UNIVERSIDAD DEL ZULIA
Serbiluz
Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información
Biblioteca Digital
Repositorio Académico

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 34–47
https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7487440
(CC BY-NC-SA 4.0)
©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Matriz de adyacencia de Ramsey del grafo $K_{R(G,H)}$ con componentes h-buenas y las relaciones geométricas entre lados y vértices de los grafos G, H y $K_{R(G,H)}$

Ramsey adjacency matrix of the graph $K_{R(G,H)}$ with h-good components and the geometric relationship that exists between sides and vertices of the graphs G, H and $K_{R(G,H)}$.

José Figueroa (jose3765@gmail.com)
Departamento de Química
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Felicia Villarroel (feliciavillarroel@gmail.com)
Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Henry Ramírez (hlramirez6@hotmail.com)
Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Tobías Rosas (tjrosas@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8085-5011
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela.

Resumen

Sean G y H dos grafos simples, finitos, y no vacíos. El número de Ramsey $R(G,H)$, se define como el menor entero positivo n, tal que hay un grafo F de orden n que contiene un subgrafo G' copia monocromática isomorfa a G, o el complemento de F (denotado por $\overline{F}$) contiene un subgrafo H' copia monocromática isomorfa a H. Se dice que el grafo completo K_n contiene componentes h-buena, si para toda secuencia s_i, con $i = 1, \cdots, m+1$, donde m es la talla de cada secuencia que colorean los lados del grafo completo $K_n = F \cup \overline{F}$, tal que se pueda extraer de F, al menos una copia monocromática $G^{'}$ isomorfa a G, o $\overline{F}$ contenga al menos una copia monocromática $H^{'}$ isomorfa a H. En este manuscrito se presentan dos resultados principales, a saber: 1) Se determinan los lados incidentes de cada vértices $v_1, \ldots, v_n$ del grafo

Recibido 10/09/2021. Revisado 20/10/2021. Aceptado 15/06/2022.
MSC (2010): Primary 05C55; Secondary 05C15.
Autor de correspondencia: José Figueroa

G de orden n, a través de su matriz de adyacencia $A(G)$, obteniendo la fórmula $Traz(M) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(G)|$, donde $M = (A(G))^2$ es una matriz de orden $n \times n$, $Traz(M)$ es la traza de la matriz M, y $d(v_i)$ es el grado del vértice v_i para $i = 1, \ldots, n$. 2) Se determina la matriz de adyacencia Ramsey del menor grafo completo $K_{R(G,H)}$ con componentes h-buena. Se determina a través de los elementos m_{ij} de M, las relaciones existentes entre los lados y los vértices de los grafos G y H, con respecto a $K_{R(G,H)}$ y se obtuvieron las siguientes propiedades:

1) $\displaystyle\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_{R(G,H)})| = k|E(K_{R(G,H)})|$, con $k = m_{ij} \in M$.

2) Existen $r, s \in \mathbb{Z}^+$, dependientes de $E(G)$, $E(H)$ y $E(K_{R(G,H)})$, tal que $\dfrac{E(K_{R(G,H)})}{r} = \dfrac{E(G)}{s}$.

3) Existen $p, q \in \mathbb{Z}^+$, dependientes de $V(G)$, $V(H)$ y $V(K_{R(G,H)})$, tal que, $\dfrac{V(K_{R(G,H)})}{p} = \dfrac{V(H)}{q}$.

4) $Traz(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(K_n)|$.

Palabras y frases clave: Teoría Combinatoria, Números de Ramsey, Grafos con componentes h-buena, Matriz de adyacencia, Producto de Matrices, Matriz diagonal, Matrices triangulares.

