

Propiedades geométricas de polígonos en planos de Minkowski

Geometric properties of polygons in Minkowski planes

Loidybeth Carrillo Colmenares (loidy_16@hotmail.com)

Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)

Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo - Venezuela

Resumen

En este artículo se estudian las propiedades geométricas de dos tipos de polígonos en el plano normado y afín \mathbb{R}^2 , tales como: cuadriláteros y pentágonos. Se generaliza la noción de anticuadrilátero para cualquier cuadrilátero, con respecto a un punto del plano y se introduce la noción de \mathcal{C} -ortocentro para cuadriláteros inscritos en una circunferencia. De igual forma se define la noción de antipentágono para un pentágono cualquiera, en el plano normado y afín \mathbb{R}^2 , con respecto a un punto dado y también se introduce la noción de \mathcal{C} -ortocentro para pentágonos inscritos en una circunferencia. Se determinan las relaciones geométricas del baricentro de estos polígonos, sus respectivos antipolígonos, los triángulos formados por sus vértices y algunos puntos notables de dichos triángulos, tales como: baricentros, circuncentros y \mathcal{C} -ortocentros, respectivamente (cuando estos existen). Se utilizó el programa Geogebra para la modelación de figuras en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 .

Palabras y frases clave: Planos de Minkowski, polígonos, centroide, \mathcal{C} -ortocentro, antipolígonos.

Abstract

In this article we study the geometric properties of two type of polygons in the normed and affine plane \mathbb{R}^2 , such as: quadrilaterals and pentagons. The notion of antiquadrilateral is generalized for any quadrilateral, with respect to a point in the plane and we introduce the notion of \mathcal{C} -orthocenter to inscribed quadrilaterals on a circumference. On the same way we define the notion antipentagon for any pentagon in the normed and affine plane \mathbb{R}^2 , with respect to a given point and so we introduce the notion of \mathcal{C} -orthocenter to inscribed pentagons on a circumference. The geometric relations of the barycentre of this polygons, its antipolygons, the triangles formed by its vertices and some points related to these triangles, such as: baricenters, circumcenters and \mathcal{C} -orthocenters (when they exist), are determined. The Geogebra program was used for the modeling of figures in the euclidean plane \mathbb{R}^2 .

Key words and phrases: Minkowski planes, polygons, centroid, \mathcal{C} -orthocenter, antipolygons.

1 Introducción

Desde el punto de vista analítico, el plano euclídeo es un espacio bidimensional con producto interno donde se satisfacen los axiomas de Euclides para la Geometría (ver [1, 3, 4, 11]). Como consecuencia de la estructura algebraica del espacio y sus relaciones, los distintos objetos geométricos pueden ser vistos como ecuaciones algebraicas. Por tanto, los resultados de la Geometría clásica de Euclides pueden ser traducidos o interpretados como algún tipo de relación algebraica analítica.

Ahora bien, en los espacios vectoriales bidimensionales (planos) se pueden definir diferentes tipos de normas y, por tanto, distintas formas de medir en dichos plano. Estos planos normados son llamados *planos de Minkowski* y han sido muy estudiados (véase [3, 4, 11]). Todo matemático que trabaje con Geometría en planos de Minkowski sabe, de su propia experiencia, que hay muchas propiedades geométricas elementales no se cumplen para todos los planos normados en general, tal y como se cumplen en el plano euclídeo. Sin embargo, algunas propiedades pueden redefinirse de manera que las mismas se cumplan, en cierto modo, en planos normados. Un ejemplo de esto se puede observar en [2, 5, 6, 8, 9, 10] sobre triángulos y en [2, 7] para cuadriláteros inscritos en una circunferencia.

En este trabajo concentramos nuestro estudio en las propiedades geométricas existentes en cuadriláteros y pentágonos sobre el plano normado y afín \mathbb{R}^2 . Se generaliza la noción de anticuadrilátero para cualquier cuadrilátero, con respecto a un punto del plano y se introduce la noción de \mathcal{C} -ortocentro para cuadriláteros inscritos en una circunferencia. De igual forma se define la noción de antipentágono para un pentágono cualquiera, en el plano normado y afín \mathbb{R}^2 , con respecto a un punto dado y también se introduce la noción de \mathcal{C} -ortocentro para pentágonos inscritos en una circunferencia. También se determinan las relaciones geométricas del baricentro de cada uno de estos polígonos, sus antipolígonos, los triángulos formados por sus vértices y puntos asociados con los mismos, tales como: baricentros, circuncentros y \mathcal{C} -ortocentros, respectivamente (cuando estos existan).

Se utiliza el programa Geogebra (ver [12]) para la modelación de figuras en el plano euclídeo \mathbb{R}^2 . Es importante aclarar que en las figuras de ilustración se utilizan las circunferencias generadas por la norma euclídea con la finalidad de generar una mejor comprensión de la idea que se desee resaltar en la demostración.

2 Preliminares

Dado un plano M y $x_1, x_2 \in M$. Se denota por $\langle x_1, x_2 \rangle$ a la *recta* que pasa por los puntos x_1 y x_2 , parametrizada por $tx_1 + (1-t)x_2$ con $t \in \mathbb{R}$ y por $[x_1, x_2]$ al *segmento* entre x_1 y x_2 , dado por $tx_1 + (1-t)x_2$ con $t \in [0, 1]$, cuyo *punto medio* está dado por $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Nótese que el *vector director* de la reca $\langle x_1, x_2 \rangle$, o del segmento $[x_1, x_2]$, está dado por $x_1 - x_2$. De manera que dos rectas, o segmentos, serían *paralelas* si sus dos vectores directores son múltiplos esalares entre sí.

Se llamará *circunferencia unitaria* al conjunto $\mathcal{C} = \{x \in V : \|x\| = 1\}$ y para cualquier punto $x \in V$ y $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el conjunto $\mathcal{C}(x, r) = x + r\mathcal{C} = \{y \in V : \|x - y\| = r\}$ se definirá como la *circunferencia de centro x y radio r* .

Sean $p \in M$ y $k \in \mathbb{R}$, se llamará *simetría puntal de centro p* a la función $S_p : M \rightarrow M$ dada por $S_p(w) = 2p - w$, $\forall w \in M$ y se llamará *homotecia* de centro p y razón k , a la función $H_{p,k} : M \rightarrow M$ dada por la expresión $H_{p,k}(w) = (1-k)p + kw$, $\forall w \in M$, también llamada *homotecia puntal de razón k* .

Se llamará *triángulo* con vértices en los puntos x_1, x_2, x_3 , denotado por $\Delta x_1 x_2 x_3$, al conjunto de puntos $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, con $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Los segmentos $[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1]$ serán los *lados del triángulo* y $g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ se denominará el *báricentro* del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Un punto x se dirá *circuncentro* del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$ si es centro de una circunferencia que contiene los vértices del triángulo. También dado un punto cualquiera del plano p_4 diremos que el triángulo $\Delta p_1 p_2 p_3$ es el p_4 -*antitriángulo* del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$ si $p_i = S_{m_i}(p_4)$ para $i = 1, 2, 3$, donde m_i son los puntos medios de los lados del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$. Se define al punto $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - 2p_4}{2}$ el punto de simetría entre el triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4 -antitriángulo $\Delta p_1 p_2 p_3$, donde claramente $p_i = S_p(x_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Además si p_4 un circuncentro del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$, entonces se dirá que x_4 es el *C-ortocentro* del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$ asociado a p_4 , si $S_q(p_4) = x_4$. Por último, si x_4 es el *C-ortocentro* del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$ y $n_i = \frac{x_4 + m_i}{2}$, para $i = 1, 2, 3$. Se llama *circunferencia de Feuerbach* del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$, a la circunferencia que pasa por los puntos m_i y n_i , para $i = 1, 2, 3$.

Sea $\mathcal{V}_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ un conjunto de puntos distintos del plano, se llama *polígono estrellado de n lados* o *n -gono estrellado*, de vértices x_i , denotado por $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_n}$, a la poligonal cerrada formada por los puntos x_i . De igual forma se llama *polígono convexo de n lados* o *n -gono convexo*, de vértices x_i , denotado por $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$, al conjunto de puntos de la forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, con $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 1$. Los segmentos $[x_i, x_{i+1}]$ y $[x_n, x_1]$ son llamados *lados del polígono*, para $i = 1, \dots, n-1$. También se llamará *centroide del*

polígono $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$ al punto $b_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Es importante aclarar que b_c no es el centroide del n -gono

estrellado $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_n}$. Si hay una circunferencia $\mathcal{C}(p, r)$ en M tal que los vértices x_i del polígono $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$ cumplen que $x_i \in \mathcal{C}(p, r)$ para todo $x_i \in \mathcal{V}_n$ se dirá que $\mathcal{C}(p, r)$ es la circunferencia circunscrita de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$ y p se dirá *circuncentro* de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$. También se dirá que el polígono está inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}(p, r)$.

Denominaremos *circunferencia de Feuerbach de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia* (ver [2]), a la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias de Feuerbach de los triángulos que se pueden formar con los vértices del cuadrilátero.

Por último enunciaremos una serie de resultados relevantes para la comprensión y desarrollo del artículo. A saber:

Teorema 2.1. (ver [8]) Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro puntos distintos, en un plano de Minkowski, pertenecientes a la $\mathcal{C}(x, \lambda)$. Sea q_i el punto de simetría del $\Delta p_j p_k p_l$ y su x -antitriángulo, y $h_i = S_{q_i}(x)$ el *C-ortocentro* del $\Delta p_j p_k p_l$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

1. Los segmentos $[h_i, p_i]$ tienen el mismo punto medio q . Además,

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}.$$

2. $h_i - h_j = p_j - p_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. Los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[q_i, q_j]$ son paralelos para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Si $w = S_q(x)$, entonces $h_i \in C(w, \lambda)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
5. $q_i \in C(q, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

$$6. C(q, \frac{\lambda}{2}) = H_{w, \frac{1}{2}}(C(x, \lambda)).$$

7. Si $m_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}$ y $x_{ij} = S_{m_{ij}}(x)$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, entonces x_{ij} es circuncentro de los triángulos que se forman a partir de los puntos $\{p_i, p_j, h_k, h_l\}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Teorema 2.2. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro puntos distintos, en un plano de Minkowski, pertenecientes a la $C(x, \lambda)$. Sea q_i el punto de simetría del $\Delta p_j p_k p_l$ y su x -antitriángulo, y $h_i = S_{q_i}(x)$ el C -ortocentro del $\Delta p_j p_k p_l$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

1. Los segmentos $[h_i, p_i]$ tienen el mismo punto medio q . Además,

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}$$

2. $h_i - h_j = p_j - p_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[q_i, q_j]$ son paralelos para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

4. Si $w = S_q(x)$, entonces $h_i \in C(w, \lambda)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

5. $q_i \in C(q, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

$$6. C(q, \frac{\lambda}{2}) = H_{w, \frac{1}{2}}(C(x, \lambda)).$$

7. Si $m_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}$ y $x_{ij} = S_{m_{ij}}(x)$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, entonces x_{ij} es circuncentro de los triángulos que se forman a partir de los puntos p_i, p_j, h_k y h_l para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

3 Cuadriláteros

Teorema 3.1. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 y f , puntos distintos en un plano de Minkowski M . Sea w_i el punto de simetría del $\Delta x_j x_k x_l$ con su f -antitriángulo, y sea $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Sean $b_c = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4}$ y $h_i = S_{w_i}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos $[x_i, h_i]$, con $i = 1, 2, 3, 4$, tienen el mismo punto medio q . Además,

$$q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2},$$

es decir, $q = H_{b_c, -1}(f)$.

