Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 10–22
https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7487423

e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Estructura algebraica de los autómatas finitos y lenguajes

Algebraic structure of finite automata and languages

Fernando Ortiz (fernandojavier12037@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1048-3478
Instituto de Postgrado
Universidad Técnica de Manabí.
Av.Urbina y Che Guevara, 130103, Ecuador.

Luz Solé (luzsole@gmail.com)
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6783-1819
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de los Ándes
Mérida 5101, República Bolivariana de Venezuela

Resumen

Estableceremos a los autómatas finitos mediante un enfoque algebraico, donde todos los argumentos y pruebas son constructivas; y donde el concepto fundamental para dicho enfoque esta centrado en la multiplicidad.

Palabras y frases clave: Autómatas finitos, comportamiento dinámico, multiplicidad.

Abstract

We will present finite automata through an algebraic approach, where all the arguments and proofs are constructive; and where the fundamental concept for this approach is centered on multiplicity.

Key words and phrases: Finite automata, dynamic behavior, multiplicity.

1 Introducción

Presentamos una estructura algebraica la cual será aplicada a los autómatas finitos [1, 4, 5, 2, 3], donde la noción básica que nos permitirá tal extensión es la multiplicidad. Para ser más precisos, sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un autómata, y sea $|\mathcal{A}|$ su correspondiente comportamiento dinámico, cada camino $c : i \to t$, $i \in I, t \in T$ con etiqueta $|c| = s$ determina que $s \in \mathcal{A}$; más aún, si n es el número de tales caminos, entonces podemos establecer una función $\Sigma^* \to \mathbb{N}$ la cual especifica la multiplicidad de los elementos $s \in \Sigma^*$. En este caso diremos que $s \in |\mathcal{A}|$ con multiplicidad n. También, con abuso de lenguaje escribiremos la función de multiplicidad como $|\mathcal{A}| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$,

Recibido 29/06/2021. Revisado 17/09/2021. Aceptado 23/11/2021.
MSC (2010): Primary 37N35; Secondary 93C65.
Autor de correspondencia: Luz Solé

$|\mathcal{A}|(s) = n$, y la llamaremos el comportamiento de $\mathcal{A}$. Note que de acuerdo a lo establecido, $|\mathcal{A}|(s) = 0$ significa que $s \notin |\mathcal{A}|$. Así, identificamos a $|\mathcal{A}|$, el cual es un subconjunto ordinario de Σ^*, con la aplicación $|\mathcal{A}| : \Sigma^* \to \mathbb{N}$. Por otro lado, sin consideraciones de multiplicidad cualquier subconjunto A de Σ^* puede ser visto como una función $A : \Sigma^* \to \beta$, donde $\beta = \{0, 1\}$. La identificación es dada por la relación: $s \in A \iff A(s) = 1$. Finalmente, nos confrontamos con dos clases de "Subconjuntos" de Σ^* ($\mathbb{N}$-subconjuntos y β-subconjuntos) las cuales corresponden, unificadamente, al concepto de un semianillo K.

2 Nociones preliminares

Nosotros asumiremos que son conocidos los conceptos y resultados básicos de las teorías de autómatas y lenguajes. Por su parte,

Definición 2.1. Un semianillo K es un conjunto dotado de dos operaciones: suma$(+)$ y multiplicación $\cdot$; tal que $(K, +)$ es un monoide conmutativo con elemento neutro 0 y $(K, \cdot)$ es un monoide con elemento identidad 1. Además, para todo $x, y, z \in K$ se tiene que

$$x(y+z) = xy + xz \qquad (y+z)x = yx + zx$$
$$x0 = 0 = 0x.$$

Un semianillo K es llamado conmutativo si $(K, \cdot)$ es conmutativo. Claramente, todo anillo con unidad es un semianillo. Ejemplos de algunos semianillos conmutativos.

Ejemplo 2.1. *Sea $\beta = \{0, 1\}$ es un semianillo, donde la suma esta dada por*

$$1+1=1 \qquad 0+0=0$$
$$0+1=1 \qquad 1+0=1.$$

Note que 0 es el elemento neutro. La multiplicación está dada por

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0 \qquad 1 \cdot 0 = 0.$$

donde 1 es el elemento identidad.