Abstract

Let be G and H two simple graphs, finite and non-empty. The Ramsey $R(G, H)$ number, is defined as the smallest positive integer n, such that there is a graph F, that contains a monochrome copy G' isomorphic to G or the complement of F (denote by $\overline{F}$), contains a monochrome copy H' isomorphic to H. It is said that the complete graph K_n contains components h-good, if for every sequence s_i of size m, with $i = 1, \cdots, m+1$, that colors the sides of the complete graph $K_n = F \cup \overline{F}$, such that can be extracted from F, at least one G' monochrome copy isomorphic to G ór $\overline{F}$ contains at least one H' monochrome copy isomorphic to H. Two main results are presented in this manuscript, these are: 1) The incident sides of each vertex $v_1, \ldots, v_n$ of the graph G are determined, through an adjacency matrix $A(G)$, getting the formula $Traz(M) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(G)|$, where $M = (A(G))^2$ is a square matrix of order $n \times n$, $Traz(M)$ is the trace of the matrix M, and $d(v_i)$ is the degree of the v_i for $i = 1, \ldots, n$. 2) The Ramsey adjacency matrix of the least complete graph $K_{R(G,H)}$ with components h-good is determined. It is determined through the elements m_{ij} of M, the relationships between the sides and the vertices of the graphs G and H, with respect to $K_{R(G,H)}$ and the following properties were obtained:

1) $\displaystyle\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_n)| = k|E(K_n)|$, with $k = m_{ij} \in M$.

2) There exist $r, s \in \mathbb{Z}^+$, dependent on $E(G)$, $E(H)$ and $E(K_{R(G,H)})$, such that $\dfrac{E(K_n)}{r} = \dfrac{E(G)}{s}$.

3) There exist $p, q \in \mathbb{Z}^+$, dependent on $V(G)$, $V(H)$ and $V(K_{R(G,H)})$, such that $\dfrac{V(K_{R(G,H)})}{p} = \dfrac{V(H)}{q}$.

4) $Traz(M) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(K_{R(G,H)})|$.

Key words and phrases: Combinatorial Theory, Ramsey Numbers, Graph with components h-good, Adjacency Matrix, Product of Matrices, Diagonal Matrix, Triangular Matrices.

1 Introducción

En este trabajo se consideran todos los grafos simples, finitos, sin lazos y no vacíos. En [1] Diestel, expresa que un *grafo* G, es un par de conjuntos $(V(G), E(G))$, denotado por $G := (V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices* o *nodos* y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V, llamados *lados* o *aristas*. Si G es un grafo que no posee lazos ni lados múltiples, entonces G se dice *grafo simple*. Los *vecinos* de un vértice $u \in V(G)$, denotado por $N_G(u)$, es el conjunto de todos los vértices $v \in V(G)$ tal que $(u, v) \in E(G)$. El *orden de* G, denotado por $|G|$, es el número de vértices de G. Dado un grafo simple F, su *complemento* será denotado por $\overline{F}$, y además se tiene que el *grafo completo* $K_n = F \cup \overline{F}$. En [2] Figueroa, se dice que el grafo completo K_n contiene *componentes h-buena*, si para toda secuencia s_i, con $i = 1, \cdots, m+1$, donde m es el tamaño de cada secuencia que colorea los lados del grafo completo $K_n = F \cup \overline{F}$, tales que pueda extraer de F, al menos una copia monocromática $G^{'}$ isomorfa a G o extraer de $\overline{F}$ al menos una copia monocromática $H^{'}$ isomorfa a H. En [3] Grassmann y Tremblay, definen la *matriz de adyacencia* $A(G)$ de un grafo G con n vértices, $v_1, \ldots, v_n$, como una matriz cuadrada simétrica de orden $n \times n$ cuyos elementos $a_{i,j}$ se definen de la siguiente manera:

$$a_{i,j}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{si} \quad (v_i, v_j) \notin E(G), \end{cases}$$

Una matriz cuadrada $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, de orden n, se dice *simétrica* si $m_{ij} = m_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, es decir, $M = M^t$ (la transpuesta de la matriz). Además, M se denomina *diagonal* si $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se denotará por $Traz(M)$ a la traza de la matriz M.

Nótese que de una matriz cuadrada $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, de orden n, se puede obtener una matriz diagonal $Diag(M)$ definida por $Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

$$Diag(M) = [m_{i,j} \times \delta_{ij}]_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

de manera que $Traz(M) = Traz(Diag(M)) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

2 Grados de los vértices de un grafo G, a través de su matriz de adyacencia.

Se darán a continuación algunos ejemplos ilustrativos donde se refleja parte de los resultados de esta sección.