2. $x_i - x_j = h_j - h_i$, con $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

3. $w_i = H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. También $w_i - w_j = \frac{3}{2}(b_i - b_j)$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

4. $b_i = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Además, $b_i - b_j = -\frac{1}{3}(x_i - x_j)$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

5. $h_i = H_{b_i, -2}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. En particular, $h_i - h_j = 3(b_i - b_j)$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Demostración. Tómese en cuenta que $h_i = S_{w_i}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$ y $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2}$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ (ver (a), Figura 1). Por tanto,

$$\frac{x_i + h_i}{2} = \frac{x_i + \left[2 \left(\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} \right) - f \right]}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2} = 2b_c - f = H_{b_c, -1}(f),$$

para todo $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

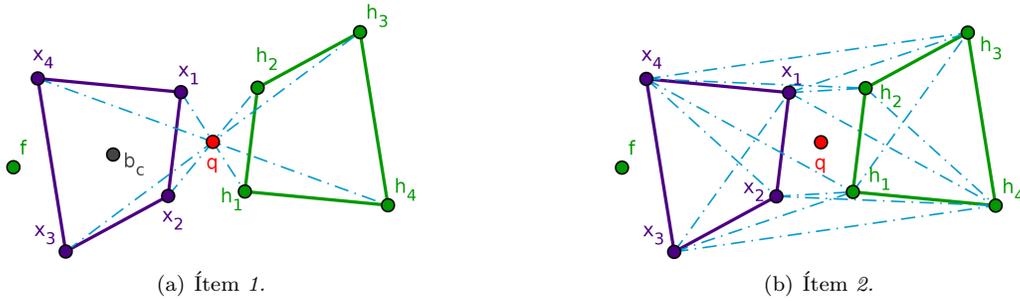


Figura 1: Ilustraciones 1, Teorema 3.1

Ahora (ver (b), Figura 1) obsérvese que

$$h_i = 2w_i - f = 2 \left(\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} \right) - f = x_j + x_k + x_l - 2f$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto, se tiene que

$$h_j - h_i = x_i + x_k + x_l - 2f - (x_j + x_k + x_l - 2f) = x_i - x_j.$$

Nótese que $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Por definición de homotecia $H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f) = \frac{3}{2}b_i - \frac{f}{2}$, luego

$$H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f) = \frac{3}{2}b_i - \frac{f}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{x_j + x_k + x_l}{3} \right) - \frac{f}{2} = \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} = w_i$$

En particular,

$$w_i - w_j = \left(\frac{3}{2}b_i - \frac{f}{2} \right) - \left(\frac{3}{2}b_j - \frac{f}{2} \right) = \frac{3}{2}(b_i - b_j).$$

para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ distintos (ver (a), Figura 2).

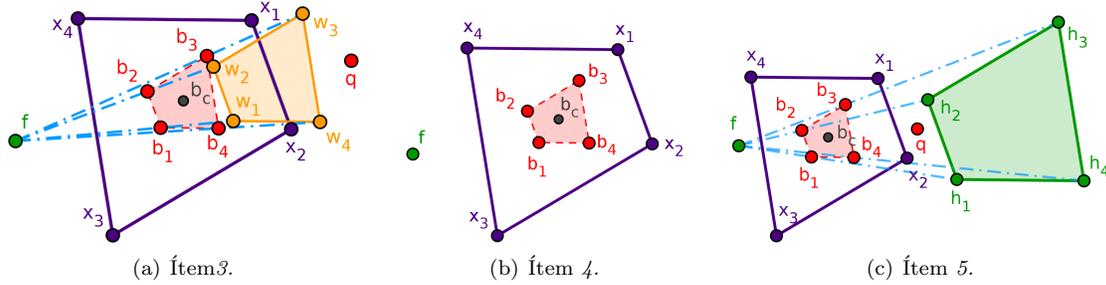


Figura 2: Ilustración 2, Teorema 3.1

Por otro lado, se tiene que $b_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ y, por definición de homotecia,

$$H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_i) = \frac{1}{3}(4b_c - x_i) = \frac{1}{3}((x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_i) = \frac{x_j + x_k + x_l}{3} = b_i.$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Luego, (ver (b), Figura 2)

$$b_i - b_j = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_i) - H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_j) = \left(\frac{4}{3}b_c - \frac{1}{3}x_i\right) - \left(\frac{4}{3}b_c - \frac{1}{3}x_j\right) = -\frac{1}{3}(x_i - x_j).$$

Por último, por definición de homotecia, $H_{b_i, -2}(f) = 3b_i - 2f$ (ver (c), Figura 2). Así, $H_{b_i, -2}(f) = x_j + x_k + x_l - 2f$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, implicando que $h_i = H_{b_i, -2}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Por tanto,

$$h_i - h_j = H_{b_i, -2}(f) - H_{b_j, -2}(f) = (3b_i - 2f) - (3b_j - 2f) = 3(b_i - b_j).$$

mostrando lo deseado. □

Basados en el Teorema 3.1 se puede establecer la definición de anticuadrilátero para un cuadrilátero cualquiera, con respecto a un punto en el plano:

Definición 3.1. Sea M un plano de Minkowski. Sea $\mathcal{V}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ el conjunto de vértices del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$) en M , y sea $b_c = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i$. Sean $f \in M$, tal que $f \notin \mathcal{V}_4$, y $q = H_{b_c, -1}(f)$. Se dice que el $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{H}_4}$) es el f -anticuadrilátero de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$), si $\mathcal{H}_4 = \{h_i : h_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4\}$ (ver Figura 3).



Figura 3: f -anticuadrilátero

Nótese que la Definición 3.1 también cumple que $h_i = S_{w_i}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, donde w_i es el punto de simetría del $\Delta x_j x_k x_l$ con su f -antitriángulo, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Esto concuerda con la Definición 3.1 de anticuadrilátero, mostrada en [7] para cuadriláteros inscritos en una circunferencia.

Teorema 3.2. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 y f , puntos distintos en un plano de Minkowski M . Sean w_i el punto de simetría del $\Delta x_j x_k x_l$ con su f -antitriángulo, y $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Sean $b_c = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4}$, $q = H_{b_c, -1}(f)$, y $h_i = S_{w_i}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces se cumple:

1. Si $z_i = S_q(w_i)$, los segmentos $[b_i, z_i]$ se intersectan en el punto $g = H_{b_c, -\frac{3}{5}}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
2. Los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. En particular, $h_i - h_j = 2(w_i - w_j)$.
3. Si $t = S_q(f)$ y $z_i = S_q(w_i)$, entonces $z_i = H_{t, \frac{1}{2}}(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, y $z_i - z_j = w_j - w_i$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Además, z_i es el punto de simetría del $\Delta h_j h_k h_l$ y su t -antitriángulo.
4. Los segmentos $[x_i, x_j]$, $[b_i, b_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. En particular, $b_i - b_j = \frac{1}{3}(x_j - x_i)$.
5. Si $m_{ij} = \frac{x_i + x_j}{2}$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, entonces

$$b_c = [m_{12}, m_{34}] \cap [m_{41}, m_{23}].$$

Demostración. Nótese que la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1 - t_1) b_1 + t_1 z_1 = y_1 \\ (1 - t_2) b_2 + t_2 z_2 = y_2 \\ (1 - t_3) b_3 + t_3 z_3 = y_3 \\ (1 - t_4) b_4 + t_4 z_4 = y_4 \end{cases} \quad (3.1)$$

con $t_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3, 4$, muestra el punto g de intersección de los segmentos $[b_i, z_i]$ (ver (a), Figura 4). En efecto, tomando en cuenta que $z_i = S_q(w_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, se igualan dos ecuaciones cualesquiera del sistema (4.5) obteniendo que:

$$\begin{aligned} (1 - t_i) b_i + t_i z_i &= (1 - t_j) b_j + t_j z_j, \\ (1 - t_i) b_i + t_i (2q - w_i) &= (1 - t_j) b_j + t_j (2q - w_j) \\ (t_i - t_j) 2q + (1 - t_i) \left(\frac{x_j + x_k + x_l}{3} \right) - t_i w_i &= (1 - t_j) \left(\frac{x_i + x_k + x_l}{3} \right) - t_j w_j \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} t_i - t_j \right) x_j + \left(t_i - \frac{1}{6} t_j - \frac{1}{3} \right) x_i + \frac{1}{6} (t_i - t_j) (x_k + x_l) - (t_i - t_j) f &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t_i - 6t_j = -2 \\ 6t_i - t_j = 2 \\ t_i - t_j = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

cuya solución está dada por $t_i = \frac{2}{5} = t_j$. Así, $t_i = \frac{2}{5}$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

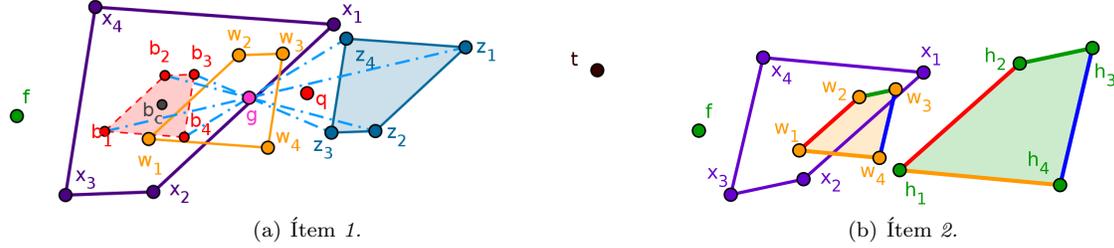


Figura 4: Ilustración 1, Teorema 3.2

Sustituyendo t_i en (4.5), y utilizando el ítem 1., Teorema 3.1, se obtiene que

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) b_i + \frac{2}{5} z_i = \frac{3}{5} b_i + \frac{2}{5} (2q - w_i) = \frac{3}{5} b_i + \frac{4}{5} (2b_c - f) - \frac{2}{5} w_i = \frac{3}{5} b_i + \frac{8}{5} b_c - \frac{4}{5} f - \frac{2}{5} w_i.$$

Como $w_i = H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4$ (por el ítem 3. del Teorema 3.1), se tiene

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) b_i + \frac{2}{5} z_i = \frac{3}{5} b_i + \frac{8}{5} b_c - \frac{4}{5} f - \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} b_i - \frac{1}{2} f\right) = \frac{8}{5} b_c - \frac{3}{5} f$$

Así, $g = \frac{8}{5} b_c - \frac{3}{5} f$ y, por definición de homotecia, $g = H_{b_c, -\frac{3}{5}}(f)$.