Ejemplo 2.2. *El conjunto $\mathbb{N}$ es el semianillo de todos los enteros $n \geq 0$, con la suma y la multiplicación usual.*

Ejemplo 2.3. *El conjunto $\overline{\mathbb{N}}$ es el semianillo $\mathbb{N}$ junto con un elemento adicional ∞, donde la suma y la multiplicación son extendidas por*

$$n + \infty = \infty \qquad \infty + n = \infty \qquad \infty + \infty = \infty$$
$$n \cdot \infty = \infty,\ n \neq 0 \qquad \infty \cdot n = \infty;\ n \neq 0 \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$
$$\infty \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \infty.$$

Ejemplo 2.4. *El conjunto $\mathbb{R}^+$ es el semianillo de todos los números reales $x \geq 0$, con la suma y la multiplicación usual.*

Ejemplo 2.5. *El conjunto $\overline{\mathbb{R}}^+$ es el semianillo de los números $\mathbb{R}^+$ junto con ∞, donde las operaciones se extienden exactamente como en el caso de $\mathbb{N}$ a $\overline{\mathbb{N}}$.*

Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de elementos de un semianillo K, donde I es un conjunto cualquiera de índices; es decir, una aplicación $\varphi : I \longrightarrow K$, tal que $\varphi(i) = x_i$, $i \in I$. Si I es finito, la suma

$$\sum_{i\in I} x_i \in K \tag{2.1}$$

Esta suma tiene las siguientes propiedades:

$$\text{Si } I = \{i\}, \text{ entonces } \sum_{i\in I} x_i = x_i \tag{2.2}$$

Si $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ es una partición de I y $z \in K$, entonces

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_J} x_i \right) \tag{2.3}$$

$$z \left(\sum_{i\in I} x_i \right) = \sum_{i\in I} z x_i \tag{2.4}$$

$$\left(\sum_{i\in I} x_i \right) z = \sum_{i\in I} x_i z \tag{2.5}$$

$$\text{Si } I = \emptyset, \text{ entonces } \sum_{i\in I} x_i = 0 \tag{2.6}$$

Ahora, considerando a (2.1) en lugar de la suma $x+y$ y tomando (2.2)-(2.6) y $(K, \cdot)$ el monoide dado como axiomas, entonces podemos definir

$$x_1 + x_2 = \sum_{i\in I} x_i, \text{ con } I = \{1, 2\} \qquad \text{y} \qquad 0 = \sum_{i\in I} x_i, \text{ si } I = \emptyset.$$

En consecuencia, bajo esta axiomática, tenemos una forma equivalente para definir un semianillo. En efecto, la conmutatividad y asociatividad se obtienen del hecho siguiente: si $\varphi : J \to I$ es una biyección, entonces

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}.$$

Por otro lado, la distributividad a izquierda y derecha se obtienen de (2.4) y (2.5). Enfatizamos que (2.1) es definida si I es finito. Ahora, si para cualquier conjunto de índices I, (2.1) está bien definida como elemento de K, entonces bajo nuestra nueva definición de semianillo, se obtiene la noción de semianillo completo. Finalmente, todo semianillo completo es un semianillo.

Los anillos $\overline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{R}}^+, \beta$ son completos ya que la suma puede extenderse de manera natural para definir (2.1), para cualquier conjunto de índices I, esto es, usando el orden usual en $\overline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{R}}^+, \beta$ puede definirse (2.1) como la menor de las cotas superiores de los elementos $\sum_{i\in J} x_i$, donde J recorre todos los subconjuntos finitos de I.

Definición 2.2. Dados dos semianillos K y $K^{'}$, un homomorfismo $\varphi : K \longrightarrow K^{'}$ es una función que satisface:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2) &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \\ \varphi(0) &= 0^{'} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 \cdot x_2) &= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2), \\ \varphi(1) &= 1^{'}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Notemos que si I es finito, entonces

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) \tag{2.9}$$

Observación 2.1. Si K y $K^{'}$ son completos entonces (2.7) es reemplazado por (2.9) para I arbitrario.

Definición 2.3. Un semianillo K será llamado positivo si satisface:

1. $0 \neq 1$.
2. si $x + y = 0$, entonces $x = y = 0$.
3. si $xy = 0$, entonces $x = 0$ ó $y = 0$.

Sea K un semianillo y considérese $T : K \to \beta$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} x = 0 \\ 0, & \text{si} x \neq 0 \end{cases}$$

Entonces, T es un homomorfismo si, y sólo si, K es positivo.

En lo que sigue asumiremos que K es un semianillo no trivial $(0 \neq 1)$ y conmutativo.

Definición 2.4. Sea X un conjunto. Un subconjunto A de X es una función $A : X \longrightarrow K$. Para cada $x \in X$, el elemento $A(x)$ será llamado la multiplicidad con la cual x pertenece a $\dot{A}$. Si los valores que toma A son 0 y 1, diremos que el subconjunto A de X es no ambiguo.

