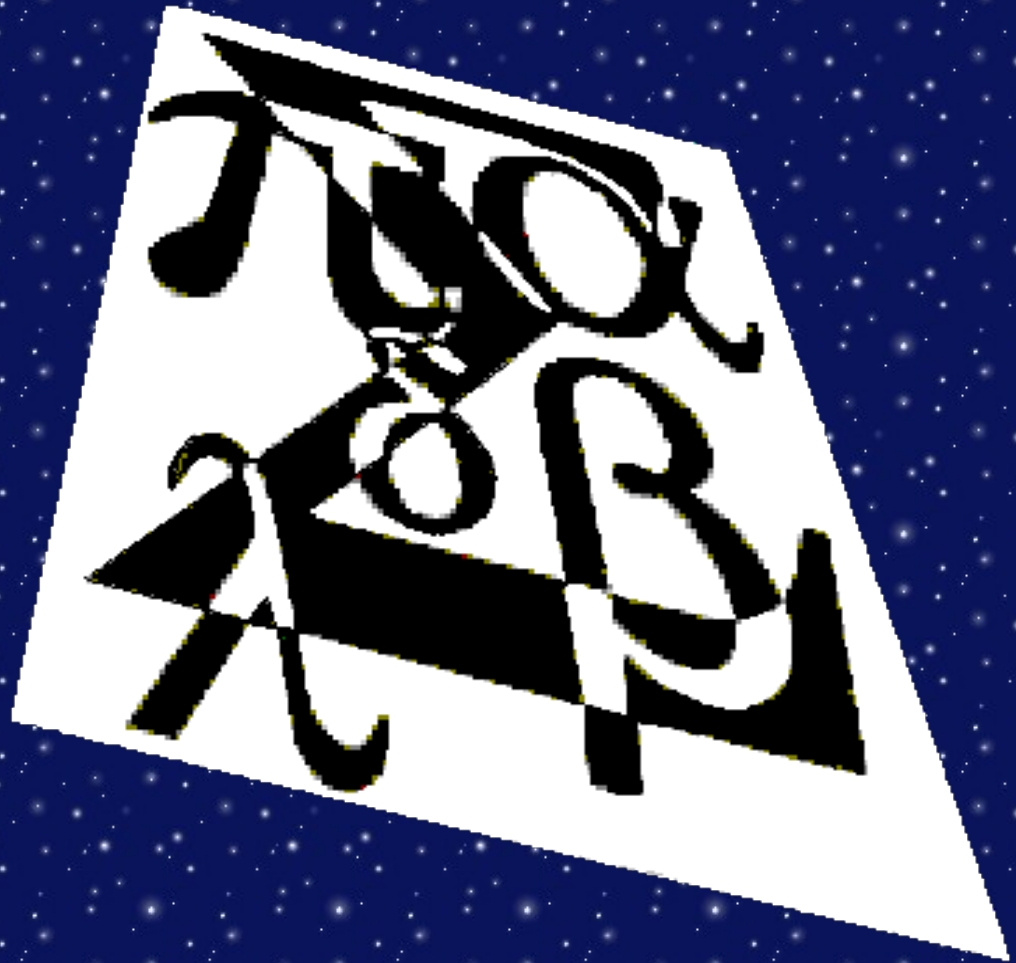




Universidad  
del Zulia

# Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392

ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Vol. 17

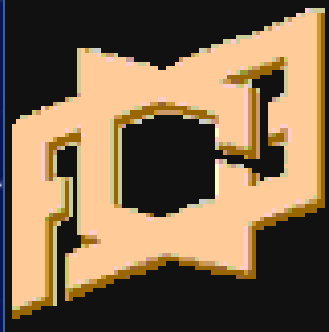
-

No. 2

-

2016

Facultad  
Experimental  
de Ciencias



# Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia  
Facultad Experimental de Ciencias  
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

## Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)      Dr. Wilson Pacheco (LUZ)  
Dr. Deivi Luzardo (LUZ)    MSc. Edixo Balzán (LUZ)

**Editor Jefe:** Dr. Alirio J. Peña P. ([apena@demat-fecluz.org](mailto:apena@demat-fecluz.org))

**Editor Adjunto:** Dr. Tobías Rosas Soto ([trosas@demat-fecluz.org](mailto:trosas@demat-fecluz.org))

**Editores Asociados:** Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

**Editores Eméritos:** MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

**Editore Fundadores:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de de Javier Adolfo Ortiz.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526  
Maracaibo, Estado Zulia  
Venezuela

Correo electrónico: [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org)

URL: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org)

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con  $\text{\LaTeX}$  y  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$  en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES  
MATEMÁTICAS

---

---

Vol. 17

2016

No. 2

---

---



# Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 17, No. 2, 2016**, volumen de reactivación de la revista. En el presente número están contenidos los artículos procesados durante el año **2016** que fueron evaluados y aceptados para su publicación.

Es importante resaltar que la revista recibió un total de 13 manuscritos, que fueron sometidos para su evaluación y posible publicación. Tres de estos trabajos no cumplían con el formato de la revista, por lo cual fueron rechazados y se invitó a los autores de los mismos a escribir los artículos usando la plantilla de la revista, sin obtener respuesta. Siete (7) manuscritos reprobaron la evaluación de los árbitros y sólo tres (3) cumplieron con los requisitos que pide la revista y aprobaron la evaluación de los árbitros respectivos. Sin embargo, a pesar de la poca cantidad de artículos, el Comité Editorial decidió publicar este número para mostrar a la comunidad matemática que la revista sigue en funcionamiento, pese a las dificultades, tratando de matener el mejor nivel de calidad posible.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado del esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de *Problemas y soluciones*. A todos, mil gracias.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* ofrece disculpas a los autores de los artículos por los posibles inconvenientes causados, debido al retraso en la publicación del presente número. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

Dr. Alirio Peña <sup>1</sup>

Dr. Tobías Rosas Soto.<sup>2</sup>

Dr. Vinicio Ríos<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>2</sup>Editor del presente número y Editor Adjunto de *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>3</sup>Editor Asociado y Miembro del Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas*

# Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 17, No. 2, 2016** reactivation volume of the journal. Articles contained in this issue are those processed during the year **2016** and were evaluated and accepted for publication.

It is important to note that the journal received a total of 13 manuscripts, which were submitted for evaluation and possible publication. Three of these articles did not comply with the format of the journal, so they were rejected and the authors were invited to write the articles using the template of the journal, without obtaining a response. Seven (7) manuscripts failed the evaluation of the referees and only three (3) complied with the requirements requested by the journal and approved the evaluation of the respective referees. However, in spite of the small number of articles, the Editorial Board decided to publish this issue to show the mathematical community that the journal is still working, despite the difficulties, is still active and makes efforts to keep the highest possible quality level.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the Problems and Solutions section. To all of them, thanks a lot.

Finally, the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* offer an apology to the authors of the articles for any inconvenience caused by the delay in the publication of this issue. In addition, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

Dr. Alirio Peña <sup>4</sup>

Dr. Tobías Rosas Soto.<sup>5</sup>

Dr. Vinicio Ríos<sup>6</sup>

---

<sup>4</sup>Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>5</sup>Editor of the present issue and Adjunct Editor of *Divulgaciones Matemáticas*

<sup>6</sup>Associate Editor and Member of the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas*

# DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 17, No. 2, 2016

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación (Research papers)

- Orthocenters of triangles in the  $n$ -dimensional space.**  
Ortocentros para triángulos en el espacio  $n$ -dimensional.  
*Horst Martini, Wilson Pacheco, Aljadis Varela, John Vargas* 1–14
- Dos teoremas de interpolación.**  
Two interpolation theorems  
*Franklin Galindo* 15–42
- Generalización del estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos.**  
Generalization of the Kaplan-Meier estimator for lifetimes fuzzy.  
*José A. González C.* 43–56

### Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

- José H. Nieto S.* (Editor) 57–59





# Orthocenters of triangles in the $n$ -dimensional space

*Ortocentros para triángulos en el espacio  $n$ -dimensional*

Horst Martini (horst.martini@mathematik.tu-chemnitz.de)  
Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz, 09107 Chemnitz, Germany

Wilson Pacheco (wpachecoredondo@gmail.com)  
Aljadis Varela (aljavare91@gmail.com)

John Vargas (varjohn@gmail.com)  
Departamento de Matemáticas  
Facultad Experimental de Ciencias  
Universidad del Zulia  
Maracaibo - Venezuela

## Abstract

We present a way to define a set of orthocenters for a triangle in the  $n$ -dimensional space  $\mathbb{R}^n$ , and we show some analogies between these orthocenters and the classical orthocenter of a triangle in the Euclidean plane. We also define a substitute of the orthocenter for tetrahedra which we call  $\mathcal{G}$ -orthocenter. We show that the  $\mathcal{G}$ -orthocenter of a tetrahedron has some properties similar to those of the classical orthocenter of a triangle.

**Key words and phrases:** orthocenter, triangle, tetrahedron, orthocentric system, Feuerbach sphere.

## Resumen

Presentamos una manera de definir un conjunto de ortocentros de un triángulo en el espacio  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , y mostramos algunas analogías entre estos ortocentros y el ortocentro clásico de un triángulo en el plano euclidiano. También definimos un sustituto del ortocentro para tetraedros que llamamos  $\mathcal{G}$ -ortocentro. Se demuestra que el  $\mathcal{G}$ -ortocentro de un tetraedro tiene algunas propiedades similares a los del ortocentro clásico de un triángulo.

**Palabras y frases clave:** ortocentro, triángulo, tetraedro, sistema ortocéntrico, esfera de Feuerbach.

## 1 Introduction

In the Euclidean plane, the *orthocenter*  $H$  of a triangle  $\triangle ABC$  is known as the unique point where the altitudes of the triangle intersect, i.e., the point at which the three lines perpendicular to

the (prolonged) sides of the triangle and passing through the opposite vertex meet. Orthocenters of triangles are closely related to many theorems of elementary geometry (see below), and their higher dimensional analogues create the interesting class of *orthocentric simplices* (see [4, 5]). If  $O$  and  $G$  are the *circumcenter* and the *centroid* of the triangle, respectively, a classical theorem of Euler asserts that  $O$ ,  $G$ , and  $H$  are collinear (creating the famous *Euler line* of the triangle) with  $|OG| = 2|GH|$ .

Another property of the orthocenter of a triangle is the following: the orthocenter is the point where concur the circles whose radii are equal to that of the circumcircle, suitably passing through two vertices of the triangle; i.e, if the circumcircle is reflected with respect to the midpoints of the sides of the triangle, then the three obtained circles concur in the orthocenter of the triangle. Since that definition of the orthocenter does not depend on the notion of orthogonality, we speak in this case about  $\mathcal{C}$ -orthocenters (where  $\mathcal{C}$  comes from "circle"). It should be noted that the concept of  $\mathcal{C}$ -orthocenters can successfully be carried over to normed planes; see [2, 6, 7, 8, 9, 10]. Moreover, by the definition of  $\mathcal{C}$ -orthocenter of a triangle, this point is the circumcenter of the triangle whose vertices are the reflections of the circumcenter at the midpoints of the sides.

If the triangle  $\triangle ABC$  is not a right triangle, then the triangles  $\triangle HBC$ ,  $\triangle AHC$ , and  $\triangle ABH$  have the points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  as orthocenters, respectively. Thus, any triangle with vertices from the set  $\{A, B, C, H\}$  has the remaining point as orthocenter, and so it makes sense to call a set of four points satisfying the above property an *orthocentric system*. Analogously, for  $\mathcal{C}$ -orthocenters we speak about a  $\mathcal{C}$ -orthocentric system. Basic references on  $\mathcal{C}$ -orthocentric systems in normed planes are [2, 6, 7, 8, 9, 10].

When we review the properties and notions related to the orthocenter (such as Euler line, Feuerbach circle,  $\mathcal{C}$ -orthocenter, orthocentric system, etc.), we realize that they essentially depend on the relationship between vertices and the circumcenter of the triangle, i.e., equidistance. In this paper we will use this idea to define an "orthocenter" associated with each point that is equidistant from the vertices of a triangle in  $n$ -dimensional space, and we will see some properties similar to those of the orthocenter in the Euclidean plane.

We will investigate notions like orthocentric systems, Euler-line properties and Feuerbach spheres of triangles and tetrahedra when embedding the starting figure into higher dimensional Euclidean space and creating important points of these systems by intersecting certain spheres. These are strongly related to the circumsphere of the starting figure. Clearly, some of our results could be obtained in a shorter way by using the ratio-invariance of a suitable parallel, or even orthogonal, projection in direction of the line connecting some point  $P$  in  $\mathbb{R}^n$  (which is equidistant to  $A, B, C$ ) and the circumcenter of the given triangle. This is particularly visible in the three-dimensional situation (see section 3.2 etc.), where the point  $H_P$  (see Theorem 3.1) is uniquely determined. It would finally yield only planar investigations. But our way via sphere intersections has some specific motivations, and we mention at least two of them. First, it opens the opportunity to speak about Monge points, orthocentric systems and Feuerbach spheres of tetrahedra also in (normed or) Minkowski spaces, a next research step in this direction. Namely, in  $\mathbb{R}^n$  the concept of usual orthogonality is obviously needed for constructing the Monge point as analogue of the orthocenter in dimensions  $n > 2$ , but does no longer hold in Minkowski spaces (see [1] and also the remarks at the end of the paper); via sphere intersections, a reasonable analogue of the Monge point can be obtained. And second we believe that our approaches are a good "exercise" in spatial geometry, helping to develop the capacity of thinking in higher dimensions and thus to stimulate a better understanding of descriptive (advanced) Elementary Geometry, useful for readers like, e.g., math teachers.

## 2 Notation and preliminaries

Let  $\mathbb{R}^n$  denote the classical  $n$ -dimensional Euclidean space, the elements of this vector space are identified with points and denoted by capital letters. If  $A$  and  $B$  are two points, then  $\overrightarrow{AB} = B - A$  is written for their difference vector, whose norm is given by  $\|B - A\|$ , and  $AB$  denotes the standard *segment* with endpoints  $A$  and  $B$ , respectively. The *length* of  $AB$  is denoted by  $|AB| = \|B - A\|$ .

A *triangle*  $\triangle A_0A_1A_2$  is determined by three non-collinear points  $A_0$ ,  $A_1$ , and  $A_2$  in the space  $\mathbb{R}^n$ . These points  $A_i$  are called *vertices* of the triangle, the segment denoted by  $a_i$  whose endpoints are the vertices other than  $A_i$  is called the *side opposite to*  $A_i$ . Denote by  $O$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $r$  and  $G$  the *circumcenter*, the *circumcircle*, the *circumradius*, and the *centroid* of the triangle  $\triangle A_0A_1A_2$ , respectively, i.e.,  $O$  is the only point in the plane determined by  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  equidistant from them, with  $r = |OA_0|$  and  $G = \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2)$ . By  $M_i$  we denote the *midpoint of the side*  $a_i$ . We also recall the *medial triangle*  $\triangle M_0M_1M_2$  of  $\triangle A_0A_1A_2$ , and denote the circumcenter of  $\triangle M_0M_1M_2$  by  $Q_O$ . Note that  $Q_O = \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - O)$ .