Nótese ahora que $h_i = S_{w_i}(f)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ (ver (b), Figura 4). Por tanto,

$$h_i - h_j = S_{w_i}(f) - S_{w_j}(f) = (2w_i - f) - (2w_j - f) = 2(w_i - w_j).$$

Por otro lado, si $z_i = S_q(w_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, se tiene

$$z_i - z_j = S_q(w_i) - S_q(w_j) = (2q - w_i) - (2q - w_j) = w_j - w_i$$

para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. De igual forma como $H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_i$ y $t = S_q(f)$, se tiene que

$$\begin{aligned} H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) &= \frac{1}{2}(2q - f) + \frac{1}{2}x_i = q + \frac{x_i - f}{2} = q + \frac{x_i - f}{2} + w_i - w_i = \\ &= q + \frac{x_i - f}{2} + \left(\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2}\right) - w_i = \\ &= q + \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}\right) - w_i = 2q - w_i. \end{aligned}$$

De manera que se cumple el ítem 3. (ver (a), Figura 5).

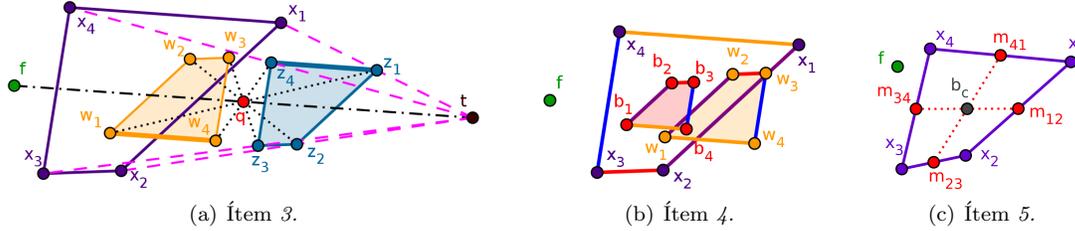


Figura 5: Ilustración 2, Teorema 3.2

Nótese que por el ítem 2. del Teorema 3.1, los segmentos $[x_i, x_j]$ y $[h_i, h_j]$ son paralelos. Luego, por el ítem 2., los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos. Así, por transitividad, los segmentos $[x_i, x_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos (ver (b), Figura 5). Además,

$$b_i - b_j = \frac{x_j + x_k + x_l}{3} - \frac{x_i + x_k + x_l}{3} = \frac{x_j - x_i}{3}.$$

Finalmente, (ver (c), Figura 5), para determinar el punto de intersección de los segmentos:

$$(1 - t_0)m_{12} + t_0m_{34} \quad \text{y} \quad (1 - t_1)m_{41} + t_1m_{23}. \quad (3.3)$$

para $t_0, t_1 \in [0, 1]$. Igualemos las ecuaciones presentes en (3.3), para determinar los valores de t_0 y t_1 :

$$(1 - t_0)m_{12} + t_0m_{34} = (1 - t_1)m_{41} + t_1m_{23}. \quad (3.4)$$

Así, desarrollando la ecuación (3.4) se tiene que

$$(1 - t_0) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + t_0 \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right) = (1 - t_1) \left(\frac{x_4 + x_1}{2} \right) + t_1 \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right)$$

$$x_1 \left[\frac{(1 - t_0)}{2} + \frac{(t_1 - 1)}{2} \right] + x_2 \left[\frac{(1 - t_0)}{2} - \frac{t_1}{2} \right] + x_3 \left(\frac{t_0}{2} - \frac{t_1}{2} \right) + x_4 \left[\frac{t_0}{2} + \frac{(t_1 - 1)}{2} \right] = 0$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t_0 + t_1 = 1 \\ t_0 - t_1 = 0 \end{cases} \implies t_0 = t_1 = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de t_0 en la primera ecuación en (3.3) se tiene que:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x_3 + x_4}{2} \right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = b_c.$$

obteniendo así lo deseado. □

Es importante notar que las propiedades de cinco puntos cualesquiera en un plano de Minkowski mostradas en los Teoremas 3.1 y 3.2, también son válidas en un espacio vectorial bidimensional pues las demostraciones de dichos teoremas se realizaron usando solo nociones afines que no dependen de la norma del plano tales como: simetría, homotecia y paralelismo.

Por otro lado, obsérvese que si $\mathcal{V}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es el conjunto de vértices de los polígonos $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$, entonces todas las propiedades del Teorema 3.1 y Teorema 3.2 se cumplen para $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$, salvo el hecho de que b_c es el centroide de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ ($b_{\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}}$), pero no el de $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$.

Ahora se presentarán dos resultados donde se mostrarán propiedades de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, relacionadas con un punto cualquiera del plano. Se establecerán algunas comparaciones de las mencionadas propiedades con otras presentes en el Teorema 2.1 y algunos otros resultados contenidos en [7].

Teorema 3.3. Sean M un plano de Minkowski y $\mathcal{C}(x, r)$ una circunferencia en M . Sean x_1, x_2, x_3, x_4 y f puntos distintos de M , con x_1, x_2, x_3 y x_4 en $\mathcal{C}(x, r)$. Sean $q_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x}{2}$, $b_c = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4}$ y $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}$. Sean $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$ y w_i el punto de simetría del $\triangle x_j x_k x_l$ y su f -antitriángulo para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$; $c_h = S_q(x)$; y $h_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces se cumple:

1. Si $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x)$ es el centro de una circunferencia que contiene los b_i , entonces $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}) = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$.
2. Si $c_w = H_{f, \frac{3}{2}}(c_b)$ es el centro de una circunferencia que contiene los w_i , entonces $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$.
3. Si $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ es el centro de una circunferencia que contiene los w_i , entonces $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$.
4. Si c_w es el centro de una circunferencia que contiene los w_i , entonces $q = S_{c_w}(q_x)$.

Demostración. Tomemos $y \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$, por tanto $\|c_b - y\| = \frac{r}{3}$ (ver (a), Figura 6). Se verá que $y \in H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$. Supóngase que existe $w \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $y = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(w)$, determinemos la forma que tendría tal w . A saber,

$$y = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(w) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) b_c - \frac{1}{3} w = \frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} w,$$

entonces $w = 4b_c - 3y$.

Veamos ahora que $w \in \mathcal{C}(x, r)$. Como $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x)$ por hipótesis, entonces

$$\|x - w\| = \|x - (4b_c - 3y)\| = 3 \left\| y - \left(\frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} x \right) \right\| = 3 \|y - c_b\| = r.$$

De manera que $y \in H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$ y por tanto, $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}) \subset H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$.

Luego, si $y \in H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$, entonces existe $z \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $y = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(z)$. Obsérvese que $\|x - z\| = r$, así

$$\|c_b - y\| = \left\| H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x) - H_{b_c, -\frac{1}{3}}(z) \right\| = \left\| \left(\frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} x \right) - \left(\frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} z \right) \right\| = \frac{1}{3} \|z - x\| = \frac{r}{3}.$$

De manera que $y \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$ y, por tanto, $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}) \supset H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$.

Si $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, entonces $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$ (ver (b), Figura 6). Veamos que $y \in H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$. Supóngase existe $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$ tal que $y = H_{f, \frac{3}{2}}(w)$. Determinemos la forma de dicho w ,

$$y = H_{f, \frac{3}{2}}(w) = \left(1 - \frac{3}{2}\right) f + \frac{3}{2} w = \frac{3}{2} w - \frac{1}{2} f,$$

entonces $w = \frac{1}{3}(2y + f)$. Veamos que $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$. A saber,

$$\|c_b - w\| = \left\| c_b - \left(\frac{1}{3}(2y + f)\right) \right\| = \frac{1}{3} \|3c_b - (2y + f)\|. \tag{3.5}$$

Como $c_w = H_{f, \frac{3}{2}}(c_b)$, se tiene que

$$\frac{r}{2} = \|c_w - y\| = \left\| \left(1 - \frac{3}{2}\right) f + \frac{3}{2} c_b - y \right\| = \frac{1}{2} \|3c_b - 2y - f\| = \frac{1}{2} \|3c_b - (2y + f)\|$$

por tanto

$$\|3c_b - (2y + f)\| = r. \tag{3.6}$$

Así, por las ecuaciones (3.5) y (3.6), se tiene que $\|c_b - w\| = \frac{r}{3}$. De manera que $y \in H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$, obteniendo que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$

Luego, si $y \in H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$, entonces existe $z \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$ tal que $H_{f, \frac{3}{2}}(z) = y$. Obsérvese que $\|c_b - z\| = \frac{r}{3}$. Veamos entonces que $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, así

$$\|c_w - y\| = \left\| H_{f, \frac{3}{2}}(c_b) - H_{f, \frac{3}{2}}(z) \right\| = \left\| \left(\frac{3}{2}c_b - \frac{1}{2}f\right) - \left(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}f\right) \right\| = \frac{3}{2} \|c_b - z\| = \frac{r}{2}.$$

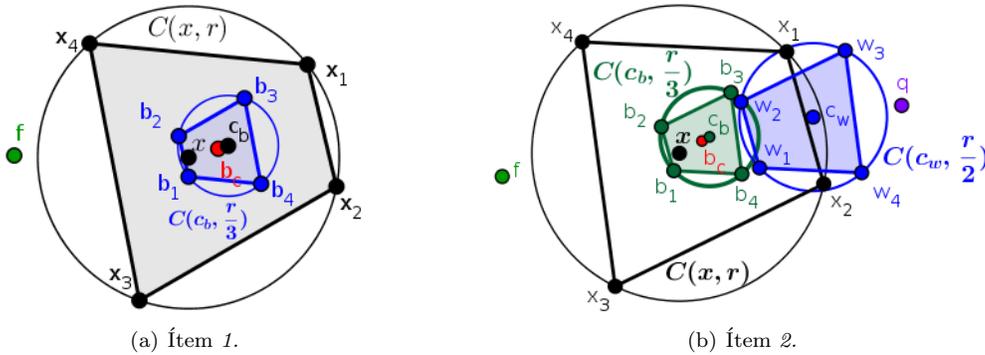


Figura 6: Ilustración 1, Teorema 3.3

Probemos ahora que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ siempre y cuando $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ sea el centro de una circunferencia que contiene los w_i (ver (a), Figura 7). Tómesese un $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ y veamos

que $y \in H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$. Supóngase que existe $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$ tal que $y = H_{f, \frac{1}{2}}(w)$. Determinemos quién sería w ,

$$H_{f, \frac{1}{2}}(w) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)f + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}w = y,$$

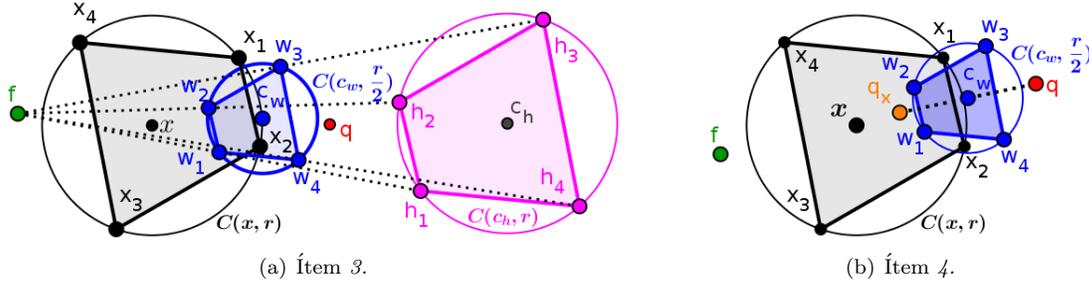


Figura 7: Ilustración 2, Teorema 3.3

entonces $w = 2y - f$.