Si $K = \beta$, entonces todos los subconjuntos de X son no ambiguos. Los subconjuntos A de X no ambiguos pueden ser identificados con el subconjunto $\{x : A(x) = 1\}$ de X (recordemos que hemos supuesto $0 \neq 1$).

Ejemplo 2.6. *Sea $X, \emptyset$ y x, para cada $x \in X$, dados por:*

1. *$X(x) = 1$, para todo $x \in X$; $\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in X$;*
2. $x(y) = \begin{cases} 1, & \textit{si } x = y \\ 0, & \textit{en otro caso}, \end{cases}$

son subconjuntos no ambiguos. Los subconjuntos no ambiguos x serán llamados "simples". Si A es un subconjunto no ambiguo de X, las notaciónes $x \in A$ y $A(x) = 1$ son sinónimos.

Finalmente, si A es un subconjunto de X y $\varphi : K \to K'$ es un homomorfismo de semianillos, entonces la composición

$$X \xrightarrow{A} K \xrightarrow{\varphi} K'$$

es un subconjunto $\varphi(A)$ de X.

La primera operación que consideraremos es la suma o unión, denotada por $\sum$ ó $\cup$ respectivamente. Para cada familia indizada $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X, definimos

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)(x) = \left(\sum_{i\in I} A_i\right)(x) = \sum_{i\in I} A_i(x) \tag{2.10}$$

Esta definición no requiere comentario si K es completo. En otro caso, se asumirá que la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es localmente finita; es decir, para cada $x \in X$ se tiene que $A_i(x) = 0$ excepto para un número finito de elementos $i \in I$.

Si $I = \{1, \cdots, n\}$, se usará la notación

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ ó } A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

en lugar de $\bigcup_{i\in I} A_i$ ó $\sum_{i\in I} A_i$, respectivamente.

La segunda operación es la multiplicación de $k \in K$ por un subconjunto A. El resultado es un subconjunto kA definido por

$$(kA)(x) = kA(x) \tag{2.11}$$

A partir de las definiciones previas, se tienen las siguientes propiedades:

$$1A = A, \quad 0A = \emptyset, \quad (k_1k_2)A = k_1(k_2A), \quad \left(\sum_{i\in I} k_i\right)A = \sum_{i\in I} k_iA, \quad k\left(\sum_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} kA_i.$$

La intersección $A \cap B$ de dos subconjuntos es definida por:

$$(A \cap B)(x) = A(x)B(x).$$

También, definimos la intersección cuando B es un subconjunto y A es un subconjunto no ambiguo con respecto a β. En este caso se tiene que:

$$(A \cap B)(x) = \begin{cases} B(x), & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Ahora, para cada subconjunto A de X se tiene que:

$$A = \sum_{x\in X} A(x)x.$$

Esta suma está bien definida. En efecto. La familia $\{A(x)x\}_{x\in X}$ es localmente finita:

$$(A(x)x)(y) = \begin{cases} A(x), & \text{si } x = y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A $\sum_{x\in X} A(x)x$ es llamada la expansión de A (en términos de simples). Esta es una forma útil de manipular los subconjuntos. En efecto,

Ejemplo 2.7.

$$kA = \sum_{x\in X} kA(x)x \qquad A\cap B = \sum_{x\in X} A(x)B(x)x$$

Sea A un subconjunto de X y sea $X^{'}$ un subconjunto no ambiguo con respecto a β de X. Si $A(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus X^{'}$, entonces A es un subconjunto de $X^{'}$. En este caso, escribimos $A \subset X^{'}$. Finalmente, obtenemos que:

$$A \subset X^{'} \Leftrightarrow A \cap X^{'} = A.$$

Nuestro interés ahora es estudiar el producto entre dos subconjuntos de S , donde $(S, \cdot)$ es un semigrupo.

Definición 2.5. Sean $(S, \cdot)$ un semigrupo y A, B subconjuntos de S, con K completo. El subconjunto AB de S es dado por:

$$(AB)(z) = \sum_{xy=z} A(x)B(y) \tag{2.12}$$

Observación 2.2. 1. La fórmula para el producto AB, dada en la ecuación (2.12), es incluida para garantizar la bilinealidad del producto.

2. Sea $z \in S$, pueden existir infinitos pares (x, y) tales que $xy = z$. Por esta razón es necesario que K sea completo. Sin embargo, si $S = \Sigma^+$ es el semigrupo libre con base Σ (no necesariamente finito), entonces el número de factorizaciones $xy = z$ es exactamente $|z| - 1$. En consecuencia, la suma en (2.12) es finita y K por lo tanto no tiene porque ser completo. El mismo argumento se aplica si $S = \Sigma^*$.

