ al dominio de la función $f(x)$. Se dirá que $f(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ si ésta es derivable y su derivada es contínua en todo el dominio de $f(x)$, lo cual se denotará escribiendo $f(x) \in \mathcal{C}^1$. Por otro lado, se escribirá $f(x) \neq 0$ para denotar que la función $f(x)$ no es cero en ningún punto $x \in \mathsf{Dom}(f)$.

En cuanto a los métodos de integración que se emplean en el trabajo solo se toman en cuenta el método de cambio de variable y el de por partes, no se toma en cuenta la solución vía series de potencia.

Las nociones sobre ecuaciones diferenciales se limitan a la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas de primer y segundo orden, con coeficientes constantes para el segundo caso. A continuación se ilustran puntualmente, los casos que se utilizan en el trabajo (ver [1, 2, 6]). Dada una ecuación diferencial

$$q(x)y' + p(x)y = 0$$

sus soluciones son las mismas de la ecuación

$$y' + \frac{p(x)}{q(x)}y = 0$$

siemre y cuando $q(x) \neq 0$. Dichas soluciones se pueden encontrar mediante el uso del factor integrante

$$\mathsf{e}^{\int \frac{p(x)}{q(x)}}$$

Obteniendo que

$$y(x) = k\mathsf{e}^{-\int \frac{p(x)}{q(x)}}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Para el caso de ecuaciones defereciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes solo se hace uso del método de solución de una ecuación del tipo:

$$y'' - ky = 0,$$

con $k \in \mathbb{R}^+$, cuya solución se encuentra mediante el uso de la ecuación auxiliar $r^2 - k = 0$ y la misma está dada por

$$y(x) = c_1\mathsf{e}^{\sqrt{k}x} + c_2\mathsf{e}^{-\sqrt{k}x} \tag{2.1}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A continuación se presentan una serie de resultados, presentes en [3], relacionados con la derivada, que serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Teorema 2.1. *Dada una función $f(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$, tal que $f'(x) - f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathsf{Dom}(f' - f)$, entonces existe una familia de funciones $\mathcal{F}_{f(x)}$ definida por:*

$$\mathcal{F}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : [f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \right\}$$

donde $g(x) = k\mathsf{e}^{\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)}\,dx}$, con $k \in \mathbb{R}$. Además, $\mathcal{F}_{f(x)} \neq \{0\}$ si, y solo si, existe la solución de la integral $\int \frac{f'(x)}{f'(x) - f(x)}\,dx$.

Proposición 2.1. *No existe función $g(x) \in \mathcal{C}^1$, con $g(x)$ distinta de la función nula, tal que*

$$[g(x)k\mathrm{e}^x]' = kg'(x)\mathrm{e}^x \tag{2.2}$$

con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demostración. Nótese que

$$[g(x)k\mathrm{e}^x]' = kg'(x)\mathrm{e}^x + kg(x)\mathrm{e}^x \tag{2.3}$$

Luego, igualando las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tiene que $kg(x)\mathrm{e}^x = 0$. Así, dado que $k \neq 0$ y $\mathrm{e}^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $g(x) = 0$. Por tanto, no existe $g(x) \neq 0$ que cumpla la ecuación (2.2). □

Proposición 2.2. *Dda la función $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{e}^{ax}} = \left\{g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = r\mathrm{e}^{bx},\ r \in \mathbb{R}\right\}$$

con $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

Demostración. Sean $w(x) = \mathrm{e}^{ax}$ y $h(x) = \mathrm{e}^{bx}$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces

$$\left(\mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{bx}\right)' = \left(\mathrm{e}^{ax}\right)'\left(\mathrm{e}^{bx}\right)' \Longleftrightarrow (a+b)\mathrm{e}^{(a+b)x} = ab\mathrm{e}^{(a+b)x} \Longleftrightarrow a + b = ab, \tag{2.4}$$

es decir, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. Luego aplicando el Teorema 2.1 se tiene que