Veamos que $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$. A saber,

$$\|c_h - w\| = \|c_h - (2y - f)\| = \|c_h - 2y + f\|. \quad (3.7)$$

Por otro lado, se tiene que $\frac{r}{2} = \|c_w - y\| = \frac{1}{2} \|f + c_h - 2y\|$ y por tanto $\|f + c_h - 2y\| = r$. Así, por la ecuación (3.7), se tiene que $\|c_h - w\| = r$. De donde se obtiene que $y \in H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$. De manera que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$.

Luego, si $y \in H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$, se tiene que existe $z \in \mathcal{C}(c_h, r)$ tal que $H_{f, \frac{1}{2}}(z) = y$. Obsérvese que $\|c_h - z\| = r$. Veamos que $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$. Por hipótesis se tiene

$$\|c_w - y\| = \left\| H_{f, \frac{1}{2}}(c_h) - H_{f, \frac{1}{2}}(z) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}c_h \right) - \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}z \right) \right\| = \frac{1}{2} \|c_h - z\| = \frac{r}{2}.$$

Por tanto, $H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r)) \subset \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$.

Por último, veamos que si $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ es el centro de una circunferencia que contiene los w_i , entonces $q = S_{c_w}(q_x)$ (ver (b), Figura 7). Obsérvese que:

$$\begin{aligned} S_{c_w}(q_x) &= 2c_w - q_x = 2 \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}c_h \right) - q_x = f + c_h - q_x = f + (2q - x) - q_x = \\ &= f + 2q - x - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x}{2} \right) = 2q - \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{2} + f = \\ &= 2q - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2} \right) = 2q - q = q \end{aligned}$$

obteniendo así lo deseado. \square

Teorema 3.4. Sea M un plano de Minkowski. Sean $C(x, r)$ una circunferencia, y x_1, x_2, x_3, x_4, f puntos distintos de M , tal que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C(x, r)$. Sean $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}$; q_i el punto de simetría del $\Delta x_j x_k x_l$ con su x -antitriángulo, w_i el punto de simetría del $\Delta x_j x_k x_l$ con su f -antitriángulo, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$; $c_h = S_q(x)$; y $h_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Entonces se cumple:

1. $C(q, \frac{r}{2}) = H_{c_h, \frac{1}{2}}(C(x, r))$.
2. Si $e_i = S_{w_i}(q_i)$, entonces $C(e_i, \frac{r}{2})$ es una circunferencia medial del f -antitriángulo del $\Delta x_j x_k x_l$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Además, $e_i \in C(q, \frac{r}{2})$ y e_i es el punto medio del segmento $[x, h_i]$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
3. Si $u_i = S_q(e_i)$, entonces $C(u_i, \frac{r}{2})$ es una circunferencia medial del t -antitriángulo del $\Delta h_j h_k h_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Además, $u_i \in C(q, \frac{r}{2})$ y u_i es el punto medio del segmento $[c_h, x_i]$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
4. $x - f = e_i - q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
5. $e_i - e_j = u_j - u_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Demostración. Dado que $c_h = S_q(x)$, se tiene que $q = H_{c_h, \frac{1}{2}}(x)$ (ver (a), Figura 8). Tómese $y \in C(q, \frac{r}{2})$, es decir $\|q - y\| = \frac{r}{2}$, y veamos que $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(C(x, r))$. Supóngase que existe $w \in C(x, r)$ tal que $y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w)$ y determinemos ¿cuál sería el w que cumple tal condición?. Nótese que $y = \frac{1}{2}c_h + \frac{1}{2}w$, de donde $w = 2y - c_h$. Veamos que w está en $C(x, r)$. Así,

$$\|x - w\| = \|x - (2y - c_h)\| = \|x - 2y + c_h\| = \|x - 2y + 2q - x\| = 2\|q - y\| = r.$$

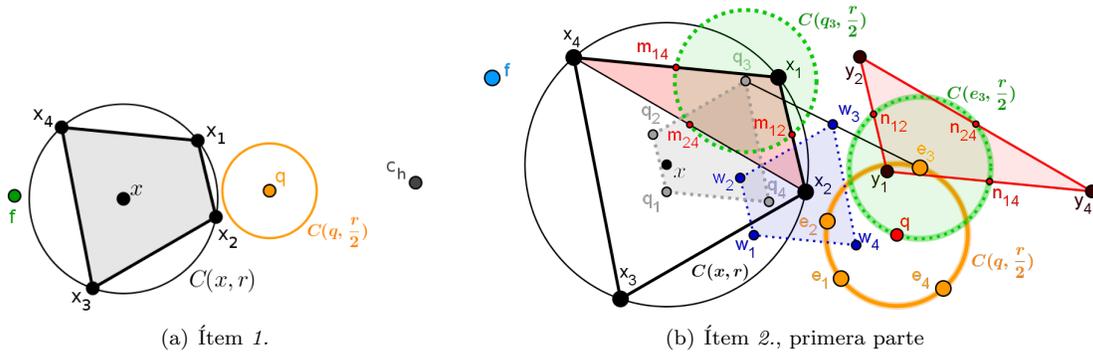


Figura 8: Ilustración 1, Teorema 3.4

Por otro lado, sean $m_{jk} = \frac{x_j + x_k}{2}$, $m_{jl} = \frac{x_j + x_l}{2}$, $m_{lk} = \frac{x_l + x_k}{2}$ los puntos medios del $\Delta x_j x_k x_l$, para $\{j, k, l\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Veamos que $m_{jk} \in C(q_i, \frac{r}{2})$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Como $x_i \in C(x, r)$, entonces $\|x - x_i\| = r$. Por tanto,

$$\|q_i - m_{jk}\| = \left\| \frac{x_j + x_k + x_l - x}{2} - \left(\frac{x_j + x_k}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{x - x_i}{2} \right\| = \frac{r}{2}. \tag{3.8}$$

mostrando así que $m_{jk} \in \mathcal{C}(q_i, \frac{r}{2})$. Ahora, sean $y_j = S_{w_i}(x_j)$ y n_{jk} los puntos medios del $\Delta y_j y_k y_l$ (el f -antitriángulo del $\Delta x_j x_k x_l$), para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Así, por hipótesis, es claro que $n_{jk} = S_{w_i}(m_{jk})$. Luego, por la ecuación (3.8), se tiene que

$$\|e_i - n_{jk}\| = \|S_{w_i}(q_i) - S_{w_i}(m_{jk})\| = \|q_i - m_{jk}\| = \frac{r}{2}.$$

Por tanto, $n_{jk} \in \mathcal{C}(e_i, \frac{r}{2})$, siendo así $\mathcal{C}(e_i, \frac{r}{2})$ una circunferencia medial del $\Delta y_j y_k y_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ (ver (b), Figura 8).

Probemos ahora que: $e_i \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$; y e_i es el punto medio del segmento $[x, h_i]$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Así,

$$e_i = 2w_i - q_i = 2\left(\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2}\right) - \left(\frac{x_j + x_k + x_l - x}{2}\right) = \frac{x_j + x_k + x_l - 2f + x}{2}. \quad (3.9)$$

Luego, por (3.9), dado que $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}$, se tiene

$$\|q - e_i\| = \left\| \frac{x_i + x_j + x_k + x_l - 2f}{2} - \left(\frac{x_j + x_k + x_l - 2f + x}{2}\right) \right\| = \left\| \frac{x_i - x}{2} \right\| = \frac{r}{2}$$

Usando (3.9), y dado que $h_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, se tiene que e_i es el punto medio del segmento $[x, h_i]$ (ver (a), Figura 9). En efecto,

$$\frac{x + h_i}{2} = \frac{x + 2q - x_i}{2} = \frac{x + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f - x_i}{2} = \frac{x + x_j + x_k + x_l - 2f}{2} = e_i$$

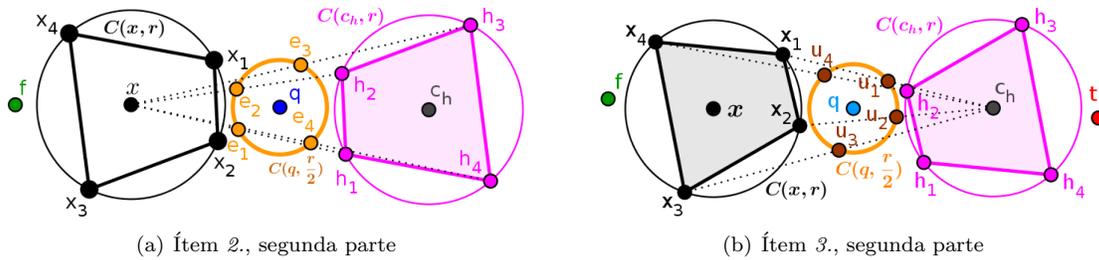


Figura 9: Ilustración 2, Teorema 3.4

Usando un razonamiento similar al anterior. Tómese en cuenta que $h_i = S_q(x_i)$, $u_i = S_q(e_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Luego, denotemos: $z_i = S_q(w_i)$; $p_i = S_q(q_i)$; $d_i = S_q(y_i)$; $a_{jk} = S_q(m_{jk})$; y $b_{jk} = S_q(n_{jk})$. Como las simetrías preservan distancias, entonces se verifica el ítem 3.. Para ilustrar este resultado véase la Figura 10 y la parte (b) de la Figura 9.

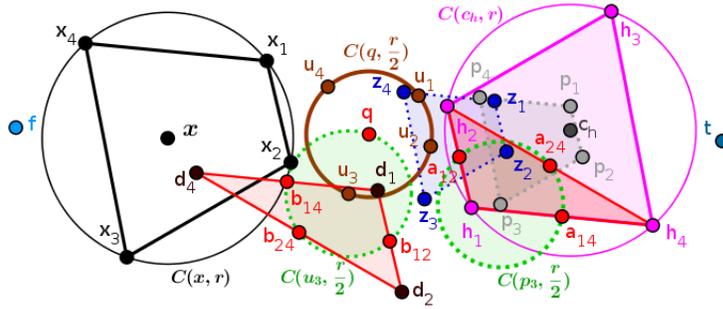


Figura 10: Ilustración 3, Teorema 3.4: Ítem 3., primera parte

Por otro lado, (ver (a), Figura 11), sea $e_i = S_{w_i}(q_i) = 2w_i - q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, de donde

$$e_i - q_i = e_i - q_i = 2(w_i - q_i) = 2 \left[\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} - \left(\frac{x_j + x_k + x_l - x}{2} \right) \right] = x - f.$$