If  $P$  is a point of  $\mathbb{R}^n$  and  $\lambda$  is a scalar, the *homothety* with center  $P$  and ratio  $\lambda$  is the mapping  $\mathcal{H}_{P,\lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  defined by

$$\mathcal{H}_{P,\lambda}(X) = (1 - \lambda)P + \lambda X,$$

for all  $X$  in  $\mathbb{R}^n$ . The particular case  $\mathcal{H}_{P,-1}$ , also called *point reflection at*  $P$ , we will symbolize by  $\mathcal{S}_P$ .

For the triangle  $\triangle A_0A_1A_2$ , the orthocenter  $H$  is expressed as a function of the circumcenter  $O$  and the vertices of the triangle by the formula  $H = A_0 + A_1 + A_2 - 2O$ , and it is not difficult to see that  $H$  is the circumcenter of the triangle  $\triangle B_0B_1B_2$ , where  $B_i$  is the point symmetric to  $O$  with respect to  $M_i$  for  $i = 0, 1, 2$ ; i.e,  $B_i = A_j + A_k - O$ . The points  $B_0$ ,  $B_1$ , and  $B_2$  are the circumcenters of the triangles  $\triangle HA_1A_2$ ,  $\triangle A_0HA_2$ , and  $\triangle A_0A_1H$ , respectively; the circumcircles of these triangles are denoted by  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$  and  $\mathcal{C}_2$ , respectively. All of them have radius  $r$ . The triangles  $\triangle A_0A_1A_2$  and  $\triangle B_0B_1B_2$  are symmetric to each other, and in [8] the triangle  $\triangle B_0B_1B_2$  is called the *antitriangle* of  $\triangle A_0A_1A_2$  associated to  $O$ . The center of symmetry of the union of both triangles is the point  $Q_O$ .

The following list contains some of the properties satisfied by the orthocenter (see Figure 1).

1. The points  $O$ ,  $G$ , and  $H$  are collinear, with  $G$  in between, and  $2|OG| = |GH|$  (the *Euler-line property*).
2. If  $N_0$ ,  $N_1$ , and  $N_2$  are the midpoints of the sides of the triangle  $\triangle B_0B_1B_2$ , the circle with center  $Q_O$  and radius  $\frac{r}{2}$  (called the *Feuerbach circle* of  $\triangle A_1A_2A_3$ ) passes through the points  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_0$ ,  $N_1$ , and  $N_2$ . It also passes through the midpoints of the segments that join  $H$  with the points of the circumcircle of  $\triangle A_0A_1A_2$ , and through the midpoints of the segments that join  $O$  with the points of the circumcircle of  $\triangle B_0B_1B_2$ .
3. The points  $O$ ,  $Q_O$ ,  $G$ , and  $H$  form a *harmonic quadruple*, satisfying  $\frac{|OG|}{|GQ_O|} = \frac{|OH|}{|HQ_O|} = 2$ .
4. The following sets:  $\{A_0, A_1, A_2, H\}$ ,  $\{B_0, B_1, B_2, O\}$ ,  $\{M_0, M_1, M_2, O\}$ ,  $\{N_0, N_1, N_2, H\}$ , and  $\{G_0, G_1, G_2, G\}$ , where  $G_0$ ,  $G_1$ , and  $G_2$  are the centroids of the triangles  $\triangle HA_1A_2$ ,  $\triangle A_0HA_2$ , and  $\triangle A_0A_1H$ , respectively, are *orthocentric systems*.

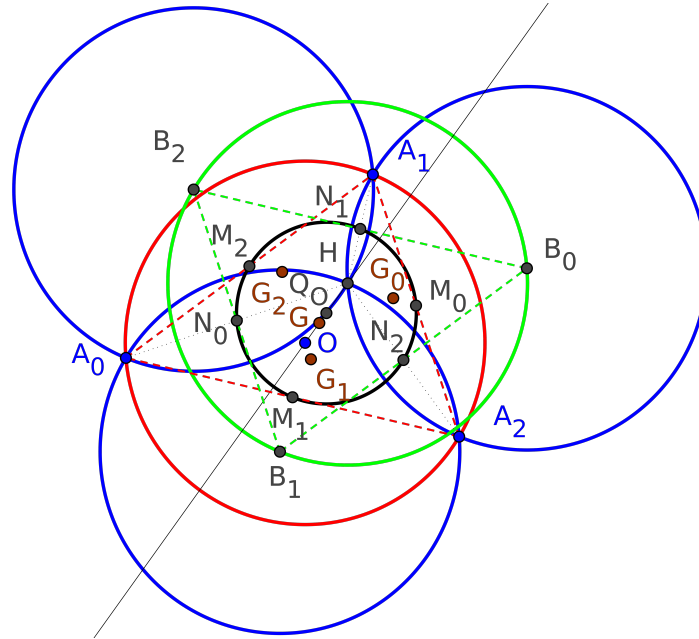


Figure 1: Properties of the orthocenter

5. If  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  is an orthocentric system, then  $\overrightarrow{A_i A_j} \perp \overrightarrow{A_k A_l}$ , for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ , i.e., the vectors  $\overrightarrow{A_i A_j}$  and  $\overrightarrow{A_k A_l}$  are *orthogonal* to each other.

### 3 Results

We present now new results on orthocentric systems introduced for triangles in  $\mathbb{R}^n$ . More precisely, using points being equidistant to the vertices of the triangles, we will define orthocenters for triangles embedded into  $\mathbb{R}^n$ , and we compare them with the classical notion of orthocenter. We will see that this machinery allows to define a substitute of the orthocenter for tetrahedra, yielding further interesting analogies to the classical orthocenter of a triangle. All the figures that appear below, illustrate what happens in the three-dimensional case.

#### 3.1 Orthocenters of triangles in $\mathbb{R}^n$

Given three non-collinear points  $A_0, A_1, A_2$  in the Euclidean plane, there is only one point that is equidistant from them, being precisely the circumcenter of the triangle  $\triangle A_0 A_1 A_2$ . However, if the points  $A_0, A_1, A_2$  are embedded in  $n$ -dimensional space  $\mathbb{R}^n$ , then the set of points equidistant from  $A_0, A_1$ , and  $A_2$  forms an  $(n - 2)$ -dimensional affine subspace, which we denote by  $\mathcal{C}(\triangle A_0 A_1 A_2)$ . Each point of this subspace is the center of an  $(n - 1)$ -dimensional sphere passing through the points  $A_0, A_1$ , and  $A_2$ . The following theorem allows us to introduce the notion of

an “orthocenter” associated with each point in  $\mathcal{C}(\Delta A_0A_1A_2)$ , and provides a generalization of the common notion of  $\mathcal{C}$ -orthocenter in the plane.

**Theorem 3.1.1.** *Let  $\Delta A_0A_1A_2$  be a triangle in  $\mathbb{R}^n$ ,  $G$  be its centroid and  $H$  its orthocenter. If  $P \in \mathcal{C}(\Delta A_0A_1A_2)$  and  $\mathcal{S}$  is the  $(n - 1)$ -dimensional sphere with center  $P$  passing through the points  $A_0, A_1$ , and  $A_2$  and having radius  $r$ , then the spheres  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$  that are symmetric to  $\mathcal{S}$  with respect to the midpoints  $M_0, M_1$ , and  $M_2$  of the sides of the triangle  $\Delta A_0A_1A_2$  concur in a quadratic variety of dimension  $n - 3$  and, in particular, in the points  $H$  and  $H_P = A_0 + A_1 + A_2 - 2P$ . Furthermore, the following assertions hold:*

1. *If  $B_0, B_1$ , and  $B_2$  are the centers of  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$  and  $\mathcal{S}_2$ , respectively, then the triangles  $\Delta A_0A_1A_2$  and  $\Delta B_0B_1B_2$  are symmetric to each other with respect to the point  $Q_P = \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - P)$ .*
2. *The points  $P, G$ , and  $H_P$  are collinear having  $G$  between  $P$  and  $H_P$ , with  $2|PG| = |GH_P|$  (the Euler-line property).*
3. *If  $N_0, N_1$ , and  $N_2$  are the midpoints of the sides of the triangle  $\Delta B_0B_1B_2$ , the  $(n - 1)$ -dimensional sphere  $\mathcal{S}_M$  with center  $Q_P$  and radius  $\frac{r}{2}$  passes through the points  $M_0, M_1, M_2, N_0, N_1$ , and  $N_2$ . It also passes through the midpoints of the segments that join  $H_P$  with the points of  $\mathcal{S}$ , and the midpoints of the segments that join  $O$  with the points of the  $(n - 1)$ -dimensional sphere  $\mathcal{S}_H$  with center  $H_P$  and radius  $r$  (the Feuerbach sphere associated to  $P$ ).*
4. *The points  $P, Q_P, G$ , and  $H_P$  form a harmonic quadruple satisfying  $\frac{|PG|}{|GQ_P|} = \frac{|PH_P|}{|H_PQ_P|} = 2$ .*

*Proof.* Since the circumcircles  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ , and  $\mathcal{C}_2$  are included in  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ , and  $\mathcal{S}_2$ , respectively, then the point  $H$  is in the spheres  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ , and  $\mathcal{S}_2$ . In order to see that  $H_P = A_0 + A_1 + A_2 - 2P$  is in  $\mathcal{S}_i$ , it is enough to take a look at  $|H_P B_i| = r$ , for  $i = 0, 1, 2$ , where  $B_i$  is the center of  $\mathcal{S}_i$ . Note that  $B_i = A_j + A_k - P$ , for  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ , from which we get

$$|H_P B_i| = \|(A_j + A_k - P) - (A_0 + A_1 + A_2 - 2P)\| = \|P - A_i\| = r.$$

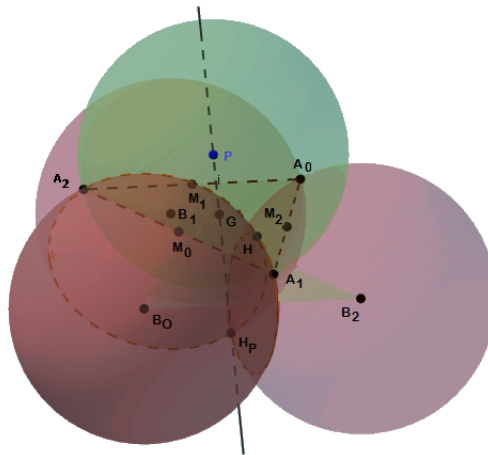


Figure 2: The orthocenter for a triangle in 3-dimensional space

1. Note that  $A_i + B_i = A_i + A_j + A_k - P$ , where  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ . Therefore, the midpoint of  $A_i B_i$  is  $Q_P = \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - P)$ , for  $i = 0, 1, 2$ .
2. Since  $2(G - P) = \frac{2}{3}(A_0 + A_1 + A_2 - 3P) = \frac{2}{3}(H_P - P) = H_P - G$ , it follows that  $P$ ,  $G$ , and  $H_P$  are collinear and  $2|PG| = |GH_P|$ .
3. By item 1. we know that  $\mathcal{S}_{Q_P}(\triangle A_0 A_1 A_2) = \triangle B_0 B_1 B_2$ , from which  $\mathcal{S}_{Q_P}(M_i) = N_i$  for  $i = 0, 1, 2$  is obtained. For the first part it only remains to show that  $|M_i Q_P| = \frac{r}{2}$ , for  $i = 0, 1, 2$ . Indeed,

$$\begin{aligned} |M_i Q_P| &= \left\| \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - P) - \frac{1}{2}(A_j + A_k) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|A_i - P\| = \frac{r}{2} \end{aligned}$$

for  $i = 0, 1, 2$ .

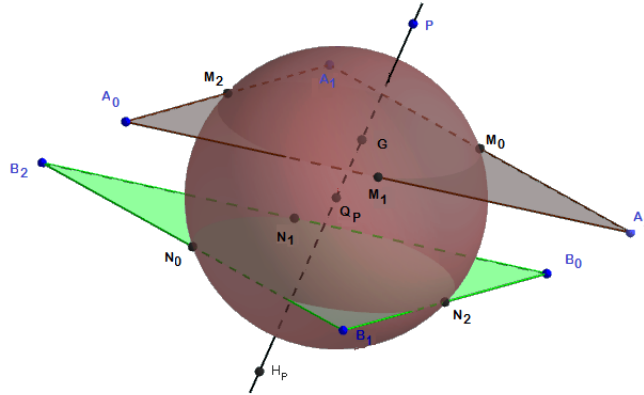


Figure 3: Triangle, antitriangle and Feuerbach sphere

For the second part note that  $\mathcal{H}_{H_P, \frac{1}{2}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_M$  and  $\mathcal{H}_{P, \frac{1}{2}}(\mathcal{S}_H) = \mathcal{S}_M$ , which implies the assertion.

4. Since 2. holds,  $|PG| = \frac{1}{3}|PH_P|$ . On the other hand,

$$\begin{aligned} |GQ_P| &= \left\| \left( \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - P) - \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2) \right) \right\| \\ &= \frac{1}{6} \|(A_0 + A_1 + A_2 - 3P)\| = \frac{1}{6}|PH_P| \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} |Q_P H_P| &= \left\| \left( (A_0 + A_1 + A_2 - 2P) - \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - P) \right) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|(A_0 + A_1 + A_2 - 3P)\| = \frac{1}{2}|PH_P|. \end{aligned}$$

Our statement follows from the above relations. □

We call the point  $H_P$  the *orthocenter of the triangle*  $\triangle A_0A_1A_2$  *associated to*  $P$ , and the set of all these orthocenters is denoted by  $\mathcal{H}(\triangle A_0A_1A_2)$ . The above theorem says that the Euler property is satisfied, i.e.,

$$\mathcal{H}_{G, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(\triangle A_0A_1A_2)) = \mathcal{H}(\triangle A_0A_1A_2).$$

Furthermore, the orthocenter of the triangle  $\triangle H_P A_i A_j$  associated to  $B_k$  is the point  $A_k$ , where  $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ . Thus, the notion of orthocentric system can be generalized to  $n$ -dimensional space, and we say that a set of four points  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  is an *orthocentric system* if there is a point  $P \in \mathcal{C}(\triangle A_0A_1A_2)$  such that  $A_3 = A_0 + A_1 + A_2 - 2P$ . We will see that the properties of orthocentric systems in the plane, previously listed, are also valid in this context. The following trivial, but useful, lemma is used for this purpose. In addition, this one is a generalization of Theorem 3.4 present in [10], which has a similar demonstration.

**Lemma 3.1.2.** *The homothetic image of a orthocentric system in  $\mathbb{R}^n$  is a orthocentric system.*

*Proof.* Let  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  be a orthocentric system, then there exists  $P \in \mathcal{C}(\triangle A_0A_1A_2)$  such that  $A_3 = A_0 + A_1 + A_2 - 2P$ .