Así, AB es bilineal. En efecto. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias de subconjuntos de S, entonces

$$\left(\sum_{i\in I} A_i\right) B = \sum_{i\in I} A_iB \qquad A\left(\sum_{j\in J} B_j\right) = \sum_{j\in J} AB_j$$

$$(kA)B = k(AB) = A(kB).$$

Además, AB es asociativa. Finalmente, si M es un monoide, entonces K^M es un semianillo (no necesariamente conmutativo) con identidad el elemento simple θ, donde θ es la identidad de M. Sean P y Q conjuntos finitos. Un subconjunto de $P\times Q$ es una matriz donde las filas y las columnas son indizadas con elementos de P y Q respectivamente, con entradas en K. Si $A \in K^{P\times Q}$, en lugar de escribir $A(p, q)$, escribiremos A_{pq} y la matriz la identificaremos como $A = [A_{pq}]$. La suma de matrices es definida usando la suma de subconjuntos. Esto es, si $B \in K^{P\times Q}$, entonces

$$(A + B)_{pq} = A_{pq} + B_{pq}$$

Una nueva operación es la multiplicación de matrices. Sean $A \in K^{P\times Q}$ y $B \in K^{Q\times R}$, el producto $AB \in K^{P\times Q}$ está definido por:

$$(A \cdot B)_{pr} = \sum_{q\in Q} A_{pq}B_{qr}.$$

Las propiedades usuales de la multiplicación son fácilmente establecidas. Si $P = Q$, entonces $K^{P\times P}$ es un semianillo con unidad 1_P, donde

$$(1_P)_{qq'} = \begin{cases} 1, & \text{si } q = q' \\ 0, & \text{si } q \neq q' \end{cases}$$

Si $A \in K^{P\times Q}$ y P es unitario, entonces A es llamado vector fila. Si Q es unitario, entonces A es llamado vector columna.

3 Autómatas finitos sobre un semianillo conmutativo

Definición 3.1. Sean Σ un alfabeto finito y K un semianillo conmutativo. Un K-autómata $\mathcal{A}$ es un quintuple

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T),$$

donde Q es un conjunto finito, I y T son subconjuntos de Q, y E es un subconjunto de $Q \times \Sigma \times Q$.

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un K-autómata. Si $E(p, \alpha, q) = k \neq 0$, entonces diremos que existe un arco de p a q que denotaremos $p \xrightarrow{k\alpha} q$ con etiqueta $k\alpha$. En este caso, también diremos que $p \xrightarrow{k\alpha} q$ está en $\mathcal{A}$.

Como en el caso de los autómatas, se consideran los caminos o trayectorias $c : p \to q$. Así, si c es un camino

$$p \xrightarrow{k_1\alpha_1} q_1 \xrightarrow{k_2\alpha_2} \cdots q_{n-1} \xrightarrow{k_n\alpha_n} q,$$

entonces su etiqueta es $|c| = ks$, con $K = k_1 \cdots k_n$ y $s = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, y su longitud es $\|c\| = n = |s|$.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un K-autómata. El comportamiento de $\mathcal{A}$ es el subconjunto de Σ^*, denotado $|\mathcal{A}|$, dado por:

$$|\mathcal{A}| = \sum_{p,q\in Q} \sum_{c} I(p)|c|T(q). \tag{3.1}$$

con c recorriendo todos los caminos $c : p \to q$; es decir,

$$|\mathcal{A}|(s) = \sum_{p,q\in Q} \sum_{k\in C} I(p)kT(q),$$

donde $C = \{k \in K : \exists c : p \to q, |c| = ks\}$.

Observación 3.1. 1. Para cada $s \in \Sigma^*$, existe solo un número finito de caminos con etiquetas ks, $k \in K$. Luego, la suma (3.1) es localmente finita y en consecuencia $|\mathcal{A}|$ está bien definido sin asumir que K sea completo.

2. Los únicos caminos con longitud 0 son los triviales, es decir, los caminos

$$c : p \longrightarrow p, \text{ con etiqueta } |c| = 1\theta.$$

En consecuencia,

$$|\mathcal{A}|(\theta) = \left(\sum_{p,q\in Q} \sum_{c} l(p)|c|T(q) \right)(\theta) = \sum_{p\in Q} I(p)T(p) = IT$$

donde IT es producto del vector fila $I = (I(p_1), \cdots, I(p_n))$ por el vector columna $\begin{pmatrix} T(p_1) \\ \vdots \\ T(p_n) \end{pmatrix}$.