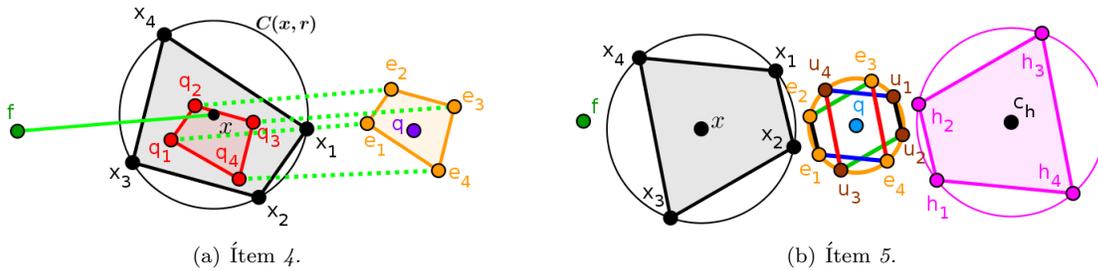


Figura 11: Ilustración 4, Teorema 3.4

Por último, nótese que $u_i = S_q(e_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ (ver (b), Figura 11). Como $S_q(e_i) = 2q - e_i$, se tiene que

$$u_j - u_i = S_q(e_i) - S_q(e_j) = (2q - e_i) - (2q - e_j) = e_j - e_i.$$

□

En [8], la noción de \mathcal{C} -ortocentro para triángulo está dada por la intersección de circunferencias. En [6], se define simetrizando un circuncentro del triángulo dado, con respecto a los puntos medios de los lados del mismo. Además, se puede constatar que el \mathcal{C} -ortocentro de un triángulo cumple que: *los puntos medios de los segmentos formados por el \mathcal{C} -ortocentro y los vértices del triángulo están en la circunferencia de Feuerbach del triángulo dado.*

En un cuadrilátero la noción de \mathcal{C} -ortocentro no existe. Sin embargo, para cuadriláteros inscritos en una circunferencia, dado el centro de la circunferencia circunscrita, existe un punto que posee la misma propiedad para el cuadrilátero, que la del \mathcal{C} -ortocentro con el triángulo mencionada anteriormente. Así, observando los resultados presentados, y los presentes en [7], se puede establecer la siguiente definición:

Definición 3.2. Sea un cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}(x, r)$, en un plano de Minkowski M , con $\mathcal{V}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Sea q el punto de simetría de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ con su x -anticuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4}$, donde $\mathcal{H}_4 = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. Se dirá que h es el \mathcal{C} -ortocentro del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$, si los puntos $\frac{x_i + h}{2}$ están en la circunferencia de Feuerbach del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

4 Pentágonos

En este punto se introduce una notación que será de utilidad en el próximo resultado y en lo que sigue del artículo. Nótese que dado un conjunto $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, se pueden formar cinco cuadriláteros cuyos vértices están en el conjunto \mathcal{V}_5 . Por tanto, para identificar los punto de \mathcal{V}_5 que son vértices del cuadrilátero de interés se utilizará la siguiente notación: \mathcal{V}_5^i denotará al conjunto de punto $\{x_j, x_k, x_l, x_s\}$ para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, es decir, $\mathcal{V}_5^i = \mathcal{V}_5 - \{x_i\}$. Así, $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5^i}$) denota el cuadrilátero convexo (estrellado) cuyos vértices están en el conjunto de puntos \mathcal{V}_5^i .

Teorema 4.1. Sean x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y f , puntos distintos en un plano de Minkowski M . Sean $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, w_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5^i}$) con su f -anticuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5^i}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5^i}$), y $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$ para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sean $b_c = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{5}$ y $h_i = S_{w_i}(f)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos $[x_i, h_i]$, con $i = 1, 2, 3, 4, 5$, tienen el mismo punto medio q . Además,

$$q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2},$$

es decir, $q = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f)$.

2. $x_i - x_j = h_j - h_i$, con $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
3. $w_i = H_{b_i, -1}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. En particular, $w_i - w_j = 2(b_i - b_j)$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
4. $b_i = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. En particular, los segmentos $[x_i, b_i]$ se intersectan en el punto b_c .
5. $h_i = H_{b_i, -3}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Demostración. Dado que $h_i = S_{w_i}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}$ para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ver (a), Figura 12), el punto medio del segmento $[x_i, h_i]$ es:

$$\frac{x_i + h_i}{2} = \frac{x_i + 2w_i - f}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2} = \frac{5}{2}b_c - \frac{3}{2}f = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f).$$

De manera similar, (ver (b), Figura 12), obsérvese que

$$h_i = S_{w_i}(f) = 2w_i - f = 2\left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}\right) - f = x_j + x_k + x_l + x_s - 3f \quad (4.1)$$

Por tanto, de la ecuación (4.1), se tiene que $h_j = x_i + x_k + x_l + x_s - 3f$ para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Luego,

$$h_j - h_i = x_i + x_k + x_l + x_s - 3f - (x_j + x_k + x_l + x_s - 3f) = x_i - x_j.$$

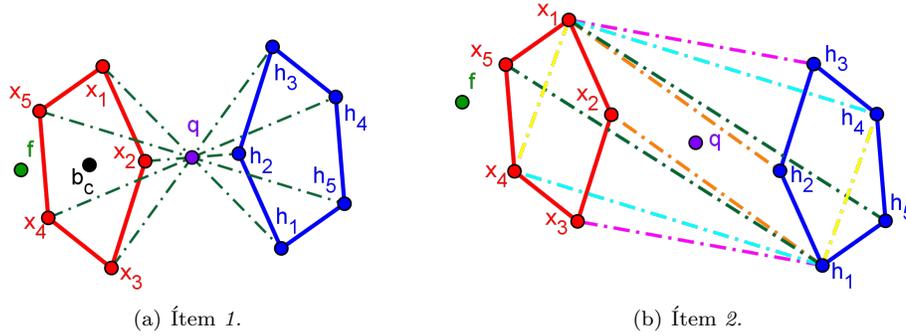


Figura 12: Ilustración 1, Teorema 4.1

Dado que $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}$ y $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, veamos que $w_i = H_{b_i, -1}(f)$ (ver (a), Figura 13). Así,

$$H_{b_i, -1}(f) = 2b_i - f = 2 \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} \right) - f = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2} = w_i \quad (4.2)$$

En particular, por la ecuación (4.2), para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se tiene que

$$w_i - w_j = 2b_i - f - (2b_j - f) = 2(b_i - b_j).$$

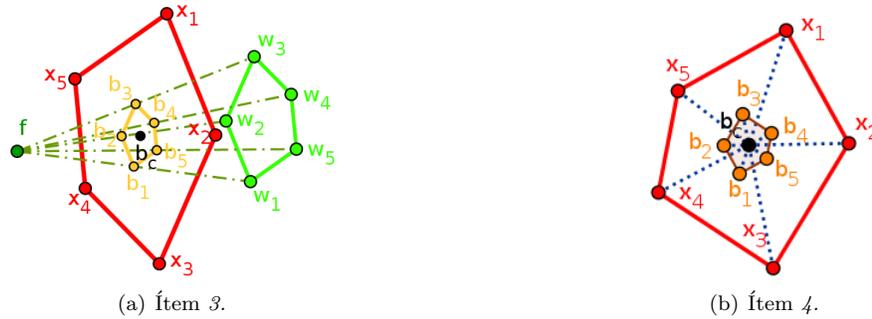


Figura 13: Ilustración 2, Teorema 4.1

Por otro lado, se tiene que $b_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$, y por definición de homotecia

$$H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x_i) = \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4} - \frac{1}{4}x_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} = b_i. \quad (4.3)$$

para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ver (b), Figura 13). En particular, tomando en cuenta la ecuación (4.3), se tiene que

$$b_i = \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x_i \implies b_i + \frac{1}{4}x_i = \frac{5}{4}b_c \implies 4b_i + x_i = 5b_c \implies \frac{4}{5}b_i + \frac{1}{5}x_i = b_c$$

para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y por tanto b_c es un punto del segmento $[b_i, x_i]$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Por último, nótese que $H_{b_i, -3}(f) = 4b_i - 3f$ y $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$ para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ver Figura 14). Por tanto,

$$H_{b_i, -3}(f) = x_j + x_k + x_l + x_s - 3f$$

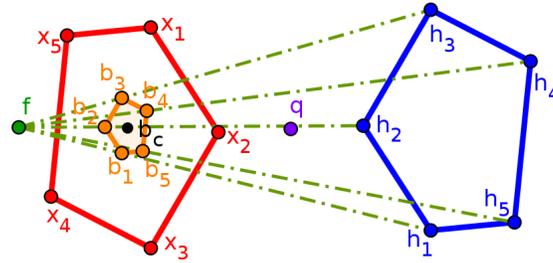


Figura 14: Ítem 5., Teorema 4.1

Así, usando la ecuación 4.1, se tiene que $h_i = H_{b_i, -3}(f)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. □

Basados en el ítem 1. del Teorema 4.1, se establece la definición de antipentágono para un pentágono cualquiera, con respecto a un punto en el plano, de la siguiente manera:

Definición 4.1. Sea M un plano de Minkowski. Sea $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ el conjunto de vértices del pentágono $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5}$) en M , y sea $b_c = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$. Sean $f \in M$, donde $f \notin \mathcal{V}_5$, y $q = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f)$. Se dice que el pentágono $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5}$) es el f -antipentágono de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5}$) si $\mathcal{H}_5 = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ y $h_i = S_q(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Teorema 4.2. Sean x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y f , puntos distintos en un plano de Minkowski M . Sean $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, w_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5^i}$) con su f -anticuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5}$), y $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sean $b_c = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{5}$, $q = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f)$, y $h_i = S_{w_i}(f)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces se cumple:

1. Si $z_i = S_q(w_i)$, los segmentos $[b_i, z_i]$ se intersectan en el punto $g = H_{b_c, -\frac{2}{3}}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En particular, $h_i - h_j = 2(w_i - w_j)$.

3. Si $t = S_q(f)$ y $z_i = S_q(w_i)$, entonces $z_i = H_{t, \frac{1}{3}}(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y $z_i - z_j = w_j - w_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Además, z_i es el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5^i}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5^i}$) con su t -anticuadrilátero.
4. Los segmentos $[x_i, x_j]$, $[b_i, b_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En particular $b_i - b_j = \frac{1}{4}(x_j - x_i)$.

Demostración. Nótese que la solución del sistema

$$\begin{cases} (1 - t_1) b_1 + t_1 z_1 = y_1 \\ (1 - t_2) b_2 + t_2 z_2 = y_2 \\ (1 - t_3) b_3 + t_3 z_3 = y_3 \\ (1 - t_4) b_4 + t_4 z_4 = y_4 \\ (1 - t_5) b_5 + t_5 z_5 = y_5 \end{cases} \quad (4.4)$$

con $t_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, muestra el punto g de intersección de los segmentos $[b_i, z_i]$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ver (a), Figura 15).