Let  $B_i = \mathcal{H}_{C, \lambda}(A_i)$ , for  $i = 0, 1, 2, 3$ , and  $R = \mathcal{H}_{C, \lambda}(P)$ . Clearly,  $R \in \mathcal{C}(\triangle B_0B_1B_2)$  and

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 + B_2 - 2R &= ((1 - \lambda)C + \lambda A_0) + ((1 - \lambda)C + \lambda A_1) \\ &\quad + ((1 - \lambda)C + \lambda A_2) - 2((1 - \lambda)C + \lambda P) \\ &= (1 - \lambda)C + \lambda(A_0 + A_1 + A_2 - 2P) \\ &= (1 - \lambda)C + \lambda A_3 = B_3, \end{aligned}$$

which completes the proof. □

**Theorem 3.1.3.** *Let  $\triangle A_0A_1A_2$  be a triangle in  $\mathbb{R}^n$ ,  $G$  its centroid,  $P \in \mathcal{C}(\triangle A_0A_1A_2)$ , and  $H_P$  its orthocenter associated to  $P$ . Then the sets of points  $\{A_0, A_1, A_2, H_P\}$ ,  $\{B_0, B_1, B_2, P\}$ ,  $\{M_0, M_1, M_2, O\}$ ,  $\{N_0, N_1, N_2, H_P\}$  and  $\{G_0, G_1, G_2, G\}$  are orthocentric systems, where  $G_0, G_1$  and  $G_2$  are the centroids of the triangles  $\triangle H_P A_1 A_2$ ,  $\triangle A_0 H_P A_2$ , and  $\triangle A_0 A_1 H_P$ , respectively.*

*Proof.* We know that  $M_i = \mathcal{H}_{G, -\frac{1}{2}}(A_i)$ , for  $i = 0, 1, 2, 3$ , and  $\mathcal{H}_{G, -\frac{1}{2}}(H_P) = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H_P = P$ , from which  $\{M_0, M_1, M_2, P\} = \mathcal{H}_{G, -\frac{1}{2}}(\{A_0, A_1, A_2, H_P\})$  follows.

If  $Q_P = \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 - P)$ , then  $\mathcal{S}_{Q_P}(P) = H_P$ . Thus,

$$\mathcal{S}_{Q_P}(\{A_0, A_1, A_2, H_P\}) = \{H_0, H_1, H_2, P\},$$

and

$$\mathcal{S}_{Q_P}(\{M_0, M_1, M_2, P\}) = \{N_0, N_1, N_2, H_P\}.$$

Finally,  $G_i = \frac{1}{3}(A_i + 2A_j + 2A_k - 2P)$ , from which we get

$$\mathcal{H}_{Q_P, -\frac{1}{3}}(A_i) = \frac{4}{3}Q_P - \frac{1}{3}A_i = \frac{2}{3}(A_0 + A_1 + A_2 - P) - \frac{1}{3}A_i = G_i,$$

for  $i = 0, 1, 2, 3$ , and

$$\mathcal{H}_{Q_P, -\frac{1}{3}}(H_P) = \frac{4}{3}Q_P - \frac{1}{3}H_P = \frac{2}{3}(A_0 + A_1 + A_2 - P) - \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2 - 2P) = G.$$

Thus,  $\mathcal{H}_{Q_P, -\frac{1}{3}}(\{A_0, A_1, A_2, H_P\}) = \{G_0, G_1, G_2, G\}$ . □

**Theorem 3.1.4.** *If  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  is an orthocentric system in  $\mathbb{R}^n$ , then the sets  $\{\overrightarrow{A_i A_j}, \overrightarrow{A_k A_l}\}$  are orthogonal, for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ .*

*Proof.* Since usual orthogonality in  $\mathbb{R}^n$  is equivalent to isosceles orthogonality (see [1]), we just need to see that  $\|\overrightarrow{A_i A_j} - \overrightarrow{A_k A_l}\| = \|\overrightarrow{A_i A_j} + \overrightarrow{A_k A_l}\|$ .

Indeed, consider the case  $i = 0, j = 1, k = 2, l = 3$ . Let  $P \in \mathcal{C}(\triangle A_0 A_1 A_2)$  be such that  $A_3 = A_0 + A_1 + A_2 - 2P$  and  $r$  is the radius of the sphere with center  $P$  passing through  $A_0, A_1$ , and  $A_2$ . Then

$$\|\overrightarrow{A_0 A_1} - \overrightarrow{A_2 A_3}\| = \|(A_1 - A_0) - (A_3 - A_2)\| = \|2(P - A_0)\| = 2r$$

and

$$\|\overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_2 A_3}\| = \|(A_1 - A_0) + (A_3 - A_2)\| = \|2(A_1 - P)\| = 2r.$$

The other cases can be shown analogously. □

The above theorem tells us also that if  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  is an orthocentric system and  $A_3$  is not in the plane determined  $A_0, A_1$ , and  $A_2$ , then the tetrahedron  $A_0 A_1 A_2 A_3$  is an orthocentric tetrahedron, i.e, the altitudes of this tetrahedron concur. For properties of orthocentric tetrahedra and simplices we refer to [4, 5].

Conversely, if  $A_0 A_1 A_2 A_3$  is an orthocentric tetrahedron and consider the points  $B_i$  defined by  $B_i = \frac{1}{2}(A_j + A_k + A_l - A_i)$ , where  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ . Then, by using the orthogonality of opposite sides, it is not difficult to see that  $B_i \in \mathcal{C}(\triangle A_j A_k A_l)$ , and the orthocenter of the triangle  $\triangle A_j A_k A_l$  associated to  $B_i$  is  $A_i$ .

Note that

$$\begin{aligned} Q_{B_i} &= \frac{1}{2}(A_j + A_k + A_l - B_i) \\ &= \frac{1}{2}\left(A_j + A_k + A_l - \frac{1}{2}(A_j + A_k + A_l - A_i)\right) \\ &= \frac{1}{4}(A_i + A_j + A_k + A_l), \end{aligned}$$

i.e.,  $Q_{B_i}$  is the centroid  $G$  of the tetrahedron  $A_0 A_1 A_2 A_3$ , and the Feuerbach sphere of the triangle associated to  $B_i$  is the *Feuerbach sphere of second kind* of the orthocentric tetrahedron  $A_0 A_1 A_2 A_3$ , i.e., the sphere passing through the midpoints of the edges of  $A_0 A_1 A_2 A_3$ .

On the other hand, the tetrahedra  $A_0 A_1 A_2 A_3$  and  $B_0 B_1 B_2 B_3$  are symmetric with respect to  $G$ . Thus  $G$  is also the centroid of the tetrahedron  $B_0 B_1 B_2 B_3$ . As well, the Feuerbach spheres of second kind of the tetrahedra  $A_0 A_1 A_2 A_3$  and  $B_0 B_1 B_2 B_3$  coincide. In addition, the circumcenter of the tetrahedron  $B_0 B_1 B_2 B_3$  is the orthocenter of the tetrahedron  $A_0 A_1 A_2 A_3$ .



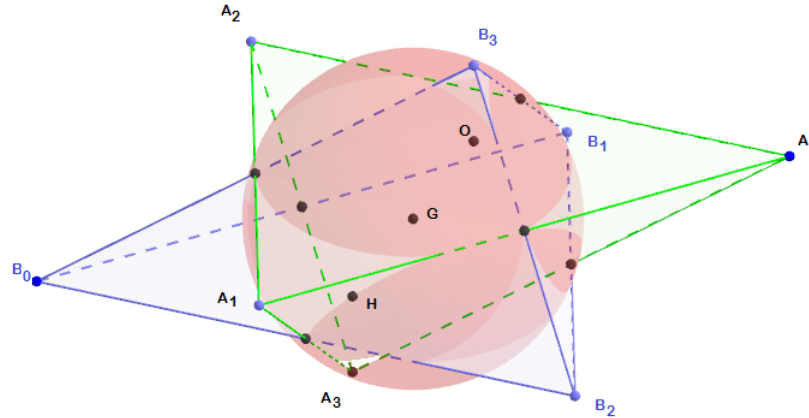


Figure 4: Orthocentrics tetrahedra  $A_0A_1A_2A_3$  and  $B_0B_1B_2B_3$  and Feuerbach spheres of second kind

This point gives rise to underline a nice analogy between the orthocenter of a triangle and the orthocenter of an orthocentric tetrahedron. The first one is the intersection of three circles, with radii equal to its circumradius, whose centers are equidistant to the vertices of the corresponding triangle side, in each case. And for the orthocentric tetrahedron, the orthocenter is the intersection of four spheres whose radii are equal to the circumradius of the tetrahedron, and whose centers are points equidistant to the three vertices of the respective tetrahedral face, in each case. In the latter case the spheres involved do not necessarily pass through the corresponding vertices of the tetrahedron, but those which contain the vertices of their corresponding face have radius equal to twice the radius of the Feuerbach sphere of second kind of the orthocentric tetrahedron. We continue with results of this type in our next subsection.

### 3.2 Another orthocenter and Feuerbach spheres of tetrahedra

Recall that in a tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$ , the six planes perpendicular to the edges passing through their midpoints meet in a point called the *Monge point*  $M$  of  $A_0A_1A_2A_3$ . Properties of Monge points can be found in classical books on solid geometry, and in [3] and [5]. If  $O$  and  $G$  are the *circumcenter* and the *centroid* of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$ , respectively, then  $G$  is the midpoint of the segment with endpoints  $O$  and  $M$ , and therefore  $M = \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - 2O)$ . The following results were inspired by results on cyclic quadrangles presented in [6, 5].

**Theorem 3.2.1.** *Let  $A_0A_1A_2A_3$  be a tetrahedron,  $O$  its circumcenter,  $r$  its circumradius and  $M$  its Monge point. If  $C_0C_1C_2C_3$  is the tetrahedron formed by the orthocenters of the faces of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  with respect to  $O$  (i.e.,  $C_i = A_j + A_k + A_l - 2O$ , for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ), then*

1.  $A_0A_1A_2A_3$  and  $C_0C_1C_2C_3$  are symmetric with respect to  $M$ , i.e., for  $i = 0, 1, 2, 3$  we have  $\mathcal{S}_M(A_i) = C_i$ . In particular,  $A_i - A_j = C_j - C_i$  for  $\{i, j\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$ ,
2.  $\{C_i, C_j, C_k, A_l\}$  is an orthocentric system.
3.  $\{C_i, C_j, A_k, A_l\}$  lie on a sphere with radius  $r$ .

*Proof.* For the first assertion, notice that for each  $i = 0, 1, 2, 3$  we have

$$\frac{1}{2}(A_i + C_i) = \frac{1}{2}(A_i + A_j + A_k + A_l - 2O) = M,$$

where  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ . This proves that  $M$  is the midpoint of the segments with endpoints  $A_i$  and  $B_i$ , respectively.

For the second assertion we note that

$$\mathcal{S}_M(\{A_i, A_j, A_k, C_l\}) = \{C_i, C_j, C_k, A_l\},$$

and  $\{A_i, A_j, A_k, C_l\}$  is an orthocentric system. By the Lemma 2, also  $\{C_i, C_j, C_k, A_l\}$  is an orthocentric system.

Finally, it is not difficult to see that the sphere with center  $A_k + A_l - O$  and radius  $r$  contains the points  $\{C_i, C_j, A_k, A_l\}$ .  $\square$

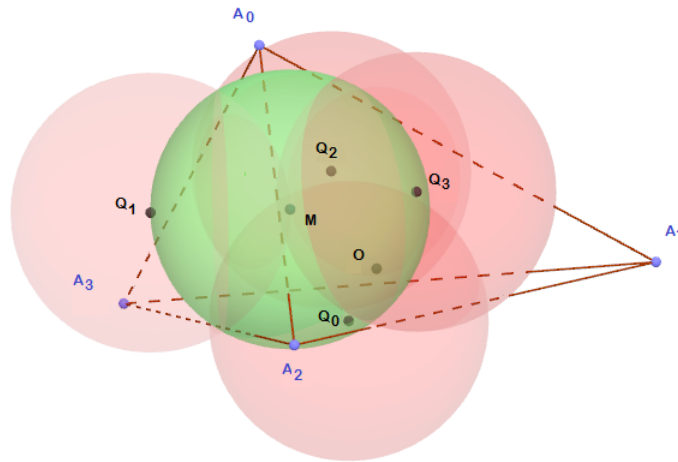


Figure 5: Feuerbach spheres of a tetrahedron

It is clear that the circumsphere of the tetrahedron  $C_0C_1C_2C_3$  also has radius  $r$ , and that its center  $H_{\mathcal{G}}$  (which we will call  $\mathcal{G}$ -orthocenter of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$ ) is symmetric to  $O$  with respect to  $M$ . Note that  $H_{\mathcal{G}}$  can be expressed by the vertices of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  and its circumcenter  $O$  via  $H_{\mathcal{G}} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - 3O$ . The tetrahedron  $C_0C_1C_2C_3$  we will call the *antitetrahedron* of  $A_0A_1A_2A_3$ . We will see that  $H_{\mathcal{G}}$  has properties similar to those of the orthocenter of a triangle. For general orthocentric tetrahedra,  $H_{\mathcal{G}}$  does not coincide with

the orthocenter  $H$ . This holds only if the centroid  $G$  and the circumcenter  $O$  of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  coincide. The following theorem is analogous to Theorem 4.8 in [6], and will define a new Feuerbach sphere for tetrahedra analogous to the Feuerbach circle of cyclic quadrangles studied in [6].

**Theorem 3.2.2.** *Let  $A_0A_1A_2A_3$  be a tetrahedron,  $O$  its circumcenter,  $r$  its circumradius, and  $M$  its Monge point. Then the four Feuerbach spheres of the faces of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  associated to  $O$  intersect in  $M$ . In addition, if  $Q_i$  is the center of the Feuerbach sphere of the face  $A_jA_kA_l$  associated to  $O$ , for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ , then  $M - Q_i = \frac{1}{2}(A_i - O)$ .*

*Proof.* Recall that

$$Q_i = \frac{1}{2}(A_j + A_k + A_l - O),$$

for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ , and

$$M = \frac{1}{2}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - 2O).$$

We get immediately  $M - Q_i = \frac{1}{2}(A_i - O)$ , and the proof is done.  $\square$

The relation between the Monge point and the Feuerbach spheres of the faces of the tetrahedron associated to the circumcenter of the tetrahedron, offers an alternative way to define the Monge point, without using orthogonality.

In the case of a cyclic quadrangle, the circle that passes through the centers of the Feuerbach circles of the triangles determined by the vertices of the quadrangle, is called the *Feuerbach circle of the quadrangle*. For that reason, we propose to call the sphere with center  $M$  and radius  $r/2$  the *Feuerbach sphere of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$* . In the planar case, the Feuerbach circle of a triangle coincides with the Feuerbach circle of its antitriangle. The existing symmetry between the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  and its antitetrahedron  $C_0C_1C_2C_3$  ensures the following corollary of the previous theorem, which is the analogue of Theorem 4.14 in [6].