El subconjunto E de $Q \times \Sigma \times Q$ es una función

$$E : Q \times \Sigma \times Q \to K.$$

Denotaremos $E(p, \alpha, q) = E_{pq}(\alpha)$. Así, para todo $p, q \in Q,\ E_{pq}$ es un subconjunto de Σ. De esta manera, E puede ser vista como una matriz

$$E : Q \times Q \to K^{\Sigma},$$

llamada matriz de transición. Cada subconjunto de Σ puede extenderse a un subconjunto de Σ^* poniendo, para $p, q \in Q$,

$$\begin{aligned} E_{pq} :& \Sigma^* \longrightarrow K, \\ E_{pq}(s) =& \begin{cases} E_{pq}(s), & \text{si } s \in \Sigma \\ 0, & \text{si } s \notin \Sigma \end{cases}. \end{aligned}$$

De manera que, E puede ser vista como un subconjunto de $Q \times Q$; es decir, como una matriz $Q \times Q$ con entradas en K^{Σ^*}. Por lo tanto, como K^{Σ^*} es un semianillo, podemos utilizar las operaciones correspondientes. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos las matrices

$$\begin{aligned} E^n :& Q \times Q \longrightarrow K^{\Sigma^*}, \\ E^0 =& 1_Q, E^1 = E, \ldots, E^n = EE^{n-1}, n \geq 2, \text{ donde} \\ E^n_{pq} =& \sum_{r \in Q} E_{pq} E^{n-1}_{rq}, \text{ con } p, q \in Q. \end{aligned}$$

Claramente, si $s \in \Sigma^*$ y $|s| \neq n$, entonces $E^n_{pq}(s) = 0$, con $p, q \in Q$. Luego, $\{E^n_{pq}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente finita. Así, podemos definir

$$E^*_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n_{pq}$$

y en consecuencia, obtenemos la matriz

$$\begin{aligned} E^* :& Q \times Q \longrightarrow K^{\Sigma^*} \\ E^* =& 1_Q + E + E^2 + \cdots + E^n + \cdots \end{aligned}$$

llamada matriz de transición extendida. Para cada $s \in \Sigma^*$, consideremos la matriz

$$E^*(s) = [E^*_{pq}(s)] \in K^{Q \times Q}.$$

Si $s = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, entonces

$$E^*(s) = E^n(s) = E(\alpha_1) \cdots E(\alpha_n) = E^*(\alpha_1) \cdots E^*(\alpha_n).$$

4 Resultados teóricos

Teorema 4.1. *Para cualesquiera $p, q \in Q$, el subconjunto E^*_{pq} es la suma de todas las etiquetas de caminos $c : p \longrightarrow q$ en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sean $p, q \in Q$, como $E^*_{pq} = \sum_{pq=1}^{\infty} E^n_{pq}$ es suficiente comprobar que E^n_{pq} es la suma de todas las etiquetas de los caminos de longitud n.

Si $n = 0$, entonces

$$E^0_{pq} = \begin{cases} \theta, & \text{si } p = q \\ \phi, & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

donde θ es la identidad de K^{Σ^*}.

Si $n = 1$, entonces

$$E^1_{pq} = \sum_{r\in Q} E_{pr}(1_Q)_{rp} = \sum_{r\in Q} E_{pr}E^0_{rq}.$$

Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$, $n \geq 2$; es decir,

$$E^{n-1}_{pq} = \sum_{r_1,\cdots,r_{n-1}\in Q} E_{pr_1}E_{r_1r_2}\cdots E_{r_{n-1}}q = \sum_{r\in Q} E_{pr}E^{n-2}_{rq}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E^n_{pq} &= \sum_{r\in Q} E_{pr}E^{n-1}_{rq} = \sum_{r_1\in Q} E_{pr_1}\left(\sum_{r_2,\cdots,r_n\in Q} E_{r_1r_2}E_{r_1r_3}\cdots E_{r_nq}\right) \\ &= \sum_{r_1,\cdots,r_n\in Q} E_{pr_1}E_{r_1r_2}\cdots E_{r_nq} = \sum_{r\in Q} E_{pr}E^{n-2}_{rq}. \end{aligned}$$

Así, E^n_{pq} es la suma de todas las etiquetas de los caminos con longitud n. Luego, E^*_{pq} es la suma de todas las etiquetas de los caminos $c : p \to q$ en $\mathcal{A}$. □

Corolario 4.1. *El comportamiento de $\mathcal{A}$ es $|\mathcal{A}| = IE^*T$, con I visto como un vector fila y T como un vector columna.*

Demostración.

$$|\mathcal{A}| = \sum_{p,q\in Q}\sum_{c} I(p)|c|T(q) = \sum_{p,q\in Q} l(p)E^*_{pq}T(q) = IE^*T.$$

□

Definición 4.1. Sean K un semianillo conmutativo y Σ un alfabeto finito. Un subconjunto A de Σ^*es llamado regular si existe un K-autómata $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}| = A$.