Tomando en cuenta los valores de z_i , b_i y de w_i se tiene que igualando dos ecuaciones cualesquiera del sistema (4.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} (1 - t_i) b_i + t_i z_i &= (1 - t_j) b_j + t_j z_j, \\ (1 - t_i) b_i + t_i(2q - w_i) &= (1 - t_j) b_j + t_j(2q - w_j) \\ (t_i - t_j)2q + (1 - t_i) \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} \right) - t_i w_i &= (1 - t_j) \left(\frac{x_i + x_k + x_l + x_s}{4} \right) - t_j w_j \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} t_i - t_j \right) x_j + \left(t_i - \frac{1}{4} t_j - \frac{1}{4} \right) x_i - \frac{1}{4} (t_j - t_i) (x_k + x_l + x_s) - 2(t_i - t_j) f &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t_i - 4t_j = -1 \\ 4t_i - t_j = 1 \\ t_i - t_j = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

cuya solución está dada por $t_i = \frac{1}{3} = t_j$. Así, $t_i = \frac{1}{3}$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

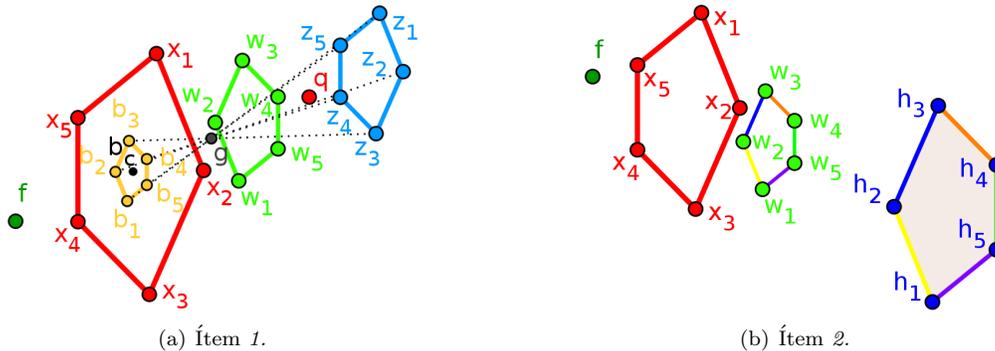


Figura 15: Ilustración 1, Teorema 4.2

Sustituyendo t_i en la i -ésima ecuación de (4.4), y utilizando el hecho de que $q = H_{b_c, -\frac{2}{3}}(f)$ (ítem 1., Teorema 4.1) y $w_i = H_{b_i, -1}(f)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ítem 3., Teorema 4.1), se obtiene que

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) b_i + \frac{1}{3} z_i = \frac{2}{3} b_i + \frac{2}{3} q - \frac{1}{3} w_i = \frac{2}{3} b_i + \frac{5}{3} b_c - f - \frac{1}{3} w_i = \frac{2}{3} b_i + \frac{5}{3} b_c - f - \frac{1}{3} (2b_i - f) = \frac{5}{3} b_c - \frac{2}{3} f$$

Así, el punto de intersección es $g = \frac{5}{3} b_c - \frac{2}{3} f$ y por tanto $g = H_{b_c, -\frac{2}{3}}(f)$.

Nótese que $h_i = S_{w_i}(f)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ver (b), Figura 15). Por tanto, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$h_i - h_j = S_{w_i}(f) - S_{w_j}(f) = (2w_i - f) - (2w_j - f) = 2(w_i - w_j).$$

Se tiene que $z_i = S_q(w_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ver (a), Figura 16), entonces

$$z_i - z_j = S_q(w_i) - S_q(w_j) = (2q - w_i) - (2q - w_j) = w_j - w_i,$$

para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

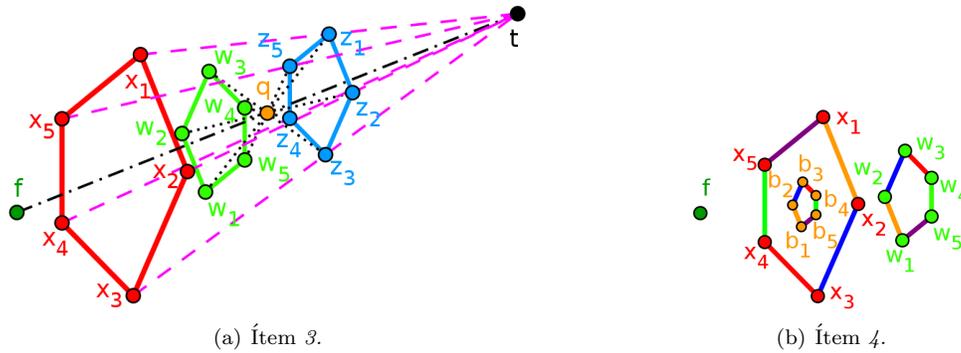


Figura 16: Ilustración 2, Teorema 4.2

Como $t = S_q(f)$, se obtiene que

$$H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_i = q + \frac{x_i - f}{2} = q + \frac{x_i - f}{2} + \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}\right) - w_i = 2q - w_i = z_i$$

Veamos que $z_i = \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2t}{2}$, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En efecto, como $t = S_q(f)$

$$\begin{aligned} \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2t}{2} &= \frac{(2q - x_j) + (2q - x_k) + (2q - x_l) + (2q - x_s) - 2t}{2} \\ &= \frac{8q - (x_j + x_k + x_l + x_s) - 4q + 2f}{2} \\ &= \frac{4q - (x_j + x_k + x_l + x_s - 2f)}{2} = 2q - w_i = z_i. \end{aligned}$$

Por el ítem 2. del Teorema 4.1 se tiene que los segmentos $[x_i, x_j]$ y $[h_i, h_j]$ son paralelos (ver Figura 16). Luego, por el ítem 2., se tiene que los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos. Así, por transitividad se tiene que los segmentos $[x_i, x_j]$ y $[w_i, w_j]$ son paralelos. Por último, basta ver que

$$b_i - b_j = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} - \frac{x_i + x_k + x_l + x_s}{4} = \frac{x_j - x_i}{4}.$$

□

Nótese que el ítem 3., del teorema precedente, dice que $S_q(w_i) = H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) = \frac{t + x_i}{2}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Teorema 4.3. Sean $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, un conjunto de puntos distintos en un plano de Minkowski M , pertenecientes a la circunferencia $\mathcal{C}(x, r)$. Sea w_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ con su x -anticuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5^i}$, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sean $h_i = S_{w_i}(x)$ el \mathcal{C} -ortocentro del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$, $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$, $c_h = S_q(x)$, y $z_i = S_q(w_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces se cumple:

1. $h_i \in \mathcal{C}(c_h, r)$, es decir, c_h es el circuncentro del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4^i}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. $z_i \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$, es decir, $q \in \mathcal{C}(z_i, \frac{r}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
3. $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) = H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$.
4. $z_i = H_{c_h, \frac{1}{2}}(x_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Además, z_i es el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4^i}$ y su c_h -anticuadrilátero para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, es decir, $z_i = \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2c_h}{2}$, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Demostración. Sabiendo que $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$ y $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|c_h - h_i\| &= \|S_q(x) - S_{w_i}(x)\| = \|2q - 2w_i\| = \\ &= \|(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x) - (x_j + x_k + x_l + x_s - 2x)\| = \|x_i - x\| = r \end{aligned}$$

para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (ver (a), Figura 17).

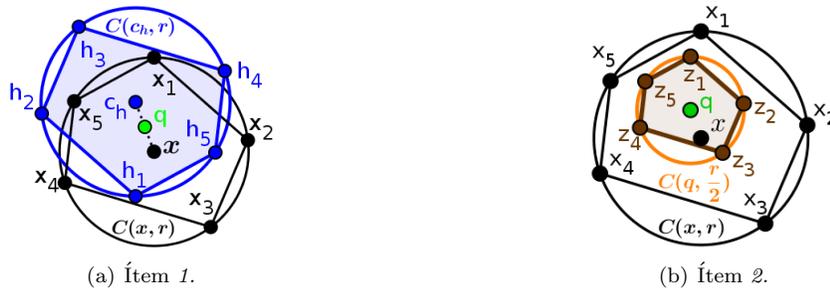


Figura 17: Ilustración 1, Teorema 4.3

Dado que $z_i = S_q(w_i)$, y teniendo los valores de q y w_i , para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ver (b), Figura 17). Se tiene que

$$\|q - z_i\| = \|w_i - q\| = \left\| \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} - \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2} \right\| = \frac{\|x - x_i\|}{2} = \frac{r}{2}$$

para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y por tanto, $z_i \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Sea $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$, es decir, $\|q - y\| = \frac{r}{2}$. Se verá que $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ (ver (a), Figura 18). Supongamos existe $w \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w)$. Determinemos ¿quién sería un w que cumpla tal condición?. Así,

$$y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = \frac{c_h + w}{2}$$

de donde $w = 2y - c_h$. Ahora veamos que $w \in \mathcal{C}(x, r)$. En efecto,

$$\|x - w\| = \|x - (2y - c_h)\| = \|x - 2y + (2q - x)\| = 2\|q - y\| = r.$$

lo que implica que $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) \subseteq H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$. Tómese ahora $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$, por tanto existe $z \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(z)$. Veamos que $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$. Así,

$$\|q - y\| = \left\| q - \left(\frac{c_h + z}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|2q - c_h - z\| = \frac{1}{2} \|2q - (2q - x) - z\| = \frac{1}{2} \|x - z\| = \frac{r}{2}$$

De manera que, $H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r)) \subseteq \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$.

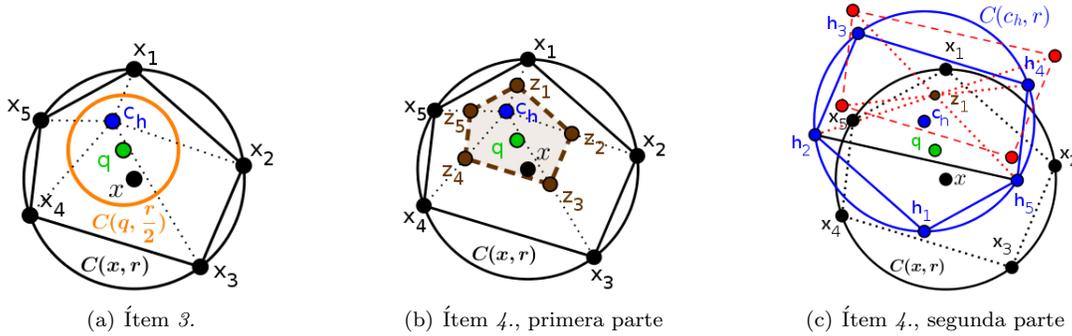


Figura 18: Ilustración 2, Teorema 4.3

Veamos que $\frac{c_h + x_i}{2} = 2q - w_i$ (ver (b), Figura 18). Por un lado se tiene

$$\frac{c_h + x_i}{2} = \frac{2q - x + x_i}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 4x + x_i}{2} = x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} 2q - w_i &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x) - \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} \right) = \\ &= x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2x. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De las ecuaciones (4.6) y (4.7) se obtiene lo deseado.

Mostremos ahora que

$$\frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2c_h}{2} = x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2x.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2c_h}{2} &= \frac{2(w_j + w_k + w_l + w_s) - 4x - 2(2q - x)}{2} \\ &= w_j + w_k + w_l + w_s - 2q - x. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como se tiene que $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2}$, por el ítem 3. del Teorema 4.1, entonces

$$\begin{aligned} w_j + w_k + w_l + w_s - 2q - x &= \frac{4x_i + 3x_j + 3x_k + 3x_l + 3x_s - 8x}{2} - 2q - x \\ &= 2x_i + 3\left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2}\right) - 5x - 2q. \end{aligned}$$

Ahora, como $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$, se tiene que

$$w_j + w_k + w_l + w_s - 2q - x = x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2x. \quad (4.9)$$

Así, por las ecuaciones (4.8) y (4.9) se obtiene lo deseado (ver (c), Figura 18). \square

Teorema 4.4. *Sea M un plano de Minkowski. Sean el conjunto de puntos distintos $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, la circunferencia $\mathcal{C}(x, r)$, con $x_i \in \mathcal{C}(x, r)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y f un punto en M tal que $f \notin \mathcal{V}_5$. Sean $q_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$, $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2}$ y $b_c = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{5}$. Sean $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$ y w_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}(\mathcal{P}_{\mathcal{X}_4})$ con su f -anticuadrilátero para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $c_h = S_q(x)$; y $h_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces se cumple:*

1. Si $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x)$ es el centro de una circunferencia que contiene los b_i , entonces $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}) = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$.
2. Si $c_w = H_{c_b, -1}(f)$ es el centro de una circunferencia que contiene los w_i , entonces $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, 2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$.
3. Si $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ es el centro de una circunferencia que contiene los w_i , entonces $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$. Además, $S_{c_w}(q_x) = S_q(c_w)$.
4. $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) = H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$.