**Corollary 3.2.3.** *The Feuerbach spheres of a tetrahedron and its antitetrahedron coincide.*

Furthermore, we easily get

**Corollary 3.2.4.** *The Feuerbach sphere of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  contains the midpoints of the segments that join the  $\mathcal{G}$ -orthocenter  $H_G$  with the points of the circumsphere  $S$  of the tetrahedron, and the midpoints of the segments that join the circumcenter  $O$  of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  with the points of the circumsphere  $S_1$  of the antitetrahedron  $C_0C_1C_2C_3$ .*

*Proof.* The proof is straightforward since  $\mathcal{H}_{O, \frac{1}{2}}(H_G) = M$  and  $\mathcal{H}_{H_G, \frac{1}{2}}(O) = M$ .  $\square$

The following theorem shows further analogues between the notions of  $\mathcal{G}$ -orthocenter of a tetrahedron and orthocenter of a triangle. Recall that the *Feuerbach spheres of first kind* of a tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  is the circumspheres of the tetrahedron with vertices in the centroids of the faces of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$ .

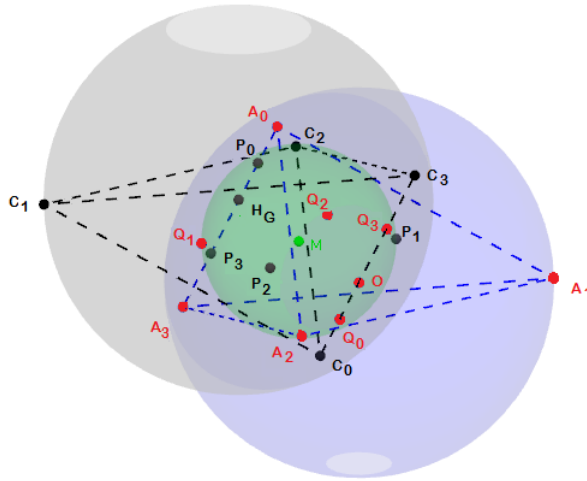


Figure 6: Circumspheres and Feuerbach spheres of a tetrahedron and its antitetrahedron

**Theorem 3.2.5.** *Let  $A_0A_1A_2A_3$  be a tetrahedron,  $O$  its circumcenter,  $G$  its centroid,  $C_0C_1C_2C_3$  the antitetrahedron associated to  $O$ ,  $H_G$  its  $\mathcal{G}$ -orthocenter,  $S_1$  the circumsphere of  $A_0A_1A_2A_3$ ,  $S_2$  the circumsphere of  $C_0C_1C_2C_3$ ,  $S_3$  and  $S_4$  the Feuerbach spheres of first kind of the tetrahedra  $A_0A_1A_2A_3$  and  $C_0C_1C_2C_3$ , respectively. Then*

1.  $O$ ,  $G$  and  $H_G$  are collinear, with  $G$  between  $O$  and  $H_G$  and  $3|OG| = |GH_G|$  (Euler-line property).
2.  $S_4 = \mathcal{H}_{H_G, \frac{1}{3}}(S_1)$  and  $S_3 = \mathcal{H}_{O, \frac{1}{3}}(S_2)$ .

*Proof.* The first assertion is immediate by the definitions of  $G$  and  $H_G$ .

For the second assertion, recall that the centers of the spheres  $S_3$  and  $S_4$  are the points

$$Q = \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - O)$$

and

$$Q_1 = \frac{1}{3}(C_0 + C_1 + C_2 + C_3 - H_G) = \frac{2}{3}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) - \frac{5}{3}O,$$

respectively. It is enough to see that  $\mathcal{H}_{H_G, \frac{1}{3}}(O) = Q_1$  and  $\mathcal{H}_{O, \frac{1}{3}}(H_G) = Q$ . Indeed,

$$\mathcal{H}_{H_G, \frac{1}{3}}(O) = \frac{2}{3}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - 3O) + \frac{1}{3}O = Q_1$$

and

$$\mathcal{H}_{O, \frac{1}{3}}(H_G) = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H_G = \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - O) = Q.$$

□

The previous theorem shows that the ratio in which  $G$  divides the segment  $OH$  is equal to the ratio in which  $G$  divides every median of the tetrahedron. The points  $O$ ,  $Q$ ,  $G$ , and  $H_G$  do not form a harmonic quadruple, but they satisfy the following relations:

$$3(G - Q) = O - \frac{1}{4}(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = O - G$$

$$-4(O - G) = 4O + (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = H_G - O.$$

In case of a triangle  $\triangle A_0A_1A_2$  we know that the homotheties  $\mathcal{H}_{O, \frac{1}{2}}$  and  $\mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}$  transform the circumcircles of the antitriangle  $\triangle B_0B_1B_2$  associated to  $O$  and of the triangle  $\triangle A_0A_1A_2$  into the Feuerbach circles of the triangle  $\triangle A_0A_1A_2$  and the antitriangle  $\triangle B_0B_1B_2$ , respectively. In this case, additionally both circumcircles coincide. The previous theorem shows that the analogue for the tetrahedron is valid with the notion of Feuerbach sphere of first kind. In particular, we have

**Corollary 3.2.6.** *Let  $A_0A_1A_2A_3$  be a tetrahedron,  $O$  its circumcenter,  $H_G$  its  $\mathcal{G}$ -orthocenter,  $C_0C_1C_2C_3$  the antitetrahedron associated to  $O$ ,  $S_1$  the circumsphere of  $A_0A_1A_2A_3$ ,  $S_2$  the circumsphere of  $C_0C_1C_2C_3$ ,  $S_3$  and  $S_4$  the Feuerbach spheres of first kind of the tetrahedra  $A_0A_1A_2A_3$  and  $C_0C_1C_2C_3$ , respectively. Then the following statements hold.*

1. *The points  $Y$  of the segments that join  $O$  with the points  $X$  of the circumsphere  $S_2$  of the antitetrahedron such that  $|YO| = \frac{1}{3}|XO|$  belong to  $S_3$ .*
2. *The points  $Z$  of the segments that join  $H_G$  with the points  $W$  of the circumsphere  $S_1$  of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  such that  $|ZH_G| = \frac{1}{3}|WH_G|$  lie in  $S_4$ .*

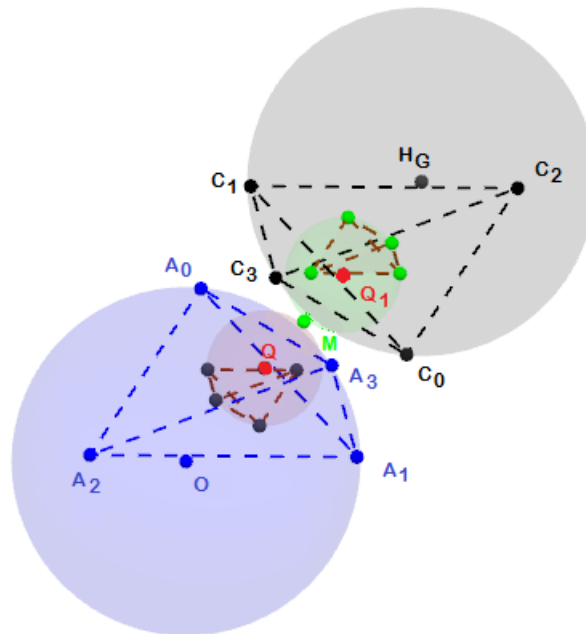


Figure 7: Circumspheres and Feuerbach spheres of first kind of a tetrahedron and its antitetrahedron

On the other hand, the circumcenter  $O$  of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  is the  $\mathcal{G}$ -orthocenter of the following tetrahedra: the antitetrahedron  $C_0C_1C_2C_3$ ; the medial tetrahedron  $M_1M_2M_3M_4$  consisting of the centroids of the faces of  $A_0A_1A_2A_3$  (i.e.,  $M_i = \frac{1}{3}(A_j + A_k + A_l)$  for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ); and the tetrahedron  $Q_0Q_1Q_2Q_3$  formed by the centers of the Feuerbach spheres of the faces of the tetrahedron associated to  $O$ . Moreover, it is not difficult to see that for the homothety  $\mathcal{H}_{P,\lambda}$  the points  $P_i = \mathcal{H}_{P,\lambda}(A_i)$  for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ , where  $A_0A_1A_2A_3$  is a tetrahedron and  $H_{\mathcal{G}}$  is its  $\mathcal{G}$ -orthocenter. Then  $\mathcal{H}_{P,\lambda}(H_{\mathcal{G}})$  is the  $\mathcal{G}$ -orthocenter of the tetrahedron  $P_0P_1P_2P_3$ . As a consequence of all this we get that if  $G_i$  are the centroids of the tetrahedra  $A_jA_kA_lH_G$  for  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ , then the  $\mathcal{G}$ -orthocenter of the tetrahedron  $G_0G_1G_2G_3$  is the centroid  $G$  of the tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$ .

One should note that in our proofs we do not use orthogonality properties of  $\mathbb{R}^n$ . This means that if one replaces the orthogonal projection method mentioned in the introduction by suitable parallel projections in direction of the line connecting  $P$  and the circumcenter of the given triangle, then most of our statements can successfully be extended to normed spaces (using the concept of isosceles orthogonality, (see [1]). This is the subject of forthcoming investigations.

## References

- [1] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*. Aequationes Math. **83** (2012), 153–189.
- [2] E. Asplund and B. Grünbaum, *On the geometry of Minkowski planes*. L'Enseignement Mathématique **6** (2) (1961), 299–306.
- [3] R. Crabbs, *Gaspard Monge and the Monge point of the tetrahedron*. Mathematics Magazin **76** (3) (2003), 193–203.
- [4] A. Edmonds, M. Hajja and H. Martini, *Orthocentric simplices and their centers*. Results Math. **47** (2005), 266–295.
- [5] M. Hajja and H. Martini, *Orthocentric simplices as the true generalizations of triangles*. The Mathematical Intelligencer **35** (2013), 16–27.
- [6] H. Martini and M. Spirova, *The Feuerbach circle and orthocentricity in normed planes*. L'Enseignement Mathématique **53** (2) (2007), 237–258.
- [7] H. Martini and S. Wu, *On orthocentric systems in strictly convex normed planes*. Extracta Math. **24** (2009), 31–45.
- [8] W. Pacheco and T. Rosas, *On orthocentric systems in Minkowski planes*. Beitr. Algebra Geom. **56** (2015), 249–262.
- [9] T. Rosas, *Sistemas  $C$ -ortocéntricos y circunferencia de Feuerbach para cuadriláteros en planos de Minkowski*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **Vol. XXII**, No. 2 (2015), 125–141.
- [10] T. Rosas,  *$C$ -ortocentros y sistemas  $C$ -ortocéntricos en planos de Minkowskii*, Aleph Sub-cero, Serie de divulgación, **2014-II**, 104–132.

# Dos teoremas de interpolación

## *Two interpolation theorems*

Franklin Galindo (franklin.galindo@ucv.ve)

Departamento de lógica y Filosofía de la Ciencia.  
Escuela de Filosofía. Universidad Central de Venezuela.

### Resumen

En este artículo se presentan dos demostraciones del *teorema de interpolación*: Una para la *lógica proposicional* y otra para la *lógica de primer orden* ( $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$ ). Ambas se realizan en el contexto de la *teoría de modelos*. El teorema de interpolación afirma que si  $\varphi$  y  $\psi$  son fórmulas, donde  $\varphi$  no es una contradicción,  $\psi$  no es válida y  $\psi$  es una consecuencia lógica de  $\varphi$  ( $\varphi \models \psi$ ), entonces existe una fórmula  $\delta$  que está escrita en un lenguaje común al de  $\varphi$  y  $\psi$ , tal que  $\varphi \models \delta$  y  $\delta \models \psi$ . El teorema de interpolación fue demostrado por primera vez para  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$  por William Craig en 1957, y desde entonces se ha investigado la posibilidad de generalizarlo o aplicarlo. Dicho teorema tiene generalizaciones o aplicaciones en teoría de la demostración, teoría de modelos abstracta, ciencias de la computación, lógica modal, lógica intuicionista, etc. Se presentan ejemplos de aplicaciones o generalizaciones de la propiedad de interpolación relacionados con lógicas infinitarias, cuantificadores generalizados, segundo orden, no clásicas, abstractas, etc. También se ofrecen referencias de problemas abiertos sobre interpolación en el contexto de la teoría de modelos abstracta.

**Palabras y frases clave:** lógica proposicional, lógica de primer orden, propiedad de interpolación de Craig, construcción de modelos a partir de constantes y teorías inseparables, teoría de modelos abstracta.

### Abstract

In this paper we present two proofs of the *interpolation theorem*: One for *propositional logic* and one for *first order logic* ( $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$ ). Both are performed in the context of *model theory*. The interpolation theorem states that if  $\varphi$  and  $\psi$  are formulas, where  $\varphi$  is not a contradiction,  $\psi$  is not valid, and  $\psi$  is a logical consequence of  $\varphi$  ( $\varphi \models \psi$ ), then there exists a formula  $\delta$  which is written in a common language to that of  $\varphi$  and  $\psi$ , such that  $\varphi \models \delta$  and  $\delta \models \psi$ . The interpolation theorem was first proved for  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$  by William Craig in 1957, and since then the possibility of generalizing or applying it has been investigated. This theorem has generalizations or applications in proof theory, abstract model theory, computer science, modal logic, intuitionistic logic, etc. Examples of applications or generalizations of the interpolation property are presented related to infinitary logics, generalized quantifiers, second order, non-classical, abstract, etc, are presented. References on open problems regarding the interpolation property in the context of abstract model theory are also offered.

**Key words and phrases:** Propositional logic, first order logic, Craig's interpolation property, models constructed from constants and inseparable theories, abstract model theory.

---

Recibido 04/01/2017. Revisado 27/03/2017. Aceptado 05/05/2017.

MSC (2010): Primary 03C40; Secondary 03C40.

Autor de correspondencia: Franklin Galindo

## 1 Introducción

En este artículo se presentan dos demostraciones del *teorema de interpolación*: Una para la *lógica proposicional* ( $\ell_{prop}$ ) y otra para la *lógica de primer orden* ( $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$ ). Ambas se realizan en el contexto de la teoría de modelos. El teorema de interpolación afirma que si  $\varphi$  y  $\psi$  son fórmulas, donde  $\varphi$  no es una contradicción,  $\psi$  no es válida y  $\psi$  es una consecuencia lógica de  $\varphi$  ( $\varphi \models \psi$ ), entonces existe una fórmula  $\delta$  que está escrita en un lenguaje común al de  $\varphi$  y  $\psi$ , tal que  $\varphi \models \delta$  y  $\delta \models \psi$ . El teorema de interpolación fue demostrado por primera vez para  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$  por William Craig en 1957, y desde entonces se ha investigado la posibilidad de generalizarlo o aplicarlo. Dicho teorema tiene generalizaciones o aplicaciones en teoría de la demostración, teoría de modelos abstracta, ciencias de la computación, lógica modal, lógica intuicionista, etc. Se presentarán ejemplos de aplicaciones o generalizaciones de la propiedad de interpolación relacionados con lógicas infinitarias, lógicas con cuantificadores generalizados, lógica segundo orden, lógicas no clásicas, lógicas abstractas, etc. También se ofrecen referencias de problemas abiertos sobre interpolación en el contexto de la teoría de modelos abstracta.