$$\mathcal{F}_{\mathrm{e}^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = k\mathrm{e}^{-\int \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{a\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{ax}}\,dx},\ \text{con } k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solucionando la integral $\displaystyle\int \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{a\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{ax}}\,dx$ se tiene que

$$\mathcal{F}_{\mathrm{e}^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = r\mathrm{e}^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x},\ \text{con } r \in \mathbb{R} \right\},$$

donde $r = k\mathrm{e}^c$ $(c \in \mathbb{R})$. □

Proposición 2.3. *Sea $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, una función constante. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $k \neq 0$, entonces $\mathcal{F}_{f(x)} = \mathbb{R}$.*
2. *Si $k = 0$, entonces $\mathcal{F}_{f(x)} = \left\{g(x) : g(x) \in \mathcal{C}^1\right\}$.*

Demostración. Supongamos que $g(x)$ y $f(x)$ cumplen la ecuación (1.2), así

$$kg'(x) = [kg(x)]' = (k)'[g(x)]' = 0.g'(x) = 0 \tag{2.5}$$

Por tanto se tiene que $k = 0$ o $g'(x) = 0$. Si $k = 0$, es claro que toda función $g(x) \in \mathcal{C}^1$ cumplirá la ecuación (1.2). Por otro lado, si $g'(x) = 0$, se tiene que $g(x) = h$ con $h \in \mathbb{R}$ y por tanto cualquier función constante cumpliría en este caso la ecuación (1.2). □

3 Resultados

Supóngase que se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$, con $f(x) \neq 0$, tales que cumplen la ecuación (1.1). Se tratará de determinar la forma de $g(x)$ en función de $f(x)$. Nótese que:

$$\left(\int f(x).g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx \int g(x)\,dx\right)'$$

de manera que

$$f(x).g(x) = f(x)\int g(x)\,dx + g(x)\int f(x)\,dx$$

De aquí se obtiene la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coficientes funcionales

$$g(x)\left[f(x) - \int f(x)\,dx\right] - f(x)\int g(x)\,dx = 0 \tag{3.1}$$

Nótese que haciendo $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ y $G(x) = \displaystyle\int g(x)\,dx$ en la ecuación (3.1), se obtiene que

$$G'(x)\left[F'(x) - F(x)\right] - F'(x)G(x) = 0 \tag{3.2}$$

Esto indica que basta encontrar una solución de la ecuación (3.2) para obtener el valor de $g(x)$ en función de $f(x)$. Si

$$F'(x) - F(x) = 0 \tag{3.3}$$

para todo $x \in \mathsf{Dom}\,[F'(x) - F(x)]$, usando el factor integrante e^{-x} se tiene que la solución de la ecuación (3.3) está dada por $F(x) = k\mathsf{e}^x$. Así,

$$\int f(x)\,dx = k\mathsf{e}^x \Longrightarrow f(x) = k\mathsf{e}^x$$

con $k \in \mathbb{R}$. Luego, sustituyendo en la ecuación (3.1) el valor de $f(x)$, se tiene que

$$k\mathsf{e}^x \int g(x)\,dx = 0$$

Como $\mathsf{e}^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\int g(x)\,dx = 0$. Así, $g(x)$ es la función cero . Esto demuestra el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *No existe una función $g(x) \in \mathcal{C}^1$, distinta de la función cero, tal que*

$$[g(x)k\mathsf{e}^x]' = g'(x)k\mathsf{e}^x,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, si

$$F'(x) - F(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in \mathsf{Dom}\,[F'(x) - F(x)]$$

se tiene que la ecuación (3.2) se transforma en la siguiente ecuación:

$$G'(x) - \frac{F'(x)}{F'(x) - F(x)} G(x) = 0 \tag{3.4}$$

Aplicando el factor integrante $\mathrm{e}^{\int \frac{-F'(x)}{F'(x)-F(x)}\,dx}$ a la ecuación (3.4), se tiene que la solución de la misma está dada por

$$G(x) = k\mathrm{e}^{\int \frac{F'(x)}{F'(x)-F(x)}\,dx},$$

con $k \in \mathbb{R}$. Así,

$$g(x) = k\frac{F'(x)}{F'(x)-F(x)}\,\mathrm{e}^{\int \frac{F'(x)}{F'(x)-F(x)}\,dx} = \frac{kf(x)}{f(x) - \int f(x)\,dx}\,\mathrm{e}^{\int \frac{f(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,dx}$$

