Divulgaciones Matemáticas Vol. 20 No. 2 (2019), pp. 72–75

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a LaTeX source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la 34^a Olimpiada Iberoamericana celebrada en Guanajuato, México, en septiembre del 2019.

146. Determine todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1)).$$

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79, 82–91, 94–100, 106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

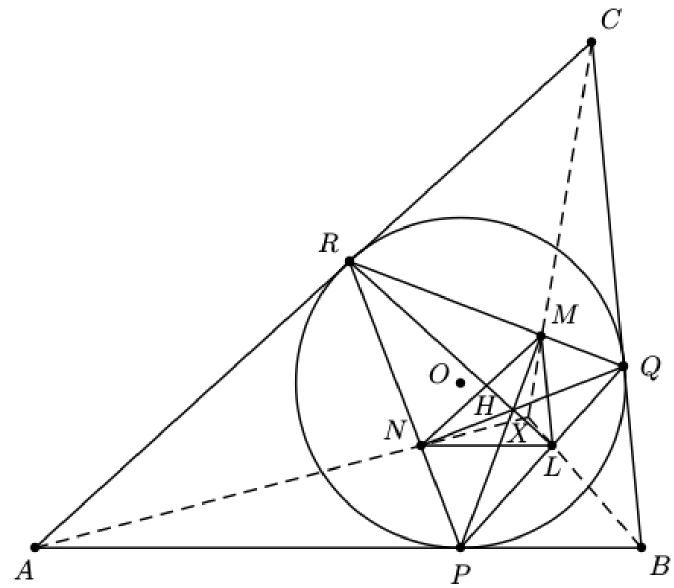
103. [**13**(1) (2005) p. 79.] En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

    a) Demuestre que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

    b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Solución del editor: (a) $\angle BPL = \angle PRQ$ por ángulo semi-inscripto, $\angle PRQ = 180° - \angle NHM = \angle NHP$ pues $RNHM$ es cíclico, $\angle NHP = \angle NLP$ pues $PNHL$ es cíclico. Por lo tanto $\angle BPL = \angle NLP$ y $AB \parallel NL$. Análogamente $BC \parallel LM$ y $CA \parallel MN$. Por lo tanto los triángulos ABC y NLM son honotéticos, y las rectas AN, BL y CM se cortan en el centro de homotecia X.

(b) El ortocentro H de PQR es el incentro de su triángulo órtico NLM. Pero la homotecia que transforma NLM en ABC lleva el incentro de NLM en el incentro de ABC, que es el circuncentro O de PQR. Por lo tanto X, H y O están alineados.



104. [**13**(1) (2005) p. 79.] Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

> *Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.*

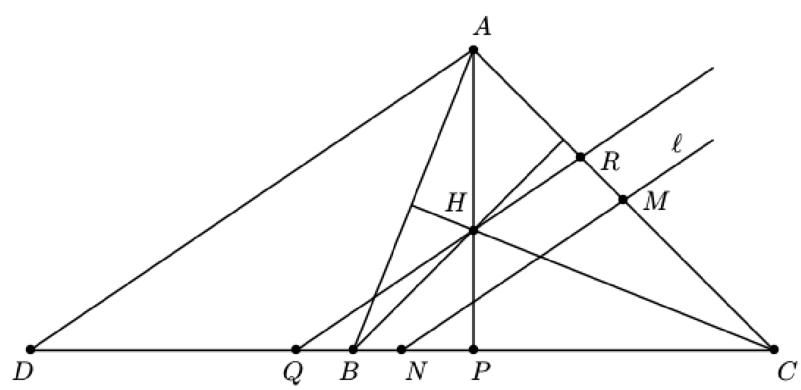
Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

Solución del editor: Rojo tiene una estrategia ganadora, que consiste en seleccionar, cada vez que le toca jugar, una línea del tablero perpendicular a la seleccionada por Azul en su jugada previa. Es claro que esto es siempre posible, ya que luego de las dos primeras jugadas quedarán 9 filas y 9 columnas disponibles, luego de la cuarta jugada quedarán 8 filas y 8 columnas disponibles, etc.

Para probar que esta estrategia es ganadora observemos que cada casilla del tablero es pintada exactamente dos veces, una cuando uno de los jugadores selecciona la fila en la cual se encuentra la casilla, y otra cuando alguno selecciona su columna. Para fijar ideas numeremos las filas de 1 a 10 y también las columnas de 1 a 10, y convengamos en que en el turno de Rojo, si en la jugada previa Azul escogió la fila k entonces Rojo escoge la columna k, mientras que si Azul escogió la columna k, entonces Rojo escoge la fila k. Si en sus primeras jugadas Azul y Rojo seleccionaron la fila y columna i_1 (en ese orden o en el contrario) entonces la casilla (i_1, i_1) que está en la intersección de ambas líneas es la única que queda con su color definitivo, que será el rojo. Si en la tercera y cuarta jugadas seleccionan la fila y columna i_2 entonces tres nuevas casillas alcanzan su color final, a saber las (i_1, i_2), (i_2, i_2) y (i_2, i_1). De estas tres, dos son rojas y una azul. En general, con cada par de jugadas sucesivas la ventaja de las casillas con color definitivo rojo sobre las azules se incrementa en 1. En efecto, si en las jugadas $2k-1$ y $2k$ Azul selecciona la fila i_k y Rojo la columna i_k entonces las casillas (i_k, i_1), (i_k, i_2),..., (i_k, i_{k-1}) quedan con color definitivo azul, mientras que (i_1, i_k), (i_2, i_k),..., (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_k) quedan con color definitivo rojo. Si Azul selecciona la columna i_k y Rojo la fila i_k entonces entonces las casillas (i_1, i_k), (i_2, i_k),..., (i_{k-1}, i_k) quedan con color definitivo azul y las (i_k, i_1), (i_k, i_2),..., (i_k, i_{k-1}), (i_k, i_k) quedan con color definitivo rojo. De este modo, al finalizar el juego el número de casillas rojas superará en diez unidades al número de casillas azules y Rojo ganará el juego.

105. [**13**(1) (2005) p. 80.] En un triángulo acutángulo ABC, sean H su ortocentro y M el punto medio del lado AC. Por M se traza una recta L paralela a la bisectriz del ángulo AHC. Demuestre que la recta L divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

Solución del editor: Sea P el pie la altura desde A. Entonces $\angle PHC = 90° - \angle HCB = \angle CBA = \beta$. Por lo tanto $\angle AHC = 180° - \angle PHC = 180° - \beta$. Si la bisectriz de $\angle AHC$ corta a la recta BC en Q y a AC en R, entonces $\angle CHR = 90° - \beta/2$ y $\angle CQH = \angle CHR - \angle HCB = 90° - \beta/2 - (90° - \beta) = \beta/2$.



Tomemos ahora D en la prolongación de CB de modo que $BD = BA$. Es fácil ver que $\angle ADB = \beta/2$ y por lo tanto $DA \parallel QR \parallel \ell$. Por lo tanto ℓ es paralela media del triángulo ADC y el punto N donde se cortan ℓ y la recta BC es el punto medio de DC.

Si N está en el segmento BC como en la figura anterior, se tiene $NB + BA = ND = NC$ y como $MC = MA$ resulta que $NBAM$ y NCM tienen igual perímetro. Si en cambio N está fuera del segmento BC como en la figura siguiente, y K es la intersección de ℓ con el lado AB, es claro que $BN = BK$ y por tanto $KA = BA - BK = BD - BN = ND = NC = NB + BC = BK + BC$ y como $MC = MA$ resulta que KAM y $KBCM$ tienen igual perímetro.