Vale la pena resaltar que, según [32], existen varias pruebas del teorema interpolación de Craig: Con métodos de teoría de la demostración (por ejemplo la original de Craig de 1957, ver [6, 7]), con métodos de la teoría de modelos (por ejemplo la de Henkin, 1963, ver [18]) y con métodos de teoría de juegos y teoría de conjuntos (por ejemplo Svenonious, 1965, ver [32]). En este artículo se realizará una demostración utilizando ideas de una prueba que se encuentra en [8], y también usando ideas propias del autor de este trabajo (incluyendo ejemplos propios). Tal prueba se hace utilizando el método de Henkin (1949, ver [17]) de construcción de modelos a partir de constantes (con el cual se puede construir un modelo para una teoría  $T$  que sea consistente) extendido por el mismo Henkin (ver [18]) con la noción de "*par de teorías inseparables*", lo cual proporciona un nuevo método de construcción de modelos para la unión de dos teorías  $T_1 \cup T_2$ , donde  $T_1$  y  $T_2$  son inseparables y consistentes. La demostración del teorema interpolación de Craig que se realiza es por reducción al absurdo. Vale la pena resaltar que la unión de dos teorías consistentes no necesariamente tiene un modelo, por ejemplo, como consecuencia del teorema de incompletitud de Gödel (1931) (ver [16]) existe una proposición indecidible  $\vartheta$  de la aritmética de Peano en primer orden ( $AP(\ell_{\aleph_0\aleph_0})$ ), es decir,  $AP(\ell_{\aleph_0\aleph_0}) \not\models \vartheta$  y  $AP(\ell_{\aleph_0\aleph_0}) \not\models \neg\vartheta$ . Así, las teorías extendidas  $AP(\ell_{\aleph_0\aleph_0}) \cup \{\neg\vartheta\}$  y  $AP(\ell_{\aleph_0\aleph_0}) \cup \{\vartheta\}$  son consistentes. Sin embargo, la unión de ambas  $AP(\ell_{\aleph_0\aleph_0}) \cup \{\vartheta, \neg\vartheta\}$  es inconsistente y, por lo tanto, no tiene modelo.

También existen distintas pruebas del teorema de interpolación para  $\ell_{prop}$ . En este trabajo se realiza una demostración que es constructiva y usa el principio de inducción matemática, utilizando ideas de una prueba que se encuentra en [21], y también se usarán ideas propias del autor de este trabajo (incluyendo ejemplos propios). Es importante destacar que el autor de este artículo no conoce la fecha exacta de la demostración del teorema de interpolación para la lógica proposicional, en consecuencia no sabe si se demostró antes o después de la prueba de interpolación de Craig para  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$ .

Según Feferman el teorema de interpolación de Craig, a pesar de la aparente simpleza (ver [13]), es una propiedad lógica central que se ha utilizado para revelar una profunda armonía entre la sintaxis y la semántica de  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$ .

Dos importantes consecuencias del teorema de interpolación de Craig son el teorema de definibilidad de Beth (1953, ver [4]) y el teorema de consistencia de Robinson (1956, ver [27]). También el teorema de consistencia Robinson implica al teorema de interpolación de Craig, es decir, ambos resultados son equivalentes. Y una mejora del teorema de interpolación de Craig es el teorema de interpolación de Lyndon (1959, ver [8]). El teorema de definibilidad de Beth pro-



porciona (entre otros) un importante método para investigaciones metamatemáticas de teorías matemáticas axiomatizadas, que permite realizar pruebas de independencia de términos primitivos. Y el teorema de consistencia Robinson proporciona un valioso método para investigar la consistencia de teorías matemáticas axiomatizadas. Una formulación del teorema de definibilidad de Beth y del teorema de consistencia de Robinson, así como una demostración de los mismos, a partir del teorema de interpolación de Craig puede encontrarse en el texto [8, p. 90-91]. Y una formulación y demostración del teorema de interpolación de Lyndon puede encontrarse en el texto [8, p. 92-93].

Además de las demostraciones de los teoremas de interpolación para  $\ell_{prop}$  y  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$ , que se realizan en este artículo, se presentan ejemplos de generalizaciones o aplicaciones de la propiedad de interpolación de Craig que han sido hechas por diversos investigadores en el transcurso del tiempo. Se presenta una lista de resultados obtenidos en diversos sistemas lógicos (lógicas infinitarias, lógicas con cuantificadores generalizados, lógica de segundo orden, lógicas no clásicas, lógicas abstractas, etc), en la cual se dirá explícitamente si estas cumplen o no la propiedad de interpolación. Dichos resultados han sido recopilados por el autor de este artículo de distintas fuentes, eligiendo presentar (principalmente) una parte importante de la tabla de resultados que se encuentra en el texto [19] porque se considera que es una de las más completas que aparece en la bibliografía consultada. También se expone una caracterización de la lógica infinitaria  $\ell_{\aleph_1\aleph_0}$ , lógica que admite conjunciones y disyunciones infinitas numerables. Dicha caracterización se realiza en el contexto de la teoría de modelos abstracta y usando la propiedad de interpolación. Solo se formula el teorema, y para ello se define el concepto de *lógica abstracta*, tal resultado se encuentra en [23, p. 17]. Adicionalmente, en la sección 6 de este artículo, se ofrecen algunas referencias de problemas abiertos sobre la propiedad de interpolación (siguiendo los artículos [13, 33]), tales problemas abiertos pertenecen a la teoría de modelos abstracta.

Vale la pena resaltar que las pruebas que se realizan en este trabajo pueden hacerse solo con ZF (La teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel), no se necesita el axioma de elección. Sin embargo, en las secciones de este artículo donde se hace referencia al concepto de *lógica abstracta* (teoría de modelos abstracta) si se requiere del axioma de elección para poder trabajar sin ninguna restricción con las lógicas infinitarias o con las lógicas con cuantificadores generalizados, entre otros sistemas lógicos. El estudio de tales lógicas tiene gran importancia, por ejemplo, en teoría de modelos finitos y en el estudio de problemas de complejidad computacional (ver [33, p. 51]). También las lógicas infinitarias son fundamentales en la teoría de modelos y en la teoría de conjuntos para investigar problemas de grandes cardinales [8, 10], entre otros.

El orden expositivo del contenido del artículo es siguiente: En la sección 2 se define  $\ell_{prop}$  describiendo su sintaxis y su semántica, y luego se formula y demuestra el teorema de interpolación para  $\ell_{prop}$ . En la sección 3 se define  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$  describiendo su sintaxis y su semántica, luego se formula y demuestra el teorema de interpolación para  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$ . En la sección 4 se presenta una lista de sistemas lógicos, mencionada anteriormente. En la sección 5 se presenta un resultado, en el contexto de la teoría de modelos abstracta, que caracteriza a la lógica infinitaria  $\ell_{\aleph_1\aleph_0}$ , usando la propiedad de interpolación (entre otras). En la sección 6 se presentan algunas referencias de problemas abiertos antes mencionados. Y en la sección 7 se ofrecen algunas conclusiones del artículo.

## 2 Teorema de interpolación para la lógica proposicional

A continuación se presenta una demostración del teorema de interpolación para  $\ell_{prop}$ . Tal demostración es constructiva y se realiza utilizando el principio de inducción matemática, para hacer la misma se definen primero los conceptos básicos sintácticos y semánticos de la lógica proposicional tal como son presentados en la mayoría de los textos contemporáneos de lógica matemática, por ejemplo [8, 9, 11, 25, 26]. Tales conceptos son los de *proposición*, *valuación* (o *interpretación*), *tautología*, *contradicción*, *satisfacible*, *consecuencia lógica* ( $\Sigma \models \sigma$ ), etc. En esta sección se usarán las definiciones expuestas en los textos [9, 11, 26]. La demostración que se realiza usa ideas de la prueba del teorema que se encuentra en el texto [21, p. 79-80], entre otros. También utilizan ideas propias y ejemplos propios del autor de este trabajo.

**Definición 2.1 (Lenguaje de  $\ell_{prop}$ ).** Sea  $p_0, p_1, p_2, \dots$  un conjunto numerable de letras proposicionales, se llamará a este conjunto  $LP$ . Para construir el lenguaje también se requiere de otros símbolos: las *conectivas* y los *paréntesis*. Las conectivas son:  $\neg$  (negación),  $\wedge$  (conjunción),  $\vee$  (disyunción),  $\rightarrow$  (condicional material) y  $\leftrightarrow$  (bicondicional). Los paréntesis son: “)” paréntesis derecho y “(” paréntesis izquierdo. Con estas letras, más las conectivas y los paréntesis, se define lo que es una proposición usando inducción:

### Definición 2.2.

- (a) Toda letra proposicional es una proposición.
- (b) Si  $\varphi$  y  $\psi$  son proposiciones, entonces  $(\neg\varphi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$  y  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$  son proposiciones.
- (c) Solo son proposiciones las sucesiones finitas de símbolos que se puedan construir aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (a) y (b).

Se denota el conjunto de todas las proposiciones por  $PROP$ , y cuando no exista posibilidad de ambigüedad se eliminarán los paréntesis externos (por simplicidad). Por ejemplo, en vez de  $(\varphi \vee \psi)$  es escribirá  $\varphi \vee \psi$ . Ahora se definirá la semántica de  $\ell_{prop}$ :

### Definición 2.3.

- Una asignación de valores de verdad es una función  $A : LP \rightarrow \{V, F\}$ .
- Una *valuación* (o *interpretación*) es una función  $I : PROP \rightarrow \{V, F\}$  tal que:

1.  $I(\neg\varphi) = V \iff I(\varphi) = F$ .
2.  $I(\varphi \rightarrow \psi) = V \iff I(\varphi) = F \text{ o } I(\psi) = V$ .
3.  $I(\varphi \wedge \psi) = V \iff I(\varphi) = V \text{ y } I(\psi) = V$ .
4.  $I(\varphi \vee \psi) = V \iff I(\varphi) = V \text{ o } I(\psi) = V$ .
5.  $I(\varphi \leftrightarrow \psi) = V \iff I(\varphi) = I(\psi)$ .

Las asignaciones y las valuaciones guardan una estrecha relación que se describe a continuación en el siguiente lema:

**Lema 2.1.** *Sea  $A$  una asignación. Se cumple que para todo par de valuaciones  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{W}$ , si  $\mathcal{Z} \upharpoonright A = \mathcal{W} \upharpoonright A$ , entonces  $\mathcal{Z} = \mathcal{W}$ .*

Ahora se procederá a definir los conceptos de "tautología", "contradicción", "satisfacible" y "consecuencia lógica":

**Definición 2.4.** Sea  $\varphi \in PROP$  una proposición, entonces se cumple que

1.  $\varphi$  es una tautología si  $I(\varphi) = V$ , para toda valuación  $I$ . Cuando  $\varphi$  es una tautología también se dice que  $\varphi$  es válida.
2.  $\varphi$  es una contradicción si  $I(\varphi) = F$ , para toda valuación  $I$ .
3.  $\varphi$  es satisfacible si existe una valuación  $I$  tal que  $I(\varphi) = V$ , es decir, si  $\varphi$  no es una contradicción. En tal caso, se dice que  $I$  es un modelo de  $\varphi$ .
4. Sea  $\Gamma \subseteq PROP$  un conjunto de proposiciones. Se dice que  $\varphi$  es una consecuencia lógica de  $\Gamma$ , denotado por  $\Gamma \models \varphi$ , si toda valuación  $I$  que sea un modelo de  $\Gamma$  (es decir:  $I(\sigma) = V$ , para toda  $\sigma \in \Gamma$ ) también es un modelo de  $\varphi$ , es decir, si no existe una valuación  $I$  que sea modelo de  $\Gamma$  y no sea modelo de  $\varphi$ . Cuando se trata de consecuencia lógica de conjuntos unitarios, por ejemplo  $\{\psi\} \models \varphi$ , se escribe  $\psi \models \varphi$ . Y cuando se trata de consecuencias lógicas del conjunto de sentencias vacío,  $\emptyset \models \varphi$ , se escribe así:  $\models \varphi$ .

**Observación 2.1.** Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que:  $\varphi$  es una tautología si y solo si  $\models \varphi$ .

**Teorema 2.1** (Teorema de interpolación para la lógica proposicional). *Sean  $\chi$  y  $\zeta$  dos proposiciones tal que  $\chi \models \zeta$ , entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones:*

- (i)  $\chi$  es insatisfacible
- (ii)  $\zeta$  es válida
- (iii) Existe una proposición  $\lambda$  tal que  $\chi \models \lambda$  y  $\lambda \models \zeta$ , y cualquier letra proposicional que aparece en  $\lambda$  también aparece en  $\chi$  y en  $\zeta$  (en ambas). La proposición  $\lambda$  es llamada una interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$ .

**Ejemplo 2.1** (Ejemplos del teorema de interpolación para  $\ell_{prop}$ ).

(1)  $\chi = [\neg r \rightarrow (s \wedge t)]$  y  $\zeta = [\neg r \rightarrow \neg \neg s]$ . Es claro que  $\chi \models \zeta$ . Una interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$  es:  $\lambda = \neg r \rightarrow s$ .

(2)  $\chi = [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))]$  y  $\zeta = (p \rightarrow r)$ . Es claro que  $\chi \models \zeta$ . Una interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$  es:

$$\lambda = [p \rightarrow (r \vee \neg r) \wedge (p \rightarrow ((r \vee \neg r) \rightarrow r))] \vee [(p \rightarrow (r \wedge \neg r)) \wedge (p \rightarrow ((r \wedge \neg r) \rightarrow r))].$$

La proposición  $\lambda$  presente en el ítem (2), del Ejemplo 2.1, ha sido construída con un procedimiento efectivo que se describirá en la demostración del Teorema 2.1. Tal procedimiento usa las letras proposicionales que están en  $\chi$  y no están en  $\zeta$  hasta eliminarlas todas sustituyéndolas por una tautología  $(r \vee \neg r)$  o por una contradicción  $(r \wedge \neg r)$  de una manera específica (utilizando disyunciones) para lograr construir la proposición interpolación.

*Demostración del teorema.* Para probar el teorema se supone que (i) y (ii) no ocurren y se prueba que se cumple (iii). Como (i) y (ii) no ocurren entonces  $\chi$  y  $\neg\zeta$  son satisfacibles, es decir, existe una valuación  $\mathcal{V} : PROP \rightarrow \{V, F\}$  tal que  $\mathcal{V}(\chi) = V$  y existe una valuación  $\mathcal{W} : PROP \rightarrow \{V, F\}$  tal que  $\mathcal{W}(\zeta) = F$ , donde  $PROP$  es el conjunto de todas las proposiciones. Entonces  $\chi$  y  $\zeta$  tienen al menos una letra proposicional en común, pues si esto no ocurre se puede definir una valuación  $\mathcal{H} : PROP \rightarrow \{V, F\}$  tal que  $\mathcal{H}$  coincida con  $\mathcal{V}$  en los valores a las letras proposicionales de  $\chi$  y  $\mathcal{H}$  coincide con  $\mathcal{W}$  en los valores a las letras proposicionales de  $\zeta$ , en consecuencia  $\mathcal{H}(\chi) = V$  y  $\mathcal{H}(\zeta) = F$  (para definir  $\mathcal{H}$  se usa la Definición 2.3 y el principio de inducción matemática), lo cual contradice la hipótesis  $\chi \models \zeta$ . Por lo tanto,  $\chi$  y  $\zeta$  tiene al menos una letra proposicional en común.