Ejemplo 2.1. *Sea G el grafo diamante como se observa en la Figura 1.*

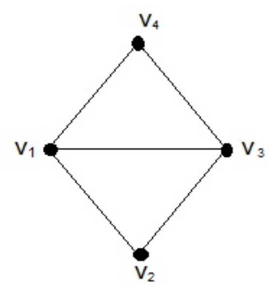

Figura 1: $K_4 - l$, grafo diamante

Sea la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo diamante G, donde $A(G)$ es una matrices simétrica, ya que cada lado del grafo G se cuenta dos veces en G.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, definiendo la matriz $M = (A(G))^2$ por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que M es una matriz simétrica, ya que el producto de matrices simétricas es un matriz simétrica.

Luego, calculando la matriz diagonal $Diag(M)$, se tiene que

$$Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Traz(M) = \sum_{i=1}^{4} m_{ii} = \sum_{i=1}^{4} d(v_i) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10 = 2 \times 5 = 2|E(G)|.$$

Ejemplo 2.2. *Sea G el grafo pez como se observa en la Figura 2.*

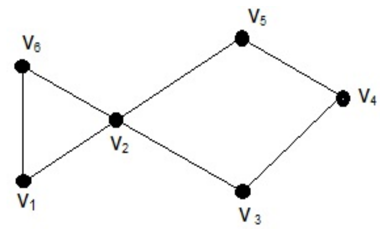

Figura 2: Grafo pez

Sea la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo pez G.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, definiendo la matriz $M = (A(G))^2$ por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que M, es una matriz simétrica en el sentido usual. Entonces,

$$Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{6} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Traz(M) = \sum_{i=1}^{6} m_{ii} = \sum_{i=1}^{6} d(v_i) = 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14 = 2 \times 7 = 2|E(G)|.$$

Ejemplo 2.3. *Sea G el grafo árbol como se observa en la Figura 3.*

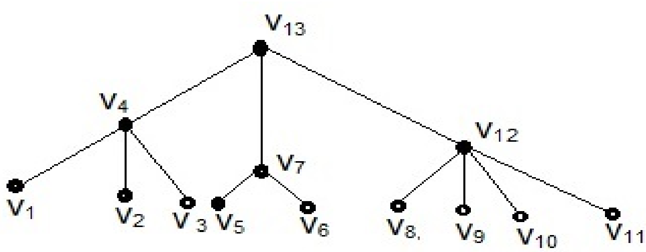

Figura 3: Grafo árbol.

Sea la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo árbol.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Sea $M = (A(G))^2$. Así, la matriz M es una matriz simétrica y su diagonal está dada por.

$$Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{13} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}.$$

$$Traz(M) = Traz\left([m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{13}\right) = \sum_{i=1}^{13} m_{ii} = \sum_{i=1}^{13} d(v_i) = 24 = 2 \times 12 = 2|E(G)|.$$

Teorema 2.1. *Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de un grafo simple G cualesquiera, finito y sin lazos. Sea $M = (A(G))^2$, con $Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n$, entonces*

$$Traz(M) = Traz\left([m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n\right) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(G)|.$$

Demostración. Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de un grafo simple cualquiera G, sin lazos. Como $A(G)$ es una matriz simétrica, entonces $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, considere $M = (A(G))^2$ la cual es también una matriz simétrica, porque el producto de matrices simétricas es simétrica. Nótese que, por definición de M, el elemento m_{ii} está dado por la expresión

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 \tag{2.1}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Como los elementos o entradas de la matriz $A(G)$ son 0 y 1 se tiene que la expresión en (2.1) se transforma en

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} \tag{2.2}$$

Por otro lado, obsérvese que la suma de las entradas de la fila i-ésima de la matriz $A(G)$ da como resultado el número de vértices de $V(G)$ relacionados con el vértice v_i, es decir,

$$d(v_i) = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} \tag{2.3}$$

Ahora, sea δ_{ij} el delta de Kronecker y considerando la matriz $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^n$, se puede obtener la matriz diagonal $Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n$. Así, por las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tiene que

$$\begin{array}{rcl} Traz(M) & = & (a_{11} + \cdots + a_{1n}) + \cdots + (a_{n1} + \cdots + a_{nn}) \\ & = & \quad d(v_1) \quad + \cdots + \quad d(v_n) \\ & = & 2|E(G)| \end{array}$$

Por lo tanto,

$$Traz(M) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(G)|.$$

□

3 Matriz de adyacencia Ramsey $A(K_{R(G,H)})$, y la relación existente entre los lados y vértices de los grafos G, H y $K_{R(G,H)}$.