De manera que la función $g(x)$ existe si, y solo si, las integrales $\int f(x)\,dx$ y $\int \frac{f(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,dx$ tienen solución. Por tanto, denotando

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : \int f(x).g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx \right\},$$

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = \frac{kf(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,\mathrm{e}^{\int \frac{f(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,dx} \right\}$$

se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Dada una función $f(x) \in \mathcal{C}^1$, tal que $f(x) - \int f(x)\,dx \neq 0$, existe una familia de funciones*

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g_k(x) \in \mathcal{C}^1 : \int f(x).g_k(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g_k(x)\,dx \right\}$$

donde $g_k(x) = \frac{kf(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,\mathrm{e}^{\int \frac{f(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,dx}$, con $k \in \mathbb{R}$. Además, $\mathcal{I}_{f(x)} \neq \{0\}$ si y solo si las integrales $\int f(x)\,dx$ y $\int \frac{f(x)}{f(x)-\int f(x)\,dx}\,dx$ tienen solución.

Es importante recalcar que debido a la forma de las funciones pertenecientes a la familia $\mathcal{I}_{f(x)}$, dos funciones $g_0(x)$ y $g_1(x)$ de dicha familia difieren en solo una constante. Por otro lado, de los resultados presentes en [3], relacionados con la propiedad multiplicativa de la derivada, son válidos los enunciados presentes en: el Corolario 3.1; la Proposición 3.2; el Lema 3.1; y el Corolario 3.2, aplicadas a la propiedad multiplicativa de la integral.

Tómese ahora la función $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, tomando en cuenta el Teorema 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{k\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{ax} - \int \mathrm{e}^{ax}\,dx}\,\mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{ax} - \int \mathrm{e}^{ax}\,dx}\,dx} \\ &= \frac{ka\mathrm{e}^{ax}}{a\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{ax}}\,\mathrm{e}^{\int \frac{a\mathrm{e}^{ax}}{a\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{ax}}\,dx} \\ &= \frac{ka}{a-1}\,\mathrm{e}^{\int \frac{a}{a-1}\,dx} = \frac{ka\mathrm{e}^{c}}{a-1}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x} \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Así, se tiene que:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{e}^{ax}} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = \frac{ka\mathrm{e}^{c}}{a-1}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{a}{a-1}\right)x} \text{ con } k, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ahora, veamos que si $f(x) = h\mathrm{e}^{ax}$ y $g(x) = r\mathrm{e}^{bx}$, entonces se cumple que:

$$\int h\mathrm{e}^{ax} r\mathrm{e}^{bx}\,dx = \int h\mathrm{e}^{ax}\,dx \int r\mathrm{e}^{bx}\,dx \tag{3.5}$$

para que se cumpla la ecuación (3.5) se bede tener que

$$\begin{aligned} \frac{hr}{a+b}\mathrm{e}^{(a+b)x} &= \frac{hr}{ab}\mathrm{e}^{(a+b)x} \\ a+b &= ab \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como por hipótesise tiene que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, entonces se cumple la ecuación (3.6) y por tanto es válida la ecuación (3.5). Esto muestra el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Dada la función $f(x) = h\mathrm{e}^{ax}$, con $a, h \in \mathbb{R}$ ($a \neq 1$), se tiene que*

$$\mathcal{I}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : g(x) = w\,\mathrm{e}^{bx} \text{ con } w \in \mathbb{R} \right\},$$

si, y solo si, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Una pregunta interesante sería ¿existe una función $f(x) \in \mathcal{C}^1$ para que cumpla:

$$\int \mathrm{e}^{f(x)} f(x)\,dx = \int \mathrm{e}^{f(x)}\,dx \int f(x)\,dx? \tag{3.7}$$