Sea  $\phi \in PROP$ , y sea  $LP(\phi)$  el conjunto de las letras proposicionales que aparecen en  $\phi$ . Considérese el conjunto de las letras proposicionales que aparecen en  $\phi$  y no aparecen en  $\zeta$ , es decir,  $LP(\phi) \setminus LP(\zeta)$ . El cardinal  $|LP(\phi) \setminus LP(\zeta)|$  es un número natural. Se probará (iii) por inducción en  $\mathbb{N}$ , usando  $|LP(\phi) \setminus LP(\zeta)|$ . Se demostrará la siguiente Proposición  $\oplus$  que implica (iii) y donde  $\zeta$  está fija:

**Proposición  $\oplus$ :**  $\forall n \in \mathbb{N}$  y  $\forall \phi \in PROP$ . Si  $\phi \models \zeta$ ,  $\phi$  es satisfacible y  $|LP(\phi) \setminus LP(\zeta)| = n$ , entonces existe una proposición interpolación de  $\phi$  y  $\zeta$ .

*Demostración de la Proposición  $\oplus$ .* *Caso base:* ( $n = 0$ ). Sea  $\sigma$  una proposición tal que  $\sigma \models \zeta$ ,  $\sigma$  es satisfacible y  $|LP(\sigma) \setminus LP(\zeta)| = 0$ , entonces se toma  $\lambda = \sigma$ . Claramente se cumple que  $\sigma \models \sigma$  y, por hipótesis, ocurre  $\sigma \models \zeta$ . También, todas las letras proposicionales de  $\sigma$  están en  $\sigma$  y en  $\zeta$  ya que  $|LP(\sigma) \setminus LP(\zeta)| = 0$ .

*Caso inductivo:* Sea  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$ . Supóngase que para cualquier  $r < k$  se cumple la Proposición  $\oplus$ , es decir, existe una proposición interpolación de  $\phi$  y  $\zeta$ , donde  $\phi \models \zeta$ ,  $\phi$  es satisfacible y  $|LP(\phi) \setminus LP(\zeta)| = r$ ,  $\forall r < k$  y  $\forall \phi \in PROP$ . Se demostrará que la Proposición  $\oplus$  se cumple para  $k$ , es decir, se mostrará que existe una proposición interpolación de  $\phi$  y  $\zeta$ , donde  $\phi \models \zeta$ ,  $\phi$  es satisfacible y  $|LP(\phi) \setminus LP(\zeta)| = k$ ,  $\forall \phi \in PROP$ .

Sea  $\sigma$  una proposición tal que  $\sigma \models \zeta$ ,  $\sigma$  es satisfacible y  $|LP(\sigma) \setminus LP(\zeta)| = k$ . Como  $k > 0$  sea  $u \in LP(\sigma) \setminus LP(\zeta)$ . Sea  $s$  una letra proposicional que aparece en  $\sigma$  y  $\zeta$ . Se construyen dos proposiciones a partir de  $\sigma$ : la proposición  $\sigma_1$ , que resulta de sustituir  $u$  por la tautología  $(s \vee \neg s)$  en  $\sigma$ ; y la proposición  $\sigma_2$ , que resulta de sustituir  $u$  por la contradicción  $(s \wedge \neg s)$  en  $\sigma$ . Se probará que  $\sigma_1 \models \zeta$  y  $\sigma_2 \models \zeta$ . Para probar que  $\sigma_1 \models \zeta$ , sea  $\mathcal{V}$  una valuación tal que  $\mathcal{V}(\sigma_1) = V$ . Se cumple que  $\mathcal{V}(u) = V$  o  $\mathcal{V}(u) = F$ .

*Caso 1:* ( $\mathcal{V}(u) = V$ ). Por la construcción de  $\sigma_1$  a partir de  $\sigma$ , como en  $\sigma_1$  no aparece  $u$  y en los lugares donde estaba  $u$  aparece  $(s \vee \neg s)$  y  $\mathcal{V}((s \vee \neg s)) = V$ , se concluye que  $\mathcal{V}(\sigma) = V$ . Luego, por hipótesis  $\mathcal{V}(\zeta) = V$ .

*Caso 2:* ( $\mathcal{V}(u) = F$ ). Como  $u$  no aparece en  $\sigma_1$  se define a partir de  $\mathcal{V}$  otra valuación  $\mathcal{V}'$  que coincide con  $\mathcal{V}$  en los valores a todas las letras proposicionales menos  $u$ , es decir,  $\mathcal{V}'(u) = V$ . En consecuencia,  $\mathcal{V}'(\sigma) = V$ . Luego, por hipótesis  $\mathcal{V}'(\zeta) = V$ . De modo que  $\mathcal{V}(\zeta) = V$ , pues como  $u$  no aparece en  $\zeta$  se cumple que  $\mathcal{V}'(\zeta) = \mathcal{V}(\zeta)$ . La prueba de  $\sigma_2 \models \zeta$  se realiza de manera análoga pero considerando la sustitución de  $(s \wedge \neg s)$  por  $u$  en  $\sigma$ . Por lo tanto, como  $\sigma_1 \models \zeta$  y  $\sigma_2 \models \zeta$ , se concluye que  $\sigma_1 \vee \sigma_2 \models \zeta$ . Entonces, como por construcción la proposición  $\sigma_1 \vee \sigma_2$  tiene  $k - 1$  letras proposicionales que no aparecen en  $\zeta$ , y es satisfacible porque  $\sigma$  lo es, se aplica la hipótesis inductiva y se tiene que existe una proposición  $\lambda$  interpolación de  $\sigma_1 \vee \sigma_2$  y  $\zeta$ . Es decir,  $\sigma_1 \vee \sigma_2 \models \lambda$  y  $\lambda \models \zeta$ , y cualquier letra proposicional que aparece en  $\lambda$  también aparece en  $\sigma_1 \vee \sigma_2$  y en  $\zeta$ . Como se cumple que  $\sigma \models \sigma_1 \vee \sigma_2$ , entonces  $\sigma \models \lambda$ . Por lo tanto  $\lambda$  es una

proposición interpolación de  $\sigma$  y  $\zeta$ . Lo que se quería demostrar. Ha terminado la demostración de la Proposición  $\oplus$  y, por lo tanto, ha finalizado también la prueba del Teorema 2.1.  $\square$

### 3 Teorema de interpolación para la lógica de primer orden

A continuación se presenta una demostración del teorema de interpolación para  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ . Tal prueba se hace utilizando el método de Henkin (ver [17]) de construcción de modelos a partir de constantes (con el cual se puede construir un modelo para una teoría  $T$  que sea consistente) extendido con la noción de “par de teorías inseparables”(extensión que hace el mismo Henkin en [18]), lo cual proporciona un nuevo método de construcción de modelos para la unión de dos teorías  $T_1 \cup T_2$ , donde  $T_1$  y  $T_2$  son inseparables y consistentes. Para hacer la formulación y demostración del teorema se requiere definir previamente los conceptos básicos de la sintaxis y la semántica de  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ . Estas nociones se presentan siguiendo la metodología de textos contemporáneos de la lógica matemática, por ejemplo [8, 9, 11, 12, 24, 25]. Los conceptos sintácticos y semánticos son los de “lenguaje”, “estructura”(o “interpretación”), “estructuras isomorfas”, “formalización de un lenguaje”, “término”, “fórmula”, “sentencia”, “satisfacción”, “verdad”, “contradicción”, “validez”, “consecuencia lógica”(  $\Sigma \models \sigma$ ), “deducibilidad”(  $\Sigma \vdash \sigma$ ), etc. Específicamente se describirán tales nociones tal como se hace en los textos [8, 9, 11], y en el artículo [15]. En la demostración que se realiza en esta sección del teorema de interpolación para  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$  se usan ideas que se encuentran en la prueba que hacen Chang y Keisler en el texto [8], y también se utilizan ideas propias (y ejemplos propios) del autor de este trabajo. El orden expositivo de esta sección es el siguiente: En las siguientes tres subsecciones (3.1, 3.2 y 3.3) se describe la sintaxis y la semántica de  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$  y, además, se enuncian dos resultados previos que se usarán en la demostración: el teorema de completitud de Gödel y el teorema de compacidad. En la última subsección (3.4) se formula y demuestra el teorema de interpolación para  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ .

#### 3.1 Lenguajes de primer orden, estructuras e isomorfismo entre estructuras

Las definiciones se harán siguiendo el orden y la notación (principalmente) de los textos [8, 9], pero se realizarán de manera generalizada para cualquier cardinal:

**Definición 3.1.1.** Un *lenguaje*  $\mathcal{L}$  es un conjunto de símbolos cuyo cardinal puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable (de cualquier cardinalidad mayor que  $\aleph_0$ ). Los símbolos de  $\mathcal{L}$  son agrupados en tres clases:

- *Símbolos relacionales*  $R_0, R_1, R_2, R_3, \dots, R_\alpha, \dots (\alpha \in \gamma)$ . Donde  $\gamma$  es cualquier ordinal. (El conjunto de símbolos relacionales puede ser vacío).
- *Símbolos funcionales*  $h_0, h_1, h_2, h_3, \dots, h_\beta, \dots (\beta \in \delta)$ . Donde  $\delta$  es cualquier ordinal. (El conjunto de símbolos funcionales puede ser vacío).
- *Símbolos constantes*  $d_0, d_1, d_3, \dots, d_\rho, \dots (\rho \in \eta)$ . Donde  $\eta$  es cualquier ordinal. (El conjunto de símbolos constantes puede ser vacío).

Todo símbolo relacional y todo símbolo funcional, tiene asociado un número natural  $n \geq 1$  (su número de argumentos), de este modo se tienen entonces símbolos relacionales o funcionales unarios, binarios, 3-arios, 4-arios, 5-arios, 6-arios,  $\dots$ ,  $n$ -arios, etc.

**Definición 3.1.2.** Una *estructura*  $\mathfrak{U}$  para un lenguaje  $\mathcal{L}$  (o una *interpretación*  $\mathfrak{U}$  para un lenguaje  $\mathcal{L}$ ) está constituida por:

- Un conjunto no vacío  $U$  (el universo de  $\mathfrak{U}$ )
- Para cada símbolo relacional  $n$ -ario  $R_\alpha$  de  $\mathcal{L}$ , una relación

$$R_\alpha^{\mathfrak{U}} \subseteq U^n.$$

- Para cada símbolo funcional  $n$ -ario  $h_\beta$  de  $\mathcal{L}$ , una función

$$h_\beta^{\mathfrak{U}} : U^n \longrightarrow U.$$

- Para cada símbolo constante  $d_\rho$  de  $\mathcal{L}$ , un elemento

$$d_\rho^{\mathfrak{U}} \in U.$$

La estructura  $\mathfrak{U}$  definida se puede expresar así:

$$\mathfrak{U} = \langle U, \langle R_\alpha^{\mathfrak{U}} \rangle_{\alpha \in \gamma}, \langle f_\beta^{\mathfrak{U}} \rangle_{\beta \in \delta}, \langle d_\rho^{\mathfrak{U}} \rangle_{\rho \in \eta} \rangle.$$

**Definición 3.1.3.** Sean  $\mathfrak{U} = \langle U, \langle R_\alpha^{\mathfrak{U}} \rangle_{\alpha \in \gamma}, \langle g_\beta^{\mathfrak{U}} \rangle_{\beta \in \delta}, \langle d_\rho^{\mathfrak{U}} \rangle_{\rho \in \eta} \rangle$ , y  $\mathfrak{X} = \langle X, \langle R_\alpha^{\mathfrak{X}} \rangle_{\alpha \in \gamma}, \langle h_\beta^{\mathfrak{X}} \rangle_{\beta \in \delta}, \langle d_\rho^{\mathfrak{X}} \rangle_{\rho \in \eta} \rangle$  dos estructuras para un lenguaje  $\mathcal{L}$ .  $\mathfrak{U}$  y  $\mathfrak{X}$  son *isomorfas* ( $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{X}$ ) si y solo si existe una función biyectiva  $i : U \longrightarrow X$  que satisface:

1. Para cada símbolo relacional  $R_\alpha$  de  $\mathcal{L}$ , si  $n$  es la aridad de  $R_\alpha$ , entonces para cada  $(u_1, \dots, u_n) \in U^n$ :

$$R_\alpha^{\mathfrak{U}}(u_1, \dots, u_n) \Leftrightarrow R_\alpha^{\mathfrak{X}}(i(u_1), \dots, i(u_n)).$$

2. Para cada símbolo funcional  $h_\beta$  de  $\mathcal{L}$ , si  $n$  es la aridad de  $h_\beta$ , entonces para cada  $(u_1, \dots, u_n) \in U^n$ :

$$i(h_\beta^{\mathfrak{U}}(u_1, \dots, u_n)) = h_\beta^{\mathfrak{X}}(i(u_1), \dots, i(u_n)).$$

3. Para cada símbolo constante  $d_\rho$  de  $\mathcal{L}$  se tiene que:

$$i(d_\rho^{\mathfrak{U}}) = d_\rho^{\mathfrak{X}}.$$

**Ejemplo 3.1.1.** [Ejemplos de estructuras isomorfas]

- (1) Sean  $\langle \mathbb{N}, < \rangle$  y  $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, < \rangle$  dos estructuras para el lenguaje  $\{\widehat{<}\}$ , donde  $\widehat{<}$  es un símbolo relacional binario. La función  $g : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$  tal que  $g(n) = n - 1$  es un isomorfismo, es decir,  $\langle \mathbb{N}, < \rangle \cong \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, < \rangle$  (ver [24, p. 57]).
- (2) Teorema (Cantor): Si  $\langle B, <_B \rangle$  y  $\langle A, <_A \rangle$  son dos ordenes totales, densos, no acotados y numerables, entonces  $\langle B, <_B \rangle \cong \langle A, <_A \rangle$  (ver [22, p. 38-39]). Notar que un lenguaje adecuado para estas estructuras es el mencionado en (1) del presente ejemplo  $\{\widehat{<}\}$ .

(3) *Teorema (Cantor):* Si  $\langle A, <_A \rangle$  es un orden total, denso, completo y, además,  $\langle A, <_A \rangle$  tiene un subconjunto numerable y denso  $E$  isomorfo a  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ , es decir,  $\langle E, <_A \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ , entonces  $\langle A, <_A \rangle \cong \langle \mathbb{R}, < \rangle$  (ver [22, p.38-39]). (Un orden total  $\langle A, <_A \rangle$  es “denso” si  $\forall x \in A, \forall y \in A (x <_A y \rightarrow \exists z \in A (x <_A z <_A y))$ ). Un conjunto  $Y \subseteq A$  es un “subconjunto denso” de  $A$  si para todo  $x <_A y$  en  $A$  existe un  $z \in Y$  tal que  $x <_A z <_A y$ . Un conjunto ordenado es “no acotado” si no tiene mayor, ni menor elemento. Un orden total  $\langle A, <_A \rangle$  es “completo” si cualquier subconjunto  $Y \subseteq A$  distinto de vacío tiene un supremo, es decir, una menor cota superior). Notar que un lenguaje adecuado para estas estructuras es también el mencionado en el Ejemplo 3.1.1  $\{\widehat{<}\}$ .