Cuando consideremos dos K-autómatas $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, E_A, I_A, T_A)$ y $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, E_B, I_B, T_B)$, asumiremos que $Q_A \cap Q_B = \emptyset$.

Definición 4.2. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, dos K-autómatas, el K-autómata unión de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es dado por

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (Q_{A\cup B}, \Sigma, E_{A\cup B}, I_{A\cup B}, T_{A\cup B})$$

donde, $Q_{A\cup B} = Q_A \cup Q_B$,

$$I_{A\cup B}(p) = \begin{cases} I_A(p), & \text{si } p \in Q_A \\ I_B(p), & \text{si } p \in Q_B \end{cases} \qquad T_{A\cup B}(p) = \begin{cases} T_A(p), & \text{si } p \in Q_A \\ T_B(p), & \text{si } p \in Q_B \end{cases}$$

$$E_{A\cup B}(p,\alpha,q) = \begin{cases} E_A(p,\alpha,q), & \text{si } p,q \in Q_A \\ E_B(p,\alpha,q), & \text{si } p,q \in Q_B \\ 0, & \text{en otro casob} \end{cases}$$

Observación 4.1. Un camino en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un camino en $\mathcal{A}$ o es un camino en $\mathcal{B}$.

Proposición 4.1. *La unión de dos subconjuntos regulares de Σ^* es un subconjunto regular de Σ^*.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos regulares de Σ^*, y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos K-autómatas tales que $|\mathcal{A}| = A$ y $|\mathcal{B}| = B$. Consideremos el K-autómata $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, entonces, para todo $s \in \Sigma^*$,

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|(s) = \left(\sum_{p,q \in Q_{A\cup B}} \sum_{c} I_{A\cup B}(p)|c|T_{A\cup B}(q) \right)(s) = \sum_{p,q\in Q_A\cup Q_B} \sum_{k} I_{A\cup B}(p) k T_{A\cup B}(q),$$

donde $k \in K$ es tal que existe un camino $c : p \longrightarrow q$ en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ con $|c| = ks$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|(s) &= \sum_{p,q\in Q_A} \sum_{k} I_A(p) k T_A(q) + \sum_{p,q\in Q_B} \sum_{k} I_B(p) k T_B(q) \\ &= |\mathcal{A}|(s) + |\mathcal{B}|(s) = A(s) + B(s) = (A \cup B)(s). \end{aligned}$$

Así, $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = A \cup B$. □

Definición 4.3. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos K-autómatas. El K-autómata producto (o intersección) de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es dado por $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (Q_{A\times B}, \Sigma, E_{A\times B}, I_{A\times B}, T_{A\times B})$, donde

$$\begin{aligned} Q_{A\times B} &= Q_A \times Q_B, & I_{A\times B}(p,q) &= I_A(p) I_B(q), \\ T_{A\times B}(p,q) &= T_A(p) T_B(q), & E_{A\times B}((p,q),\alpha,(p',q')) &= E_A(p,\alpha,p') E_B(q,\alpha,q'). \end{aligned}$$

Observación 4.2. Un camino $c : (p,q) \longrightarrow (p',q')$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, con etiqueta $|c| = ks$, puede ser visto como un par $c = (c', c'')$, donde $c' : p \longrightarrow p$ es un camino en $\mathcal{A}$, con $|c'| = k_1 s$ y $c'' : q \longrightarrow q'$ es un camino en $\mathcal{B}$, con $|c''| = k_2 s$, con $k_1 k_2 = k$.