Definición 3.1. Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y sin lazos. Se llama *matriz de adyacencia Ramsey*, denotada por $A(K_{R(G,H)})$, a la matriz de adyacencia del menor grafo completo $K_{R(G,H)} = F \cup \overline{F}$, tal que F contiene una copia monocromática G' isomorfa a G o $\overline{F}$ contiene una copia monocromática H' isomorfa a H.

Definición 3.2. Dada la matriz $A(K_{R(G,H)})$ como en la Definición 3.1, defínase la matriz $M = \left(A(K_{R(G,H)})\right)^2$, la cual es una matriz simétrica y satisface las siguientes condiciones:

1) $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_{R(G,H)})| = k|E(K_{R(G,H)})|$, con $k = m_{ij} \in M$.

2) $Traz(M) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(K_{R(G,H)})|$.

Definición 3.3. Una matriz M como en la Definición 3.2, se dice que es *lado de Ramsey* si G es bueno con respecto a H, y existen enteros t, o, p, q, r, $s \in \mathbb{Z}^+$, tales que se satisfacen las siguientes relaciones geométricas entre los lados de los grafos G, H, y $K_{R(G,H)}$:

i) $\dfrac{|E(K_{R(G,H)})|}{p} = \dfrac{|E(G)|}{q}$ ii) $\dfrac{|E(K_{R(G,H)})|}{s} = \dfrac{|E(H)|}{r}$ iii) $\dfrac{|E(G)|}{o} = \dfrac{|E(H)|}{t}$.

Definición 3.4. Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y sin lazos. Sea $l = \text{máx}\{|G|, |H|\}$. Una matriz M como en la Definición 3.2 se dice que es *vértice de Ramsey*, si existen enteros a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{Z}^+$ tales que se satisfacen las siguientes relaciones geométricas entre los vértices de los grafos G, H y K_l:

i) $\dfrac{|V(K_{R(G,H)})|}{b} = \dfrac{|V(G)|}{a}$ ii) $\dfrac{|V(K_{R(G,H)})|}{d} = \dfrac{|V(H)|}{c}$ iii) $\dfrac{|V(G)|}{e} = \dfrac{|V(H)|}{f}$.

Ejemplo 3.1. *Sea $G = K_{1,n}$ el grafo estrella, para $n \geq 4$ y sea $H = K_4 - l$ el grafo diamante, si $l = \text{máx}\{|G|, |H|\} = \text{máx}\{5, 4\} = 5$. Luego $R(G,H) = 5$, para $n = 4$. $R(G,H)$ no puede ser 4, pues $|E(F)| < |E(G)|$ y $|E(\overline{F})| < |E(H)|$, (ver [2]).*

La matriz de adyacencia de $R(G,H)$ está dada por:

$$A(K_{R(G,H)}) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $M = \left(A(K_{R(G,H)})\right)^2$, entonces

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nótese que M, es una matriz simétrica. Además, como $K_{R(G,H)}$ es un grafo completo se tiene que $a_{ij} \neq 0$ para $i > j$ y $a_{ij} \neq 0$ para $i < j$. Así, $m_{ij} \neq 0$ para $i < j$ e $i < j$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i>j} m_{ij} &= \sum_{i<j} m_{ij} = 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 \\ &= 3(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 3 \times 10 = 3 \times |E(K_5)|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 3 \times |E(K_5)|.$$

Como $3 \times |E(K_5)| = 3 \times 10 = 15 \times 2$, *entonces existe* $q = 2 \in \mathbb{Z}^+$, *tales que*

$$3 \times |E(K_5)| = (\frac{2}{2}) \times (15 \times 2) = \frac{15 \times |E(G)|}{2}.$$

Así, $3 \times |E(K_5)| = \dfrac{15 \times |E(G)|}{2}$ *y por tanto* $|E(K_5)| = \dfrac{5 \times |E(G)|}{2}$.