(4) *Teorema (Dedekind):* Cualquier dos estructuras de Peano son isomorfas (ver [12, p. 47-48]). Donde una estructura de Peano es una estructura  $\langle A, s, 0 \rangle$  para el lenguaje  $\{\widehat{s}, \widehat{0}\}$ , donde  $\widehat{s}$  es un símbolo funcional binario y  $\widehat{0}$  es símbolo constante, que cumple con los siguientes tres axiomas

$$P1: \forall x(\widehat{s}(x) \neq x).$$

$$P2: \forall x \forall y(\widehat{s}(x) \equiv \widehat{s}(y) \rightarrow x \equiv y).$$

$$P3: \forall X[(X(\widehat{0}) \wedge \forall x(X(x) \rightarrow X(\widehat{s}(x))) \rightarrow \forall y Xy].$$

Los dos primeros axiomas  $P1$  y  $P2$  son expresables con el lenguaje de la lógica de primer orden que se define más adelante en esta sección, y el tercer axioma  $P3$  (el principio de inducción matemática) no se puede expresar en el lenguaje de la lógica de primer orden si no en el lenguaje (por ejemplo) de la lógica de segundo orden, la razón es que en la lógica de primer orden no se puede cuantificar sobre variables de propiedades si no solo sobre variables de individuos. Un ejemplo de estructura de Peano es  $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$ , donde  $S$  es la operación sucesor en  $\mathbb{N}$  ( $S(n) = n + 1$ ).

Otros ejemplos de estructuras isomorfas pueden encontrarse en [8] y en [24, p. 56-57]. En la demostración del teorema de interpolación para  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$  que se realiza en la subsección 3.4 se prueba que dos estructuras para un lenguaje determinado son isomorfas. Además, se usará el concepto de isomorfismo para construir una estructura (a partir de otra) que permitirá concluir la prueba del teorema.

### 3.2 Formalización de un lenguaje de primer orden, satisfacción, verdad, validez, contradicción y consecuencia lógica

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje. Para formalizar a  $\mathcal{L}$  se utiliza un conjunto de *símbolos lógicos*, los cuales se listan a continuación:

- *Conectivas:*  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  (negación, disyunción, conjunción, condicional y bicondicional, respectivamente).
- *Cuantificadores:*  $\forall, \exists$  (universal y existencial, respectivamente).
- *Símbolo de identidad:*  $\equiv$  (un símbolo relacional binario).
- *Variables:*  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_k, \dots$  ( $k \in \aleph_0$ ). El conjunto de las variables se denotará por  $VAR$ .
- *Paréntesis:*  $) , ($  (paréntesis derecho y paréntesis izquierdo, respectivamente).

- *La coma:* ,

Ahora se presentará una lista de definiciones que tienen por objetivo indicar cómo usar los símbolos lógicos y los símbolos de  $\mathcal{L}$  para construir términos y fórmulas del lenguaje  $\mathcal{L}$ , términos y fórmulas que permitirán hablar de las estructuras para  $\mathcal{L}$ . Se inicia definiendo *Término* del lenguaje  $\mathcal{L}$ , usando inducción:

**Definición 3.2.1.**

- Toda variable y todo símbolo constantes es un término.
- Si  $f$  es un símbolo funcional  $n$ -ario y  $t_1, \dots, t_n$  son términos, entonces  $f(t_1, \dots, t_n)$  es un término.
- Una sucesión de símbolos es un término si y solo si se obtiene aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (a) y (b).

El conjunto de los términos de  $\mathcal{L}$  se denotará por  $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ . Ahora se define *fórmula atómica* de  $\mathcal{L}$ , las fórmulas más simples del lenguaje  $\mathcal{L}$ :

**Definición 3.2.2.** (a) Si  $t_1$  y  $t_2$  son términos, entonces  $t_1 \equiv t_2$  es una fórmula atómica.

- Si  $R$  es un símbolo relacional  $n$ -ario y  $t_1, \dots, t_n$  son términos, entonces  $R(t_1, \dots, t_n)$  es una fórmula atómica.

Con la definición de fórmula atómica se procede ahora a formular el concepto de *fórmula (fórmula bien formada)* de  $\mathcal{L}$ , dicha definición se hace usando inducción:

**Definición 3.2.3.** (a) Toda fórmula atómica es una fórmula.

- Si  $\phi$  y  $\chi$  son fórmulas, entonces  $(\neg\phi)$ ,  $(\phi \vee \chi)$ ,  $(\phi \wedge \chi)$ ,  $(\phi \rightarrow \chi)$  y  $(\phi \leftrightarrow \chi)$  son fórmulas.
- Si  $v$  es una variable y  $\phi$  es una fórmula, entonces  $(\forall v)\phi$  y  $(\exists v)\phi$  son fórmulas.
- Una sucesión de símbolos es una fórmula si y solo si se obtiene usando una cantidad finita de veces las cláusulas (a), (b) y (c).

Por simplicidad, cuando no exista ambigüedad, se eliminarán los paréntesis externos de las fórmulas y de los cuantificadores, es decir, se escribirá  $\neg\psi$  en lugar de  $(\neg\psi)$  y  $\forall v\psi$  en lugar de  $(\forall v)\psi$ , por ejemplo. El conjunto de las fórmulas de  $\mathcal{L}$  se denotará por  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

Una ocurrencia de una variable en una fórmula se dice que es *libre* si esta ocurrencia no está bajo el alcance de algún cuantificador. Se dice que dicha ocurrencia es *ligada* en caso contrario, es decir, si ella está bajo el alcance de algún cuantificador. Según esta definición se puede apreciar que una variable puede tener ocurrencias libres y ocurrencias ligadas en una fórmula. Una definición inductiva de estos conceptos puede encontrarse en [9, p. 41-42]. Con las dos nociones anteriores se define cuándo una variable está libre en una fórmula: Una variable está libre en una fórmula si ella tiene al menos una ocurrencia libre en dicha fórmula. En caso contrario se dice que dicha variable no está libre en la fórmula. Dada una fórmula  $\psi$  se escribe  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  para indicar que las variables libres de  $\psi$  están entre  $x_1, \dots, x_n$ .

Los términos de un lenguaje denotan objetos en una estructura (para dicho lenguaje) y las fórmulas del lenguaje afirman hechos relativos a estos objetos en tal estructura, a continuación se definirán de manera precisa estos conceptos. Luego, se definirá (entre otros conceptos) cuándo una fórmula es verdadera y cuando es falsa en una estructura.



**Definición 3.2.4.** Sea  $\mathfrak{U}$  una estructura para  $\mathcal{L}$  y  $\mathbb{k} : VAR \rightarrow U$ . Se define el valor de un término de  $\mathcal{L}$  en  $\mathfrak{U}$  según  $\mathbb{k}$  inductivamente en la complejidad del término. Dado un término  $t$  se denotará este valor por  $t_{\mathfrak{U}}[\mathbb{k}]$  y se omitirá mencionar la estructura  $\mathfrak{U}$  en los casos donde no exista posibilidad de ambigüedad.

- (a) Si  $t$  es la variable  $v$ ,  $t_{\mathfrak{U}}[\mathbb{k}] = \mathbb{k}(v)$ .
- (b) Si  $t$  es el símbolo constante  $c$ ,  $t_{\mathfrak{U}}[\mathbb{k}] = c^{\mathfrak{U}}$ .
- (c) Si  $t_1, \dots, t_n$  son términos,  $f$  es un símbolo funcional  $n$ -ario y  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , entonces  $t_{\mathfrak{U}}[\mathbb{k}] = f^{\mathfrak{U}}(t_{1\mathfrak{U}}[\mathbb{k}], \dots, t_{n\mathfrak{U}}[\mathbb{k}])$ .

Intuitivamente, el valor de  $t$  en  $\mathfrak{U}$  según  $\mathbb{k}$ , es el elemento de  $U$  denotado por  $t$  cuando asignamos a la variables de  $t$  valores según  $\mathbb{k}$ .

De lo anterior se deduce que si  $\mathbb{k}$  y  $\mathbb{k}'$  coinciden en las variables que aparecen en el término  $t$ , entonces  $t_{\mathfrak{U}}[\mathbb{k}] = t_{\mathfrak{U}}[\mathbb{k}']$ .

Sea  $\mathfrak{U}$  una estructura para  $\mathcal{L}$ ,  $\mathbb{k} : VAR \rightarrow U$  y  $\phi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ . Se procede a definir lo que significa que  $\mathbb{k}$  satisface a  $\phi$  en  $\mathfrak{U}$ , lo que se denota por  $\mathfrak{U} \models \phi[\mathbb{k}]$ . El significado intuitivo de  $\mathfrak{U} \models \phi[\mathbb{k}]$  es que el resultado de sustituir en  $\phi$  las variables libres por sus valores según  $\mathbb{k}$ , es una afirmación verdadera en  $\mathfrak{U}$ . La definición se hace aplicando inducción en la construcción de las fórmula  $\phi$ .

**Definición 3.2.5.**

(Caso base)

- (a) *Caso base:* Si  $\phi$  es una fórmula atómica, es decir,  $\phi = t_1 \equiv t_2$  o  $\phi = R(t_1, \dots, t_n)$ , entonces:
  - (a.1)  $\mathfrak{U} \models t_1 \equiv t_2[\mathbb{k}] \iff t_{1\mathfrak{U}}[\mathbb{k}] = t_{2\mathfrak{U}}[\mathbb{k}]$ .
  - (a.2)  $\mathfrak{U} \models R(t_1, \dots, t_n)[\mathbb{k}] \iff R^{\mathfrak{U}}(t_{1\mathfrak{U}}[\mathbb{k}], \dots, t_{n\mathfrak{U}}[\mathbb{k}])$ .

- (b) *Caso inductivo:* Si  $\phi = \neg\chi$  o  $\phi = \chi \rightarrow \sigma$  o  $\phi = \chi \wedge \sigma$  o  $\phi = \chi \vee \sigma$  o  $\phi = \chi \leftrightarrow \sigma$ , donde  $\chi$  y  $\sigma$  son fórmulas para las cuales se ha definido lo que se quiere, entonces:

- (b.1)  $\mathfrak{U} \models (\neg\chi)[\mathbb{k}] \iff \mathfrak{U} \not\models \chi[\mathbb{k}]$ .
- (b.2)  $\mathfrak{U} \models (\chi \rightarrow \sigma)[\mathbb{k}] \iff \mathfrak{U} \not\models \chi[\mathbb{k}]$  o  $\mathfrak{U} \models \sigma[\mathbb{k}]$ .
- (b.3)  $\mathfrak{U} \models (\chi \wedge \sigma)[\mathbb{k}] \iff \mathfrak{U} \models \chi[\mathbb{k}]$  y  $\mathfrak{U} \models \sigma[\mathbb{k}]$ .
- (b.4)  $\mathfrak{U} \models (\chi \vee \sigma)[\mathbb{k}] \iff \mathfrak{U} \models \chi[\mathbb{k}]$  o  $\mathfrak{U} \models \sigma[\mathbb{k}]$ .
- (b.5)  $\mathfrak{U} \models (\chi \leftrightarrow \sigma)[\mathbb{k}] \iff \{\mathfrak{U} \models \chi[\mathbb{k}] \text{ y } \mathfrak{U} \models \sigma[\mathbb{k}]\} \text{ o } \{\mathfrak{U} \not\models \chi[\mathbb{k}] \text{ y } \mathfrak{U} \not\models \sigma[\mathbb{k}]\}$ .
- (b.6)  $\mathfrak{U} \models ((\forall v)\chi)[\mathbb{k}] \iff \mathfrak{U} \models \chi[\mathbb{k}']$  para toda  $\mathbb{k}' : VAR \rightarrow U$  que difiere de  $\mathbb{k}$  a lo sumo en el valor que le asigna a la variable  $v$ .
- (b.7)  $\mathfrak{U} \models ((\exists v)\chi)[\mathbb{k}] \iff \mathfrak{U} \models \chi[\mathbb{k}']$  para alguna  $\mathbb{k}' : VAR \rightarrow U$  que difiere de  $\mathbb{k}$  a lo sumo en el valor que le asigna a la variable  $v$ .

**Definición 3.2.6.** Sea  $\mathfrak{U}$  una estructura para  $\mathcal{L}$  y  $\phi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ , entonces se cumple:

- (a)  $\phi$  es satisfacible si existe una estructura  $\mathfrak{U}$  y una  $\mathbb{k} : VAR \rightarrow U$  tal que  $\mathfrak{U} \models \phi[\mathbb{k}]$ .
- (b)  $\phi$  es verdad en  $\mathfrak{U}$  si y solo si  $\mathfrak{U} \models \phi[\mathbb{k}]$ , para toda  $\mathbb{k} : VAR \rightarrow U$ . Esto también se expresa diciendo que  $\mathfrak{U}$  es un modelo de  $\phi$  y se denota por  $\mathfrak{U} \models \phi$ .

- (c)  $\phi$  es falsa en  $\mathfrak{U}$  si y solo si  $\mathfrak{U} \not\models \phi[\mathbb{k}]$ , para toda  $\mathbb{k} : VAR \rightarrow U$ .
- (d) Si  $\Gamma$  es un conjunto de fórmulas, se dice que  $\mathfrak{U}$  es un modelo de  $\Gamma$  si toda fórmula  $\phi \in \Gamma$  es verdad en  $\mathfrak{U}$ .

**Observación 3.2.1.** Se cumple que si  $\phi$  es una fórmula con variables libres  $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ , entonces el que  $\mathbb{k} : VAR \rightarrow U$  satisfaga a  $\phi$  en  $\mathfrak{U}$  solo depende de los valores de  $\mathbb{k}$  en las variables  $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ . De modo que si  $a_1 = \mathbb{k}(v_{i_1}), \dots, a_m = \mathbb{k}(v_{i_m})$ , entonces se escribirá  $\mathfrak{U} \models \phi[a_1, \dots, a_m]$  en vez de  $\mathfrak{U} \models \phi[\mathbb{k}]$ .

**Definición 3.2.7.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas en un lenguaje  $\mathcal{L}$  y  $\phi$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ . Se dice que:

- (a)  $\phi$  es lógicamente válida (o válida) si es verdad en toda estructura.
- (b)  $\phi$  es contradictoria si  $\neg\phi$  es lógicamente válida, es decir, si  $\phi$  es falsa en toda estructura.
- (c)  $\phi$  es una consecuencia lógica de  $\Gamma$ , denotado por  $\Gamma \models \phi$ , si toda estructura para  $\mathcal{L}$  que es un modelo de  $\Gamma$  también es un modelo de  $\phi$ , es decir, si no existe una estructura para  $\mathcal{L}$  que sea modelo de  $\Gamma$  y no sea modelo de  $\phi$ . Cuando se trata de consecuencia lógica de conjuntos unitarios, por ejemplo,  $\{\psi\} \models \phi$ , se escribe  $\psi \models \phi$ . Y cuando se trata de consecuencias lógicas del conjunto de sentencias vacío,  $\emptyset \models \phi$ , se escribe así:  $\models \phi$ .