Proposición 4.2. *La intersección de dos subconjuntos regulares de Σ^* es un subconjunto regular de Σ^*.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos regulares de Σ^* y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos K-autómatas tales que $|\mathcal{A}| = A$ y $|\mathcal{B}| = B$. Consideremos el K-autómata $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Entonces, para todo $s \in \Sigma^*$,

$$|\mathcal{A} \times \mathcal{B}|(s) = \left(\sum_{(p,q),(p',q') \in Q_A \times Q_B} \sum_{c} I_{A\times B}(p,q)|c|T_{A\times B}(p',q') \right)(s)$$

$$= \left(\sum_{p,p' \in Q_A; q,q' \in Q_B} \sum_{(c',c'')} I_A(p) I_B(q) |(c',c'')| T_A(p') T_B(q') \right)(s)$$

donde $c' : p \longrightarrow p'$ es un camino en$\mathcal{A}$ y $c^n : q \longrightarrow q'$ es un camino en $\mathcal{B}$,

$$= \sum_{p,p' \in Q_A; q,q' \in Q_B} \sum_{k_1,k_2} I_A(p) k_1 T_A(p') I_B(q) k_2 T_B(q')$$

$$= \sum_{p,p' \in Q_A; q,q' \in Q_B} \sum_{k_1,k_2} I_A(p) k_1 T_A(p') I_B(q) k_2 T_B(q')$$

donde $|c'| = k_1 s$, $|c''| = k_2 s$ y $k_1 k_2 = k$ con $ks = |c|$,

$$= \sum_{p,p' \in Q_A} \sum_{k_1} I_A(p) k_1 T_A(p') \sum_{q,q' \in Q_B} \sum_{k_2} I_B(q) k_2 T_B(q')$$

$$= \left(\sum_{p,p' \in Q_A} \sum_{c'} I_A(p)|c'|T_A(p') \right)(s) \left(\sum_{q,q' \in Q_B} \sum_{c''} I_B(q)|c''|T_B(q') \right)(s)$$

$$= |\mathcal{A}|(s)|\mathcal{B}|(s) = (|\mathcal{A}| \cap |\mathcal{B}|)(s) = (A \cap B)(s)$$

$\square$

Definición 4.4. Un K-autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ es llamado normalizado si $I = \{i\}$ y $T = \{t\}$ (o simplemente $I = i$ y $T = t$) son dos subconjuntos simples distintos, y no existen arcos $q \xrightarrow{k\alpha} i$, $t \xrightarrow{k\alpha} q$, con $k \neq 0$, es decir, $E(q, \alpha, i) = E(t, \alpha, q) = 0$ para todo $q \in Q$ y $\alpha \in \Sigma$.

Proposición 4.3. *Para cada K-autómata $\mathcal{A}$ existe un K-autómata normalizado $\mathcal{A}^{'}$ tal que $|\mathcal{A}^{'}| = |\mathcal{A}| \cap \Sigma^*$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un K-autómata y consideremos $Q' = Q \cup i \cup t$, donde i y t son dos nuevos estados distintos. Definimos la nueva matriz $E^{'}$ como sigue:

$$E^{'}_{pq} = E_{pq}, \quad E^{'}_{iq} = \sum_{p \in Q} l_p E_{pq}, \quad E^{'}_{pt} = \sum_{q \in Q} E_{pq} T_q, \quad E^{'}_{it} = \sum_{p,q \in Q} l_p E_{pq} T_q, \quad E^{'}_{pi} = E_{ti} = E_{tq} = \emptyset,$$

donde $l_p = I(p)$ y $T(q) = T_q$. Un cálculo simple determina que $E^{'*}_{it} = IE^+T$, donde $E^+ = E + E^2 + \cdots + E^n + \cdots = EE^*$. El K-autómata $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, E', i, t)$ es normalizado, y usando el corolario 4.1 se tiene

$$|\mathcal{A}'| = E^{'*}_{it} = IE^+T = IE^*T \cap \Sigma^+ = |\mathcal{A}| \cap \Sigma^+$$

$\square$

Proposición 4.4. *Sea A un subconjunto regular de Σ^* y sea $k \in K$, entonces kA es un subconjunto regular de Σ^*.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un K-autómata tal que $|\mathcal{A}| = A$, y sea $k \in K$. Consideremos el K-autómata $k\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, kI, T)$, donde $(kI)_q = kI_q$ (I visto como un vector fila), entonces

$$|k\mathcal{A}| = \sum_{p,q \in Q} kl_p E^*_{pq} T_q = k \sum_{p,q \in Q} l_p E^*_{pq} T_q = k|\mathcal{A}| = kA.$$

□

Proposición 4.5. *Un subconjunto A de Σ^* es regular si, y sólo si, el subconjunto $A' = A \cap \Sigma^+$ también lo es.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un K-autómata tal que $|\mathcal{A}| = A$. Entonces, existe un K-autómata (normalizado) $\mathcal{A}^{'}$ tal que $|\mathcal{A}^{'}| = |\mathcal{A}| \cap \Sigma^+ = A \cap \Sigma^+ = \mathcal{A}^{'}$. Reciprocamente, supongamos que $A \cap \Sigma^+ = A^{'}$ es un subconjunto regular de Σ^*. Como $A^{'}(\theta) = 0$ (ya que $\Sigma^+(\theta) = 0$), podemos escribir $A = k\theta + A^{'}$ donde $k = A(\theta)$. Ahora, como θ es un subconjunto regular de Σ^*, entonces por las proposiciones 4.1 y 4.4 se tiene que $\mathcal{A}$ es regular. □