Claramente la función cero satisface la ecuación (3.7). Por otro lado, por simple inspección se puede notar que no resultaría trivial determinar si existe una función, o familia de funciones,

$f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathsf{Dom}[f(x)]$ tal que la ecuación (3.7) sea válida. Sin embargo, se pueden estudiar ciertos casos particulares estableciendo ciertas condiciones para $f(x)$. En primera instancia supóngase que

$$f'(x) = f(x) \tag{3.8}$$

así

$$\int \mathsf{e}^{f(x)} f'(x)\,dx = \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx \int f'(x)\,dx$$

Luego, usando el método de integración de cambo de variable (sustitución), en el miembro derecho de la igualdad, se obtiene que

$$\mathsf{e}^{f(x)} = f(x) \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx$$

y por tanto

$$\int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx = \frac{\mathsf{e}^{f(x)}}{f(x)} \tag{3.9}$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (3.9) se tiene que

$$\mathsf{e}^{f(x)} = \frac{f'(x)\mathsf{e}^{f(x)} f(x) - f'(x)\mathsf{e}^{f(x)}}{[f(x)]^2}$$

así,

$$[f(x)]^2 = f'(x)[f(x) - 1]$$

Usando la ecuación (3.8) se obtiene que $f(x) = 0$ lo cual es una contradicción. Con esto se ha mostrado el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^1$, entonces $f'(x) = f(x)$ y $\int \mathsf{e}^{f(x)} f(x)\,dx = \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx \int f(x)\,dx$ si, y solo si, $f(x)$ es la función cero.*

Ahora, derivando en la ecuación (3.7) ambos miembros de la igualdad, se obtiene que

$$\mathsf{e}^{f(x)} f(x) = \mathsf{e}^{f(x)} \int f(x)\,dx + f(x) \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx$$

así,

$$\frac{\mathsf{e}^{f(x)}[f(x) - \int f(x)\,dx]}{f(x)} = \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx \tag{3.10}$$

Derivando, en la ecuación (3.10), ambos miembros de la igualdadse obtiene:

$$\frac{\{f'(x)\mathsf{e}^{f(x)}[f(x) - \int f(x)\,dx] + \mathsf{e}^{f(x)}[f'(x) - f(x)]\}f(x) - f'(x)\mathsf{e}^{f(x)}[f(x) - \int f(x)\,dx]}{[f(x)]^2} = \mathsf{e}^{f(x)}$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\{f'(x)[f(x) - \int f(x)\,dx] + [f'(x) - f(x)]\}f(x) - f'(x)[f(x) - \int f(x)\,dx]}{[f(x)]^2} = 1,$$

$$\frac{\{f'(x)[f(x) - \int f(x)\,dx] - f(x)\}f(x) + f'(x)\int f(x)\,dx}{[f(x)]^2} = 1,$$

$$[f(x)]^2[f'(x) - 2] + [1 - f(x)]f'(x)\int f(x)\,dx = 0 \tag{3.11}$$

De la ecuación (3.11) se puede deducir que $f(x)$ no puede ser una función constante, pues de serlo se tendría que $f'(x) = 0$ y por tanto se obtendría que $-2[f(x)]^2 = 0$, lo cual es una contradicción. De igual manera $f(x)$ no puede ser una polinómica de la forma $ax+b$, con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $f(x) = ax + b$, entonces $\displaystyle\int f(x)\,dx = ax^2 + bx$ y $f'(x) = a$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.11) se obtendría que

$$(a-2)(a^2x^2 + 2abx + b^2) + [(1-b) - ax]a(ax^2 + bx) = 0$$

$$a^2(a-2)x^2 + 2ab(a-2)x + b^2(a-2) + (1-b)a^2x^2 + (1-b)abx - a^3x^3 - a^2bx^2 = 0 \tag{3.12}$$

De la ecuación (3.12) se puede deducir fácilmente que $a = 0$, y por tanto $b = 0$, lo cual es una contradicción. Así, es válido el siguiente enunciado:

Lema 3.2. *Ninguna función $f(x) = k$ o $f(x) = ax + b$, con $k, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, satisface que*

$$\int \mathsf{e}^{f(x)} f(x)\,dx = \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx \int f(x)\,dx$$

De manera similar se pueden estudiar más casos particulares para valores de $f(x)$ y establecer que la ecuación (3.1) no se cumple para dichos valores. Esto parece suponer que la única función que cumple la ecuación (3.7) es la función cero. Sin embargo, como es de notar, un procedimiento definitivo que establezca la veracidad de dicha suposición amerita el uso de herramientas matemáticas de un nivel mayor al preestablecido en este trabajo. Por tal motivo, se deja dicha suposición como un problema abierto.

Otra pregunta que es posible atacar con las herramientas matemáticas que se han preestablecido sería: ¿existe una función $f(x) \neq 0$ tal que:

$$\int [f(x)]^2\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]^2 ? \tag{3.13}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (3.13) se tiene que:

$$[f(x)]^2 = 2f(x)\int f(x)\,dx$$

Haciendo $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ se tiene que

$$F(x)[F(x) - 2F'(x)] = 0$$

Como se busca una función $f(x) \neq 0$ entonces $F(x) \neq 0$ y así

$$F(x) - 2F'(x) = 0 \tag{3.14}$$

Utilizando el factor integrante e^{-2x} en la ecuación (3.14) se obtiene que $F(x) = h\mathrm{e}^{2x}$ con $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y así $f(x) = 2h\mathrm{e}^{2x}$.

Ahora por el Teorema 3.1 se tiene que si $f(x) = 2h\mathrm{e}^{2x}$, con $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces existe la familia

$$\mathcal{I}_{2h\mathrm{e}^{2x}} = \left\{ g_k(x) \in \mathcal{C}^1 : \, g_k(x) = k \frac{2h\mathrm{e}^{2x}}{2h\mathrm{e}^{2x} - h\mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{e}^{\displaystyle\int \frac{2h\mathrm{e}^{2x}}{2h\mathrm{e}^{2x} - h\mathrm{e}^{2x}} \, dx} \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Como

$$\frac{2h\mathrm{e}^{2x}}{2h\mathrm{e}^{2x} - h\mathrm{e}^{2x}} = 2,$$

entonces se tiene que

$$\mathcal{I}_{2h\mathrm{e}^{2x}} = \left\{ g_k(x) \in \mathcal{C}^1 : \, g_k(x) = 2k \, \mathrm{e}^{2x} \text{ con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Con ésto se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.3. *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^1$, entonces se cumple que $\displaystyle\int [f(x)]^2 \, dx = \left[\int f(x) \, dx \right]^2$ si, y solo si, $f(x) = 2h\mathrm{e}^{2x}$ con $h \in \mathbb{R}$.*

Por último, sería pertinente prenguntarse si existen funciones $f(x)$ y $g(x)$, distintas de la función cero, tales que cumplan simultáneamente las ecuaciones (1.1) y (1.2), es decir, que cumplan

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \qquad \text{y} \qquad \int f(x).g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \int g(x) \, dx \tag{3.15}$$

Tomando en cuenta la Proposición 2.2 y el Lema 3.1, se tiene que las funciones $f(x) = h\mathrm{e}^{ax}$ y $g(x) = r\mathrm{e}^{bx}$, con $r, h, a, b \in \mathbb{R}$, tales que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ cumplen las ecuaciones presentes en (3.15). De manera que definiendo:

$$\mathcal{SIF}_{f(x)} = \left\{ g(x) \in \mathcal{C}^1 : [f(x).g(x)]' = f'(x).g'(x) \text{ y } \int f(x).g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \int g(x) \, dx \right\}$$

se puede decir que $\mathcal{SIF}_{h\mathrm{e}^{ax}} \neq \emptyset$ pues $\left\{ r\mathrm{e}^{bx} : r, b \in \mathbb{R} \text{ y } \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1 \right\} \subseteq \mathcal{SIF}_{h\mathrm{e}^{ax}}$