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 3 \times |E(K_5)| = 6 \times 5 = 6 \times |E(H)|.$$

Luego, $3 \times |E(K_5)| = 6 \times |E(H)|$ *de donde* $|E(K_5)| = 2 \times |E(H)|$. *La relación geométrica entre los lados de* $K_{R(G,H)}$ *y los lados de los grafos* G *y* H.

Obsérvese ahora que

$$|E(K_5)| = \frac{5 \times |E(G)|}{2} \ \ y \ \ |E(K_5)| = 2 \times |E(H)|,$$

igualando ambos resultados se obtiene:

$$\frac{|E(G)|}{4} = \frac{|E(H)|}{5}.$$

La relación geométrica entre los vértices de $K_{R(G,H)}$ *y entre los vértices de* G, H *y* K_l, *a través de las matrices triangular superior e inferior esta dada a continuación*

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 30 = 6 \times 5 = 6|V(K_5)| = 6|V(G)|$$

de manera que $|V(K_5)| = |V(G)|$ *y así existe* $d = 2 \in \mathbb{Z}^+$ *tal que*

$$6 \times |V(K_5)| = (15 \times 2) \times (\frac{2}{2}) = \frac{15}{2}|V(H)|.$$

Luego, como $|V(K_5)| = |V(G)|$ *y* $|V(K_5)| = 5 \times \dfrac{|V(H)|}{4}$ *e igualando las expresiones resulta:*

$$\frac{|V(G)|}{5} = \frac{|V(H)|)}{4}.$$

Ahora, la matriz $Diag(M)$ *está dada por*

$$Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{5} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$Traz(M) = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 = 2 \times 10 = 2|E(K_5)|$$

Ejemplo 3.2. *Sea G el grafo árbol del Ejemplo 2.3, Figura 3 y $H = W_n$ el grafo rueda, para $n \geq 13$, si $l = \text{máx}\{|G|, |H|\} = \text{máx}\{13, 14\} = 14$, luego $R(G, H) = n + 1$, para $n = 13$. $R(G, H)$ no puede ser 13, pues $|E(F)| < |E(G)|$ y $|E(\overline{F})| < |E(H)|$, (ver [2]).*

Así, $K_{R(G,H)}$ con $R(G, H) = 14$, es el menor grafo completo que, coloreado con cada secuencia s_i de talla $m = 91$, para $i = 1, 2, \cdots, 92$, satisface que F contiene una copia monocromática G' isomorfa a G o $\overline{F}$ contiene una copia monocromática H' isomorfa a H.

Sea la matriz de adyacencia del grafo $K_{R(G,H)}$, dada por

$$A(K_{R(G,H)}) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $M = \left(A(K_{R(G,H)})\right)^2$, es decir,

$$M = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Nótese que M, es una matriz simétrica. Además, como $K_{R(G,H)}$ es un grafo completo se tiene $a_{ij} \neq 0$ para $i > j$ y $a_{ij} \neq 0$ para $i < j$. Así, $m_{ij} \neq 0$ para $i < j$ e $i < j$. Por tanto,

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_{R(G,H)})| = 12|E(K_{R(G,H))}|.$$

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 12 \times 91 = 91 \times |E(G)|.$$

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 42 \times |E(H)|.$$

La relación geométrica entre los lados de $K_{R(G,H)}$, y los lados de los grafos G y H.

$$12 \times |E(K_{14})| = 91 \times |E(G)| \Longrightarrow \frac{|E(K_{14})|}{91} = \frac{|E(G)|}{12} = 1.$$

$$12 \times |E(K_{14})| = 42 \times |E(H)| \Longrightarrow \frac{|E(K_{14})|}{7} = \frac{|E(H)|}{2} = 13.$$

$$91 \times |E(G)| = 42 \times |E(H)| \Longrightarrow \frac{|E(G)|}{6} = \frac{|E(H)|}{13} = 2.$$