Demostración. Sea $y \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$, entonces $\|c_b - y\| = \frac{r}{4}$. Veamos que $y \in H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$. Supóngase que existe $w \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $y = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(w)$. Determinemos ¿quién debería ser w ?

$$y = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(w) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) b_c - \frac{1}{4} w = \frac{5}{4} b_c - \frac{1}{4} w,$$

por lo tanto $w = 5b_c - 4y$.

Ahora, veamos si $w \in \mathcal{C}(x, r)$. Así, dado que $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x)$, se tiene que

$$\|x - w\| = \|x - (5b_c - 4y)\| = 4 \left\| \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}b_c + y \right\| = 4 \left\| y - \left(\frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x \right) \right\| = 4 \|y - c_b\| = r,$$

de manera que $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}) \subset H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$ (ver (a), Figura 19).

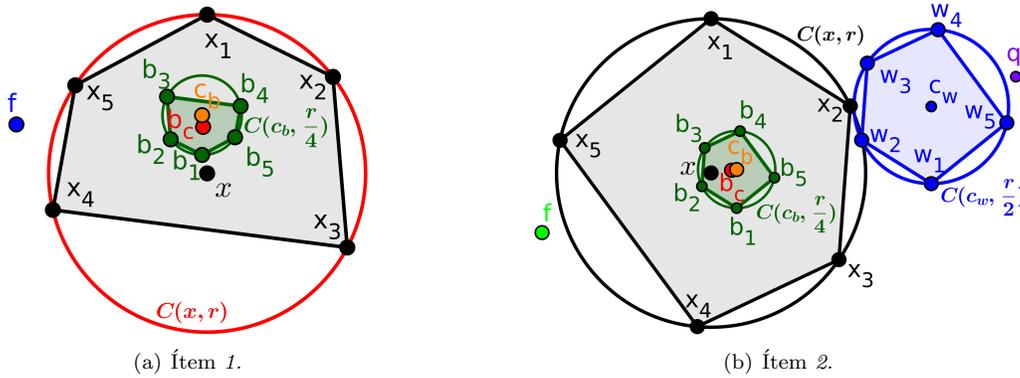


Figura 19: Ilustración 1, Teorema 4.4

Recíprocamente, sea $y \in H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$, entonces existe $z \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $y = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(z)$. Teniendo en cuenta que $\|x - z\| = r$ y $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x)$, entonces

$$\|c_b - y\| = \left\| H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x) - H_{b_c, -\frac{1}{4}}(z) \right\| = \left\| \left(\frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x \right) - \left(\frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}z \right) \right\| = \frac{1}{4} \|z - x\| = \frac{r}{4}.$$

Así $\|c_b - y\| = \frac{r}{4}$, y por tanto $H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r)) \subset \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$

Probemos ahora que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, 2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$ (ver (b), Figura 19). Tómese $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, es decir, $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$. Verifiquemos entonces que $y \in H_{f, 2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$. Supóngase que existe $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$ tal que $y = H_{f, 2}(w)$. Determinemos ¿qué forma debería tener tal w ?

$$y = H_{f, 2}(w) = (1 - 2)f + 2w = 2w - f.$$

Por tanto $w = \frac{f + y}{2}$. Veamos que $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$. Así, como $c_w = H_{c_b, -1}(f)$, se tiene que

$$\|c_b - w\| = \left\| c_b - \left(\frac{f + y}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|2c_b - (f + y)\| = \frac{1}{2} \|c_w - y\| = \frac{r}{4}.$$

de manera que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f,2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$

Recíprocamente, tomemos $y \in H_{f,2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$. Por tanto, existe $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$ tal que $y = H_{f,2}(w)$. Probemos que $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, es decir, $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$. Tomando en cuenta que $c_w = H_{c_b,-1}(f)$ y $\|c_b - w\| = \frac{r}{4}$, se tiene que

$$\|c_w - y\| = \|2c_b - f - (-f + 2w)\| = 2\|c_b - w\| = \frac{r}{2},$$

de manera que $H_{f,2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})) \subset \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$.

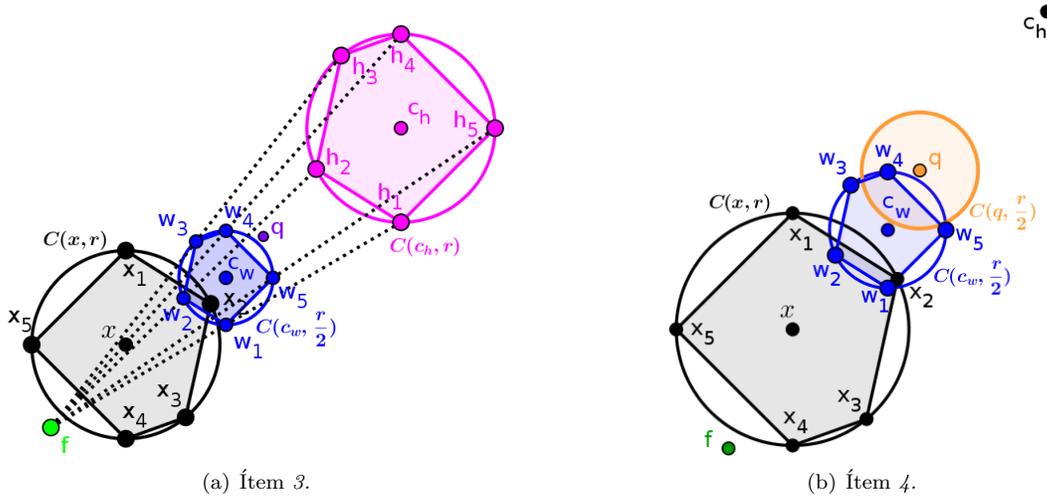


Figura 20: Ilustración del ítem 3., Teorema 4.4

Veamos que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ (ver (a), Figura 20). Si $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, es decir, si $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$, entonces $y \in H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$. Supóngase que existe $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$ tal que $y = H_{f,\frac{1}{2}}(w)$. Determinemos ahora ¿quién debería ser este w ?

$$y = H_{f,\frac{1}{2}}(w) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) f + \frac{1}{2} w = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} w,$$

por tanto $w = 2y - f$. Ahora, veamos que $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$. Así, como $c_w = H_{f,\frac{1}{2}}(c_h)$, se tiene que

$$\|c_h - w\| = \|c_h - (2y - f)\| = \|c_h - 2y + f\| = 2 \left\| \frac{f + c_h}{2} - y \right\| = \|c_w - y\| = r$$

de manera que $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$.

Recíprocamente, sea $y \in H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$. Por tanto, existe $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$ tal que $y = H_{f,\frac{1}{2}}(w)$. Veamos que $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, es decir, que $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$. Ahora, como $c_w = H_{f,\frac{1}{2}}(c_h)$, se tiene que

$$\|c_w - y\| = \left\| H_{f,\frac{1}{2}}(c_h) - H_{f,\frac{1}{2}}(w) \right\| = \frac{1}{2} \|c_h - w\| = \frac{r}{2},$$

de manera que $H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r)) \subset \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$.

Luego, dado que $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ y $c_h = S_q(x)$, se tiene

$$S_{c_w}(q_x) = 2c_w - q_x = c_h + f - q_x = 2q - x + f - q_x = 2q - (x - f + q_x). \quad (4.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x - f + q_x &= x - f + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2} = \\ &= \frac{1}{2}f + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2} - \frac{1}{2}x \\ &= q - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}(2q - x + f) = \frac{1}{2}(c_h + f) = c_w. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Así, de las ecuaciones (4.10) y (4.11), se tiene que $S_{c_w}(q_x) = S_q(c_w)$. Obteniendo la demostración del ítem 3.

Por último, nótese que por hipótesis se tiene que $c_h = S_q(x)$, (ver (b), Figura 20). Ahora sea $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$, es decir, $\|q - y\| = \frac{r}{2}$. Veamos que $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$. Supóngase que existe $w \in \mathcal{C}(x, r)$ tal que $H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = y$. Determinemos entonces ¿cuál sería tal w ? Nótese que

$$y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = \frac{1}{2}c_h + \frac{1}{2}w,$$

de donde $w = 2y - c_h$. Veamos que dicho w está en $\mathcal{C}(x, r)$. En efecto,

$$\|x - w\| = \|x - (2y - c_h)\| = \|x - 2y + 2q - x\| = 2\|y - q\| = 2\frac{r}{2} = r,$$

y por tanto $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) \subset H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$.

Tómese ahora un $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$, entonces existe un $w \in \mathcal{C}(x, r)$, es decir $\|x - w\| = \frac{r}{2}$, tal que $H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = y$. Veamos que $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$, es decir, $\|q - y\| = \frac{r}{2}$. En efecto,

$$\|q - y\| = \left\| q - \left(\frac{w + c_h}{2} \right) \right\| = \left\| q - \frac{w}{2} - \left(\frac{2q - x}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2}\|x - w\| = \frac{r}{2}.$$

De manera que $H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r)) \subset \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$. □

Teorema 4.5. *Sea M un plano de Minkowski. Sean el conjunto de puntos distintos $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, la circunferencia $\mathcal{C}(x, r)$ con $x_i \in \mathcal{C}(x, r)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, y el punto f en M tal que $f \notin \mathcal{V}_5$. Sean $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2}$; q_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4^i}$ con su x -anticuadrilátero, w_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4^i}$ con su f -anticuadrilátero, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $c_h = S_q(x)$; $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ y $h_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Entonces se cumple:*

1. $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ contiene los puntos medios de los segmentos $[x, h_i]$ y $[c_h, x_i]$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5$, es decir, los puntos $H_{c_h, \frac{1}{2}}(x_i)$ y $H_{x, \frac{1}{2}}(h_i)$ están en la circunferencia $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Sea $c_z = S_q(c_w)$ y $z_i = S_q(w_i)$, entonces $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2}) = S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
3. El punto $u_i = S_{w_i}(q_i)$ está en la circunferencia $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$, también cumple que $u_i - u_j = w_i - w_j = q_i - q_j$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Además, $S_{w_i}(q_i) = S_{c_z}(z_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
4. Si $e_i = S_q(u_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces $e_i - e_j = u_j - u_i$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. $x - f = w_i - q_i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Demostración. Determinemos que los puntos medios de los segmentos $[x, h_i]$ y $[c_h, x_i]$ están en $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ (ver (a), Figura 21). Así, por hipótesis del teorema, se tiene que $h_i = S_q(x_i) = 2q - x_i$ y $c_h = S_q(x) = 2q - x$, luego:

$$\left\| \frac{x + h_i}{2} - q \right\| = \left\| \frac{x + (2q - x_i)}{2} - q \right\| = \left\| \frac{x - x_i}{2} + q - q \right\| = \left\| \frac{x - x_i}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x - x_i\| = \frac{r}{2}.$$

y

$$\left\| \frac{c_h + x_i}{2} - q \right\| = \left\| \frac{(2q - x) + x_i}{2} - q \right\| = \left\| \frac{x_i - x}{2} + q - q \right\| = \left\| \frac{x_i - x}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x_i - x\| = \frac{r}{2}.$$