Proposición 4.6. *Si A y B son subconjuntos regulares de Σ^*, entonces AB también lo es.*

Demostración. Sea $A = k\theta + A^{'}$, $B = l\theta + B^{'}$, con $A^{'} = A \cap \Sigma^+$, $B^{'} = B \cap \Sigma^+$, $k = A(\theta)$ y $l = B(\theta)$. Entonces, $AB = kl\theta + kB^{'} + lA^{'} + A^{'}B^{'}$. Basta probar que $A^{'}B^{'}$ es regular. Para esto, sean $\mathcal{A} = (Q_1, \Sigma, E_1, i_1, t_1)$ y $\mathcal{B} = (Q_2, \Sigma, E_2, i_2, t_2)$ dos K-autómatas normalizados que reconocen a $A^{'}$ y $B^{'}$ respectivamente. Consideremos el K-autómata normalizado $\mathcal{C} = (Q, \Sigma, E, i_1, t_2)$, donde Q es la unión disjunta de Q_1 y Q_2, salvo la consideración $t_1 = i_2$. Luego un arco en $\mathcal{C}$ es un arco en $\mathcal{A}$ o es un arco en $\mathcal{B}$. Así, claramente

$$|\mathcal{C}| = E^*_{i_1 t_2} = E^*_{1_{i_1 t_1}} E^*_{2_{i_2 t_2}} = |\mathcal{A}||\mathcal{B}| = A^{'}B^{'}.$$

□

Teorema 4.2. *Un subconjunto A de Σ^+ es regular si, y sólo si, existe un entero $n > 1$ y E una matriz $n \times n$ cuyas entradas son subconjuntos de Σ tal que $A = E^+_{1_n}$.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto regular de Σ^+, y sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, i, t)$ un K-autómata normalizado que reconoce a A. Sin perdida de generalidad supongamos que $Q = \{1, \cdots, n\}$, con $i = 1$ y $t = n$. Como $i \neq t$ se tiene que $n > 1$. Ahora, por el corolario 4.1 se tiene que $|\mathcal{A}| = E^*_{1_n} = E^+_{1_n} = A$. Reciprocamente, si $A = E^+_{1_n}$, donde E es una matriz $n \times n$ de subconjuntos de Σ y $n > 1$, entonces poniendo $Q = \{1, \cdots, n\}$, $I = 1$ y $T = n$, obtenemos un K-autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, l, n)$ que como antes $|\mathcal{A}| = E^+_{1_n} = A$. □

Corolario 4.2. *Si E es una matriz $n \times n$ de subconjuntos de Σ, entonces para cualesquiera $1 \leq i,\ j \leq n$, los subconjuntos E^*_{ij} y E^+_{ij} son regulares.*

Demostración. Inmediato desde el teorema 4.2 □

5 Conclusión

Si $K = \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ es un K-autómata, entonces Q es un conjunto finito, I y T son dos subconjuntos de Q , y E es un subconjunto de $Q \times \Sigma \times Q$; luego, si I, T y E son no ambiguos se sigue que $\mathcal{A}$ es un autómata finito en el sentido convencional. Así, los K-autómatas, con K un semianillo conmutativo, extienden naturalmente a los autómatas. Mas aún si A es un subconjunto regular de Σ^* con respecto a $\mathbb{N}$, existe un $\mathbb{N}$-autómata no ambiguo $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}| = A$.

Referencias

[1] Branicky, M., (1995), *Studies in hibrid systems: Modeling, analysis and control. PhD thesis, Massachusetts inst technol*, Cambridge, Dept. Elec. Fng. And computer Sci.

[2] Eilemberg, S., (1974), *Automata, languages and machines*, Vol. A. Academic Press, New York.

[3] Glasserman, P. and Yao, D., (1991), *Algebraic structure of some Discrete Event Sistems with Application.* J. On DEDS, Vol. 1.

[4] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., (1979), *Introduction to Automata theory, languages, and computation*, Addison Wesley USA.

[5] Mata, G., Ruiz, B., Camacho, C., Méndez, A., Muñoz, S., and Zambrano, H., (2018), *A planning algorithm in a class of discrete event system.* DYNA. 85(206),283-293.