Tratemos de ver si es posible encontrar alguna otra forma para $f(x)$ y $g(x)$ de tal manera que cumplan las ecuaciones presentes en (3.15). Obsérvese que derivando la segunda ecuación presente en (3.15) se tiene que

$$f(x).g(x) = \left[\int f(x) \, dx \int g(x) \, dx \right]' = f(x) \int g(x) \, dx \, + \, g(x) \int f(x) \, dx. \tag{3.16}$$

Derivando ahora la ecuación (3.16), y usando la segunda ecuación presente en (3.15), se tiene que

$$f'(x).g'(x) = f'(x) \int g(x) \, dx + f(x)g(x) + g'(x) \int f(x) \, dx \, + \, g(x)f(x)$$

$$g'(x)\left[f'(x)-\int f(x)\,dx\right]-2g(x)f(x)-\int g(x)\,dx\,f'(x)=0$$

Haciendo $G(x)=\int g(x)\,dx$, se tiene la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes funcionales:

$$G''(x)\left[f'(x)-\int f(x)\,dx\right]-2G'(x)f(x)-G(x)f'(x)=0 \tag{3.17}$$

En este punto es importante resaltar que, dada la dificultad de resolver una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes funcionales no constantes, se centrará el estudio de la ecuación (3.17) en los casos donde se obtenga una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Por tanto, se estudiarán dos casos: cuando $f'(x)-\displaystyle\int f(x)\,dx=0$; y cuando $f'(x)=0$. Sin embargo, el segundo de los casos mencionadas no es posible ya que si $f'(x)=0$, entonces $f(x)$ sería constante y no cumpliría la ecuación (1.2). Por tal motivo, se enfocará el estudio solo en el primer caso.

<u>Caso</u>: $f'(x)-\displaystyle\int f(x)\,dx=0.$

Haciendo $F(x)=\int f(x)\,dx$ se obtiene la ecuación

$$F''(x)-F(x)=0$$

que tiene la ecuación auxiliar $r^2-1=0$. Así, $F(x)=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{-x}$ con $c_1,c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por la ecuación (2.1). Por tanto,

$$f(x)=F'(x)=c_1\mathrm{e}^{x}-c_2\mathrm{e}^{-x} \tag{3.18}$$

Tomando en cuenta que

$$\left[g(x)\left(c_1\mathrm{e}^{x}-c_2\mathrm{e}^{-x}\right)\right]'=\left[g(x)c_1\mathrm{e}^{x}\right]'-\left[g(x)c_2\mathrm{e}^{-x}\right]',$$

se debe tener que $\left[g(x)c_1\mathrm{e}^{x}\right]'=g'(x)\left(c_1\mathrm{e}^{x}\right)'$ y $\left[g(x)c_2\mathrm{e}^{-x}\right]'=g'(x)\left(c_2\mathrm{e}^{-x}\right)'$ para que $g(x)$ y $f(x)$ cuamplan la ecuación (1.2). Sin embargo, por la Proposisión 2.1 se tiene que $c_1=0$ y por tanto $f(x)=-c_2\mathrm{e}^{-x}$.

Ahora de la ecuación (3.17) se obtiene que

$$2G'(x)f(x)+G(x)f'(x)=0 \tag{3.19}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.19) el valor de $f(x)$ se obtiene que

$$G'(x)\left(2c_2\mathrm{e}^{-x}\right)-G(x)\left(c_2\mathrm{e}^{-x}\right)=0$$

Como $f(x)\neq 0$, entonces $c_2\neq 0$, y como $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, se tiene que

$$G'(x)-\frac{1}{2}G(x)=0 \tag{3.20}$$

Utilizando el factor integrante $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ en la ecuación (3.20), se tiene que $G(x)=r\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ con $r\in\mathbb{R}$. Así,

$$g(x)=G'(x)=\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

Comprobemos que las funciones $f(x) = -c_2\mathsf{e}^{-x}$ y $g(x) = \frac{r}{2}\mathsf{e}^{\frac{1}{2}x}$ satisfacen las ecuaciones (1.1) y (1.2). Así,

$$[f(x)g(x)]' = \left(\frac{-c_2 r}{2}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}x}\right)' = \frac{c_2 r}{4}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{y} \quad f'(x)g'(x) = \left(c_2\mathsf{e}^{-x}\right)\left(\frac{r}{4}\mathsf{e}^{\frac{1}{2}x}\right) = \frac{c_2 r}{4}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

donde claramente se ve que se cumple la ecuación (1.2). Comprobemos ahora la ecuación (1.1):