La relación geométrica entre los vértices de $K_{R(G,H)}$, y entre los vértices de G y H a través de las matrices triangular superior e inferior se muestra a continuación

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 78|V(K_{14})| = 84|V(G)| \quad y \quad \sum_{i>j} m_{ij} = 78|V(H)|.$$

Luego,

$$78|V(K_{14})| = 84|V(G)| \Longrightarrow \frac{|V(K_{14})|}{14} = \frac{|V(G)|}{13} = 1$$

$$78|V(K_{14})| = 78|V(H)| \Longrightarrow |V(K_{14})| = |V(H)| = 14,$$

y

$$84|V(G)| = 78|V(H)| \Longrightarrow \frac{|V(G)|}{13} = \frac{|V(H)|}{14} = 1.$$

Ahora, la matriz $Diag(M)$ está dada por: $Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{14}$

$$Diag(M) = \begin{pmatrix}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13
\end{pmatrix}.$$

Así,

$$Traz(M) = Traz([m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{14}) = \sum_{i=1}^{14} d(v_i) = 2|E(R(G,H))|.$$

Teorema 3.1. *Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y no vacíos. Si G es bueno con respecto a H y $A(K_l) = A(K_{R(G,H)})$ es la matriz de adyacencia del menor grafo completo que contiene una copia monocromática isomorfa G o una copia monocromática isomorfa a H, con $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{l} = (A(K_l))^2$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_l)| = k|E(K_l)|$, *con* $k = m_{ij} \in \mathbb{Z}^+$.

2) Existen $r, s \in \mathbb{Z}^+$, *dependientes de* $E(G)$, $E(H)$ *y* $E(K_l)$, *tales que* $\dfrac{|E(K_l)|}{r} = \dfrac{|E(G)|}{s}$.

3) Existen $p, q \in \mathbb{Z}^+$, *dependientes de* $V(G)$, $V(H)$ *y* $V(K_l)$, *tales que* $\dfrac{|V(K_l)|}{p} = \dfrac{|V(H)|}{q}$.

4) $Traz(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} d(v_i) = 2|E(K_l)|$.

Demostración. 1) Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y no vacíos. Si G es bueno con respecto a H, entonces existe un conjunto de secuencias s_i de talla m, con $i = 1, 2, \cdots, m+1$, donde cada s_i, colorea los lados del grafo completo $K_l = F \cup \overline{F}$, tal que del grafo F puede extraerse al menos una copia monocromática G' isomorfa G, o de $\overline{F}$ puede extraerse al menos una copia monocromática H' isomorfa H. Considérese la matriz de adyacencia $A(K_l) = [a_{ij}]$, del menor grafo completo K_l, que contiene componentes h-buena, la cual es simétrica de orden $l \times l$ y su elementos están dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \tag{3.1}$$

Defínase la matriz $M = (A(K_l))^2$, también simétrica de orden $l \times l$. Tómese una partición de la matriz M, en tres matrices: una matriz triangular superior (m_{ij}) con $j > i$, una triangular inferior (m_{ij}) con $i > j$ y la matriz $Diag(M)$. Nótese, que el número de elementos distintos de cero de M es l^2 y el de la matriz $Diag(M)$ es l (justo los elementos de la diagonal de M). Luego, sea w el número de elementos distintos de cero de la matriz triangular superior, entonces como M es simétrica se tiene que la matriz triangular inferior tiene w elementos distintos de cero, y por tanto $l^2 = l + 2w$ de donde se obtiene que $w = \dfrac{l(l-1)}{2}$. Como K_l es completo y M simétrica, todos los elementos m_{ij}, para $i \neq j$ son iguales, por la ecuación (3.1), y además $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij}$. Sin pérdida de generalidad,

$$\begin{aligned} \sum_{j>i} m_{ij} &= (m_{12} + \cdots + m_{1l}) + (m_{23} + \cdots + m_{2l}) + \cdots + (m_{(l-2)l} + m_{(l-2)l}) + m_{(l-1)l} \\ &= m_{12} \times (1 + 1 + \cdots + 1 + 1) = m_{12} \times w = m_{12} \times \frac{l(l-1)}{2} = k|E(K_l)|. \end{aligned}$$