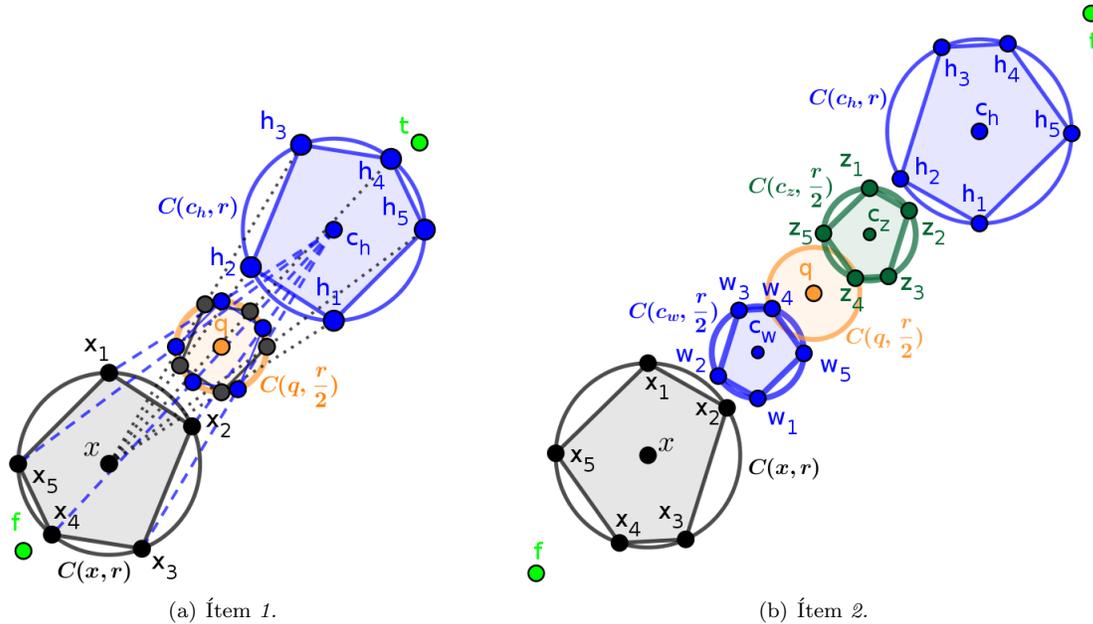


Figura 21: Ilustración 1, Teorema 4.5

Se probará ahora que si $c_z = S_q(c_w)$ y $z_i = S_q(w_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, entonces $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2}) = S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$ (ver (b), Figura 21). Veamos que si $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$, entonces $S_q(y) \in \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$. Por tanto

$$\|S_q(y) - c_z\| = \|(2q - y) - c_z\| = \|(2q - y) - (2q - c_w)\| = \|c_w - y\| = \frac{r}{2},$$

de manera que $S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})) \subset \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$.

Ahora sea $y \in S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$, entonces existe un $w \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ tal que $y = S_q(w)$. Debemos ver que $y \in \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$, es decir,

$$\|c_z - y\| = \|c_z - S_q(w)\| = \|2q - c_w - (2q - w)\| = \|w - c_w\| = \frac{r}{2}.$$

Así, $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2}) \subset S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$

Procedamos a probar que $S_{w_i}(q_i) = S_{c_z}(z_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ver (a), Figura 22). Así,

$$\begin{aligned} S_{w_i}(q_i) &= 2w_i - q_i = 2 \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2} \right) - \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} \\ &= \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2f + x = w_i - f + x \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por otro lado, como $c_h = S_q(x)$, $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$ y $z_i = S_q(w_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, se tiene que

$$S_{c_z}(z_i) = 2c_z - z_i = 2S_q(c_w) - S_q(w_i) = 2(2q - c_w) - (2q - w_i) = 2q - 2c_w + w_i \tag{4.13}$$

$$= 2q - 2 \left(\frac{f + c_h}{2} \right) + w_i = 2q - f - c_h + w_i = -f + x + w_i. \tag{4.14}$$

Así, de las ecuaciones (4.12) y (4.14) se tiene lo deseado.

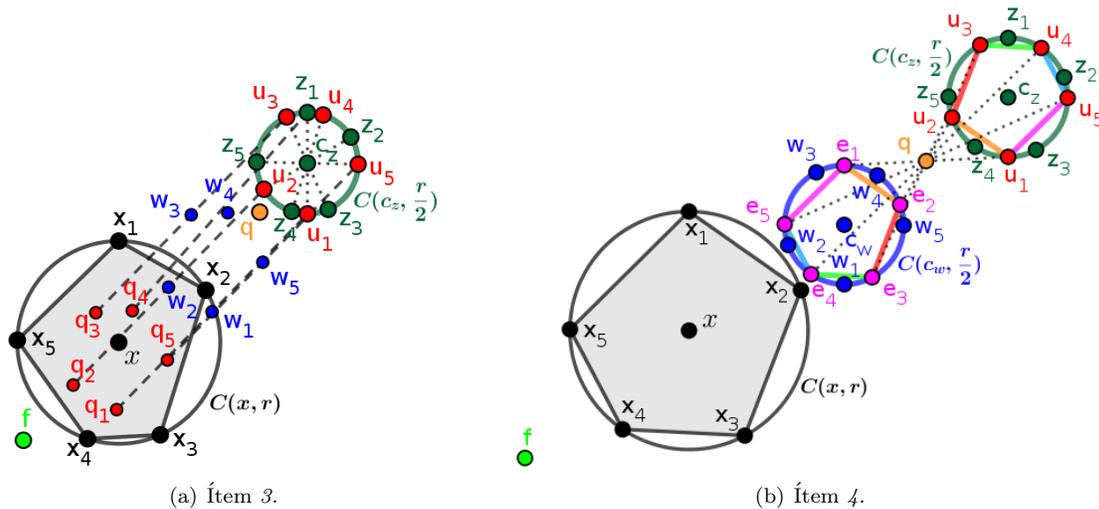


Figura 22: Ilustración 2, Teorema 4.5

Veamos ahora que el punto $u_i = S_{w_i}(q_i)$ está en la circunferencia $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Por tanto,

$$\|c_z - u_i\| = \|S_q(c_w) - S_{w_i}(q_i)\| = \|2q - c_w - (2w_i - q_i)\| \tag{4.15}$$

Luego, por la ecuación (4.13), se tiene que

$$\|2q - c_w - (2w_i - q_i)\| = \|2q - c_w - (2q - 2c_w + w_i)\| = \|c_w - w_i\| = \frac{r}{2} \tag{4.16}$$

Así, por las ecuaciones (4.15) y (4.16), se tiene que $u_i \in \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Probemos que $u_i - u_j = w_i - w_j = q_i - q_j$ para $\{i, j\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Claramente,

$$u_i - u_j = S_{c_z}(z_i) - S_{c_z}(z_j) = z_i - z_j = S_q(w_i) - S_q(w_j) = w_i - w_j \quad (4.17)$$

Luego,

$$u_i - u_j = S_{w_i}(q_i) - S_{w_j}(q_j) = 2w_i - q_i - (2w_j - q_j) = 2(w_i - w_j) + (q_j - q_i) \quad (4.18)$$

De manera que, por las ecuaciones (4.17) y (4.18), se tiene que

$$u_i - u_j = 2(u_i - u_j) + (q_j - q_i) \implies q_i - q_j = u_i - u_j.$$

Si $u_i = S_q(e_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (ver (b), Figura 22), entonces

$$u_j - u_i = S_q(e_i) - S_q(e_j) = (2q - e_i) - (2q - e_j) = e_j - e_i.$$

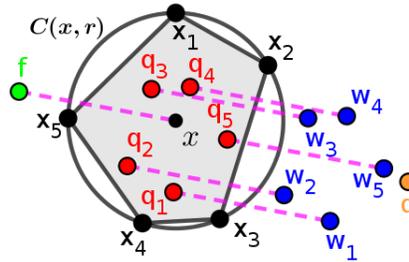


Figura 23: Ilustración 3, Teorema 4.5. Ítem 5.

Por último, (ver Figura 23), sea w_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{V_4^i}$ con su f -anticuadrilátero, q_i el punto de simetría del cuadrilátero $\mathbb{P}_{V_4^i}$ con su x -anticuadrilátero, para $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tenemos que

$$w_i - q_i = \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2} \right) - \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} \right) = -\frac{2f}{2} + \frac{2x}{2} = x - f.$$

□

Referencias

- [1] Johson, R. A. *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. 2007. ISBN-10: 0-486-46237-4.
- [2] Martini, H. and Spirova, M. (2007). *The Feuerbach circle and orthocentricity in normed planes*. *L'Enseignement Mathématique*. **53**(2) (2007),237–258.
- [3] Martini, H.; Swanepoel, K. J. and Weiß, G. *The Geometry of Minkowski Spaces - A Survey*. Part I. *Expositiones Math.* **19** (2001), 97–142.

- [4] Martini, H. y Swanepoel, K. J. *The Geometry of Minkowski Spaces - A Survey*. Part II. *Expositiones Math.* **22** (2004), 93–144.
- [5] Martini, H. y Wu, S. *On Orthocentric Systems in Strictly Convex Normed Planes*. *Extracta Mathematicae.* **24**(1) (2009), 31–45.
- [6] Rosas, Tobías. *C-ortocentros y Sistemas C-ortocéntricos en planos de Minkowski*. *Aleph Sub-Cero. Serie de Divulgaciones 2014-II*, 104–132.
- [7] Rosas, Tobías. *Sistemas C-ortocéntricos y circunferencia de Feuerbach para cuadriláteros en planos de Minkowski*. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.* **22**(2) (2015), 125–141.
- [8] Rosas, Tobías. *Sistemas C-ortocéntricos en planos de Minkowski y euclidianidad*. Tesis Doctoral. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela, 2014.
- [9] Rosas, Tobías y Pacheco, Wilson. *Orthocentric systems in Minkowski planes*. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (BZAG).* **56**(1) (2015), 249–261.
- [10] Rosas, Tobías; Pacheco, Wilson y Villegas, María. *Sistemas ortocéntricos y euclidianidad en planos de Minkowski*. *Faraute.* **8**(1) (2015), 11–18.
- [11] Thompson, A. C. *Minkowski geometry. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, **63**. Cambridge University Press. Cambridge. 1996. ISBN 0-521-40472-X.
- [12] GEOGEBRA. Versión para Windows. Última actualización el 03 de Marzo 2016. Disponible en: <http://www.geogebra.org/installers>.