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int \frac{-c_2 r}{2}\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}x}\,dx = c_2 r\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\int f(x)\,dx \int g(x)\,dx = \left(c_2\mathsf{e}^{-x}\right)\left(r\mathsf{e}^{\frac{1}{2}x}\right) = c_2 r\mathsf{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

Nótese que haciendo $a = -1$ y $b = \frac{1}{2}$, se tiene que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

<u>Caso</u>: $f'(x) = 0$.

Puesto que $f'(x) = 0$, se tiene que $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Luego, por la Proposición 2.3 se tiene que las únicas funciones $g(x)$ que satisfacen la ecuación (1.2) son las funciones constantes, pero claramente éstas no satisfecan la ecuación (1.1). Por tanto no existen funciones $g(x) \in \mathcal{C}^1$, distintas de cero, tal que $g(x) \in \mathcal{SIF}_{f(x)}$ si $f'(x) = 0$.

4 Observaciones

Como se puede observar en el cuerpo del trabajo quedaron para futuras investigaciones preguntas tales como:

1. ¿Existe alguna función $f(x) \neq 0$ tal que $\displaystyle\int \mathsf{e}^{f(x)} f(x)\,dx = \int \mathsf{e}^{f(x)}\,dx \int f(x)\,dx$?
2. Dada una función $f(x) \notin \{0,\ h\mathsf{e}^{ax}\}$, con $h, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ¿Se podría determinar la forma de las funciones $g(x) \in \mathcal{SIF}_{f(x)}$ en términos de $f(x)$?

De este estudio parece intuirse que la única función que satisface la primera pregunta es la función cero. Sin embargo, no se ha establecido una demostración concreta de tal suposición. Por otro lado, la complicación presente en la segunda pregunta es la aparición de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes funcionales no constantes. A saber la ecuación:

$$G''(x)\left[f'(x) - \int f(x)\,dx\right] - 2G'(x)f(x) - G(x)f'(x) = 0$$

Que suponiendo que $f'(x) - \int f(x)\,dx \neq 0$, para todo $x \in \mathsf{Dom}\left[f'(x) - \int f(x)\,dx\right]$, se traduce en la ecuación:

$$G''(x) - \frac{2f(x)}{f'(x) - \displaystyle\int f(x)\,dx}G'(x) - \frac{f'(x)}{f'(x) - \displaystyle\int f(x)\,dx}G(x) = 0.$$

5 Agradecimientos

Se agradece a todos los árbitros que tengan en bien la evaluación del presente trabajo.

Referencias

[1] Boyce, William E. y DiPrima, Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Editorial LIMUSA, Mexico, D.F. 1991.

[2] Leithold, Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica.* Editorial HARLA, Mexico, D.F. 1992.

[3] Rosas, T. *Una propiedad multiplicativa de la derivada en funciones de clase* $\mathcal{C}^1$. Aleph Sub-cero, Serie de divulgaciones. **1**(2015), 81–102.

[4] Rosas, T. $\mathcal{C}$*-ortocentros y sistemas* $\mathcal{C}$*-ortocéntricos en planos de Minkowski.* Aleph Sub-cero, Serie de divulgaciones. **2**(2014), 104–132.

[5] Rosas, T. *Sistemas* $\mathcal{C}$*-ortocéntricos y circunferencia de Feuerbach para cuadriláteros en planos de Minkowski.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **22**(2) (2015), 125–141.

[6] Trucco, Sixto E. y Casparri de Rodríguez, María T. *Ecuaciones Diferenciales.* Ediciones Macchi, Cordoba - Buenos Aires, 2015.