2) Usando el resultado del ítem *1)* se tiene que

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \sum_{i>j} m_{ij} = k|E(K_l)| \tag{3.2}$$

Como $|E(G)| < |E(K_l)|$ y $|E(H)| < |E(K_l)|$, existen $\frac{c}{b}, \frac{e}{d}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}^+$, tal que

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{c}{b}\right)|E(G)| \tag{3.3}$$

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{e}{d}\right)|E(H)| \tag{3.4}$$

Para la ecuación (3.3) basta tomar $c = k|E(K_l)|$ y $d = |E(H)|$. De forma similar para la ecuación (3.4).

Luego, igualando las ecuaciones (3.2) y (3.3) se tiene

$$\frac{|E(K_l)|}{c} = \frac{|E(G)|}{kb},$$

con $w = kb$, $c \neq w$, ya que $|E(K_l)| = |E(F)| + |E(\overline{F})|$ y $|E(G)| \leq |E(F)|$ o $|E(H)| \leq |E(\overline{F})|$.

Igualando las ecuaciones (3.2) y (3.4) se tiene

$$\frac{|E(K_l)|}{e} = \frac{|E(H)|}{kd},$$

con $u = kd$,$e \neq u$, puesto que $|E(K_l)| = |E(F)| + |E(\overline{F})|$ y $|E(G)| \leq |E(F)|$ o $|E(H)| \leq |E(\overline{F})|$.

Igualando las ecuaciones (3.3) y (3.4) se tiene que

$$\frac{|E(H)|}{cd} = \frac{|E(G)|}{eb}.$$

Haciendo $r = be$ y $s = cd$, entonces $\dfrac{|E(H)|}{r} = \dfrac{|E(G)|}{s}$.

3) Sean $f, j, l, p, q, x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, existen $\frac{x}{y}, \frac{z}{f}, \frac{j}{l}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, tal que

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{x}{y}\right)|V(K_l)|, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{z}{f}\right)|V(G)| \tag{3.6}$$

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{j}{l}\right)|V(H)| \tag{3.7}$$

Luego, de igualando las ecuaciones (3.5) y (3.6) se tiene que

$$\frac{|V(K_l)|}{yz} = \frac{|V(G)|}{xf},$$

Tomando, $q = xf$ y $p = yz$, entonces $\dfrac{|V(K_l)|}{p} = \dfrac{|V(G)|}{q}$.

De forma similar a la anterior se igualan las ecuaciones (3.5) - (3.7), y (3.6) - (3.7), obteniendo respectivemente que

$$\frac{|V(K_l)|}{yj} = \frac{|V(H)|}{xl} \qquad \text{y} \qquad \frac{|V(G)|}{fj} = \frac{|V(H)|}{zl}$$

4) Si $v_1, \ldots, v_l$ son los vértices del grafo K_l, entonces aplicando el Teorema 2.1, se obtiene que

$$Traz(M) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(K_l)|.$$

$\square$

Referencias

[1] Diestel, R. (2000) *Graph Theory.* Second Edition, Spriner.

[2] Figueroa, J.; Villarroel, F.; Ramírez, H. y Otero, J.; *Los Números de Ramsey con componente $h-$buena y secuencias simétricas,* Divulgaciones Matemáticas, **20**(1) (2019), 78–90.

[3] Grassmann, Winfried K. y Tremblay, Jean-Paul. (2000) *Matemática Discreta y Lógica, una perspectiva desde la ciencia de la computación.* 3^{ra} reimpresión, Editorial Prentice Hall, España. IBSN 84-89660-04-2.

[4] Mann, H. B.; *Two Addition Theorems*, Journal of Combinatorial Theory, **8** (1967). 233–235.

[5] Villaroel, F.; Figueroa, J.; Márquez, H. and Anselmi, A.; *Un método algorítmico para el calculo del número Baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella.* Bol.soc. Paran. Mat. (3s) **36**(2) (2018), 169–183.