**Observación 3.2.2.** Como en el caso de la lógica proposicional, una consecuencia inmediata de la definición anterior es que:  $\psi$  es lógicamente válida si y solo si  $\models \psi$ .

### 3.3 Teorema de completitud de Gödel y el teorema de compacidad

A continuación se enuncia el teorema de completitud de Gödel para  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$ , el cual se utilizará en la prueba del teorema de interpolación para  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$ . En especial, se usará la técnica de Henkin de construcción de modelos a partir de constantes que se aplica contemporáneamente en la demostración del teorema de Completitud de Gödel (ver [17]). Dicha técnica, contiene un método que permite construir un modelo para un conjunto consistente de sentencias  $T$  en un lenguaje  $\mathcal{J}$ , extendiéndola (inductivamente) a una teoría maximal consistente  $T'$ , en un lenguaje expandido  $\mathcal{J} \cup E$ , donde  $E$  es un conjunto numerable de nuevos símbolos constantes que funcionan como "testigos" para  $T'$ . El modelo se construye con los términos cerrados de  $\mathcal{J} \cup E$ , o solamente con  $E$ , usando clases de equivalencia de los mismos y la propiedad de maximal consistencia. Más adelante se definirán estos conceptos. Una prueba contemporánea del teorema de completitud de Gödel aplicando el método de Henkin puede encontrarse en los textos [8, 9, 11, 12, 24, 25]. La que se utiliza en este trabajo es la versión presente en [8]. Se presentan dos enunciados del teorema que son equivalentes, pero antes de formularlos se definirá la noción de "deducibilidad", pues ella es requerida para dichas formulaciones.

Axiomas para  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$  (esquemas de axiomas) (ver [11, p. 166-167]): Son todas las generalizaciones de fórmulas de la formas siguientes, donde  $x, y$  son variables y  $\phi$  y  $\chi$  son fórmulas (Definición:  $\phi$  es una generalización de  $\chi$  si  $\phi$  es  $\forall x_1, \dots, x_n \chi$ , para variables  $x_1, \dots, x_n$ ):

1. Todas las instancias de tautologías de la lógica proposicional.
2.  $\forall x \phi \rightarrow \phi_t^x$ , donde  $t$  es sustituible por  $x$  en  $\phi$ .
3.  $\forall x(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \chi)$ .

4.  $\phi \rightarrow \forall x\phi$ , donde  $x$  no ocurre libre en  $\phi$ .
5.  $y \equiv y$ .
6.  $(x \equiv y) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi')$ , donde  $\phi$  es una fórmula atómica y  $\phi'$  se obtiene de  $\phi$  al reemplazar  $x$  por  $y$  en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos).

**REGLA DE INFERENCIA:** (*Modus Ponens*) A partir de  $\phi \rightarrow \chi$  y  $\phi$  se puede inferir  $\chi$ .

**Definición 3.3.1.** Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas y  $\phi$  una fórmula. Se dice que  $\phi$  se *deduce* de  $\Gamma$  o que  $\phi$  se *demuestra* a partir de  $\Gamma$ , lo que se denota por

$$\Gamma \vdash \phi,$$

si existe una sucesión finita  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  de fórmulas tales que  $\sigma_m = \phi$ , y cada  $\sigma_i$  es un axioma, o es un miembro de  $\Gamma$ , o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia Modus Ponens. Si  $\Gamma = \emptyset$ , entonces se escribe  $\vdash \phi$  en lugar de  $\emptyset \vdash \phi$ .

**Definición 3.3.2.** Sea  $\Theta$  un conjunto de fórmulas de un lenguaje  $\mathcal{L}$ . Se dice que  $\Theta$  es *consistente* si y solo si no existe una fórmula  $\psi$  del lenguaje  $\mathcal{L}$  tal que  $\Theta \vdash \psi$  y  $\Theta \vdash \neg\psi$ . Y se dice que  $\Theta$  es *inconsistente* si  $\Theta$  no es consistente.

**Teorema 3.3.1** (Teorema de completitud de Gödel (1930), Henkin (1949)). *Sea  $\Sigma$  un conjunto de sentencias de un lenguaje numerable  $\mathcal{L}$  y  $\varphi$  una sentencia de  $\mathcal{L}$ , entonces:*

(1) *Primera versión:*

$$\Sigma \text{ es consistente} \iff \Sigma \text{ tiene un modelo.}$$

(2) *Segunda versión:*

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi.$$

Vale la pena resaltar que el teorema de completitud de Gödel también se cumple para lenguajes de primer orden de cualquier cardinalidad, en tal caso se requiere del axioma de elección para hacer la prueba (ver [8, 25]).

Una consecuencia muy conocida del teorema de completitud de Gödel es el teorema de compacidad, dicho teorema también se utilizará en la prueba del teorema de interpolación para  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$ . El teorema de compacidad se puede probar como un corolario del teorema de completitud de Gödel o directamente usando, por ejemplo, el método de ultraproductos. Ambas pruebas pueden encontrarse (entre otros) en los textos [8, 9, 11, 24]. A continuación se presentan dos enunciados del teorema de compacidad que son equivalentes, en este trabajo se utilizará la segunda versión:

**Teorema 3.3.2** (Teorema de compacidad). *Sea  $\Sigma$  un conjunto de sentencias de un lenguaje numerable  $\mathcal{L}$  y  $\varphi$  una sentencia de  $\mathcal{L}$ , entonces:*

(1) *Primera versión:*

$$\Sigma \text{ tiene un modelo} \iff \text{cada subconjunto finito de } \Sigma \text{ tiene un modelo.}$$

(2) *Segunda versión:*

$$\Sigma \models \varphi \iff \text{Existe un subconjunto finito } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \text{ tal que } \Sigma_0 \models \varphi.$$

Vale la pena resaltar que no es fácil encontrar en la bibliografía la fecha de la primera demostración del teorema de compacidad para  $\mathcal{L}_{\aleph_0 \aleph_0}$ , la más antigua que conoce el autor de este trabajo es la de Gödel de 1930 (ver [16]), quien lo probó como un cololario de su teorema de completitud. Es conocido que la propiedad de “compacidad” en lógica está estrechamente relacionada con la propiedad de “compacidad” en el análisis matemático o en la topología, pues (por ejemplo) se cumple que el teorema de compacidad para una teoría en primer orden  $\Gamma$  es equivalente a que el *espacio (topológico) de Stone* correspondiente al álgebra de Lindenbaum de  $\Gamma$  sea compacto. Y los antecedentes de la propiedad de compacidad en análisis y Topología (según la bibliografía) se remontan al teorema clásico de Heine-Borel (ver [28]) que afirma que “todo cubrimiento abierto de un conjunto cerrado y acotado del espacio de los reales tiene un subcubrimiento finito”, dicho teorema (Heine-Borel) tiene versiones de finales del siglo XIX (ver [30]).

### 3.4 Formulación y demostración del teorema de interpolación

A continuación se presentarán una serie de definiciones que serán pilares fundamentales para la demostración del teorema principal de esta sección.

**Definición 3.4.1.** Una *teoría* de un lenguaje  $\mathcal{J}$ , es un conjunto de sentencias de  $\mathcal{J}$ .

**Definición 3.4.2.** Sea  $\Sigma$  un conjunto de sentencias de un lenguaje  $\mathcal{J}$ .  $\Sigma$  es *maximal consistente* si  $\Sigma$  es consistente y no existe un conjunto de sentencias consistente  $\Gamma$  que contenga propiamente a  $\Sigma$ , es decir, un  $\Gamma$  tal que  $\Sigma \subseteq \Gamma$  y exista una sentencia  $\gamma$  tal  $\gamma \in \Gamma$  y  $\gamma \notin \Sigma$ .

**Definición 3.4.3.** Sea  $\Sigma$  un conjunto de sentencias de un lenguaje  $\mathcal{J}$  y  $E$  un conjunto de constantes de  $\mathcal{J}$ . Se dice que  $E$  es un *conjunto de testigos para  $\Sigma$  en  $\mathcal{J}$*  si para toda fórmula  $\varphi$  de  $\mathcal{J}$  con a lo sumo una variable libre (digamos,  $x$ ) existe una  $e \in E$  tal que:

$$\Sigma \vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(e).$$

Es importante destacar que en la demostración del siguiente teorema se presentan una serie de proposiciones, intrínsecas del mismo, que se irán probando acorde a su aparición para hacer menos pesado el desarrollo de la demostración del teorema, ya que la misma es extensa. Para tal fin se usará el símbolo “■” para indicar el final de la prueba de las proposiciones, distinguiendo de esta forma el final de la demostración del teorema que se indicará con el símbolo “□”. También se presentan una serie de observaciones intrínsecas, y de utilidad, para el desarrollo de la demostración.

**Teorema 3.4.1** (Teorema de interpolación para la lógica de primer orden). *Sean  $\chi$  y  $\zeta$  dos sentencias en primer orden tal que  $\chi \models \zeta$ , entonces existe una sentencia  $\lambda$  tal que:*

- (i)  $\chi \models \lambda$  y  $\lambda \models \zeta$ .
- (ii) *Cualquier símbolo de relación, función o constante (excluyendo la identidad) que ocurra en  $\lambda$ , también ocurre en  $\chi$  y  $\zeta$ . La sentencia  $\lambda$  es llamada una “interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$ ”.*

**Observación 3.4.1.** Los siguientes tres ejemplos muestran porque es necesario permitir que el símbolo de la identidad ocurra en  $\lambda$  y no necesariamente en  $\chi$  y  $\zeta$ , en efecto, notar que los siguientes pares de sentencias tienen el símbolo de identidad a lo sumo en una de ellas, y sin embargo, ellas no tienen interpolación  $\lambda$  que no tenga el símbolo de identidad:

$$(1) \chi = \exists x(Sx \wedge \neg Sx) \quad \text{y} \quad \zeta = \exists x R x. \quad \text{Una } \lambda = \neg \forall x(x \equiv x).$$

(2)  $\chi = \exists xRx$  y  $\zeta = \exists x(Sx \vee \neg Sx)$ . Una  $\lambda = \forall x(x \equiv x)$ .

(3)  $\chi = \forall x\forall y(x \equiv y)$  y  $\zeta = \forall x\forall y(Sx \leftrightarrow Sy)$ . Una  $\lambda = \forall x\forall y(x \equiv y)$ .

Sin embargo, cuando el símbolo de identidad no aparece en  $\chi$  ni en  $\zeta$ , y  $\chi$  no es una sentencia contadictoria y  $\zeta$  no es una sentencia válida, entonces en la interpolación  $\lambda$  de  $\chi$  y  $\zeta$  no aparece el símbolo de identidad (ver [8]). Por ejemplo:  $\chi = \forall x\forall y((T(x, y) \rightarrow C(x, y)) \wedge T(f(a), b))$  y  $\zeta = C(f(a), b) \wedge T(f(a), b)$ . Una  $\lambda = (T(f(a), b)) \rightarrow C(f(a), b) \wedge T(f(a), b)$ .

Otro ejemplo de interpolación es el siguiente:  $\chi = g(b) \equiv d \wedge Q(g(b))$  y  $\zeta = (d \equiv e) \rightarrow Q(e)$ . Una  $\lambda = Q(d)$ .

*Demostración del teorema.* Considerando la observación anterior se tiene que si  $\chi$  es una sentencia insatisfacible, entonces una sentencia  $\lambda$  interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$  es  $\neg\forall x(x \equiv x)$ , y si  $\zeta$  es una sentencia válida, entonces una sentencia  $\lambda$  interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$  es  $\forall x(x \equiv x)$ . En consecuencia, para terminar de demostrar el teorema se considerará el caso en que  $\chi$  no es una sentencia insatisfacible ( $\chi$  es satisfacible) y  $\zeta$  no es una sentencia válida ( $\neg\zeta$  es satisfacible). Se demostrará este caso por reducción al absurdo. Supóngase que no existe una sentencia  $\lambda$  interpolación para  $\chi$  y  $\zeta$ . Se obtendrá una contradicción demostrando que no ocurre  $\chi \models \zeta$  contruyendo un modelo para  $\chi \wedge \neg\zeta$ . (Notar que la prueba que se realizará no es constructiva).

Sea  $\mathcal{L}$  el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en  $\chi$  o en  $\zeta$  o en ambas. Sea  $\mathcal{L}_1$  el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en  $\chi$ ,  $\mathcal{L}_2$  el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en  $\zeta$  y  $\mathcal{L}_0$  el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en ambas ( $\chi$  y  $\zeta$ ), es decir,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2,$$

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2.$$

Ahora se extiende el lenguaje  $\mathcal{L}$  a un lenguaje  $\mathcal{L}'$ , agregándole un conjunto numerable  $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  de nuevos símbolos constantes, es decir,  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$ . En correspondencia con esta extensión de  $\mathcal{L}$ , se definen las extensiones con  $C$  de  $\mathcal{L}_0$ ,  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , así:

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 \cup C,$$

$$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \cup C,$$

$$\mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_2 \cup C.$$

Considérese ahora un par de teorías  $K$  de  $\mathcal{L}'_1$  y  $H$  de  $\mathcal{L}'_2$ . Se dice que una sentencia  $\lambda$  de  $\mathcal{L}'_0$  separa a  $K$  y a  $H$  si y solo si:

$$K \models \lambda \text{ y } H \models \neg\lambda.$$

Además, se dice que las teorías  $K$  y  $H$  son *inseparables* si y solo si ninguna sentencia  $\lambda$  de  $\mathcal{L}'_0$  separa a  $K$  y  $H$ .

Lo que resta de la demostración se parece a la prueba del teorema de completitud de Gödel usando la técnica de Henkin sobre construcción de modelos a partir de constantes, pero usando adicionalmente la noción de “*par de teorías inseparables*”. Veamos de inicio la siguiente:

**Proposición**  $\diamond$ :  $\{\chi\}$  y  $\{\neg\zeta\}$  son inseparables.

*Demostración:* Aplicando reducción al absurdo, supóngase que existe una sentencia  $\lambda(c_1, \dots, c_n)$  de  $\mathcal{L}'_0$  que separa a  $K$  y  $H$ , donde  $c_1, \dots, c_n \in C$ . Sean  $z_1, z_2, \dots, z_n$  variables que no ocurren en

$\lambda(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , entonces la sentencia  $\forall z_1 \forall z_2 \dots \forall z_n \lambda(z_1, z_2, \dots, z_n)$  es una interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$ , es decir,  $\chi \models \forall z_1 \forall z_2 \dots \forall z_n \lambda(z_1, z_2, \dots, z_n)$  y  $\forall z_1 \forall z_2 \dots \forall z_n \lambda(z_1, z_2, \dots, z_n) \models \zeta$ . Contradicción pues se está suponiendo que no existe una sentencia interpolación para  $\chi$  y  $\zeta$ . ■

El conjunto de todas las sentencias de  $\mathcal{L}'_1$  es numerable y también el conjunto de todas las sentencias de  $\mathcal{L}'_2$ . Considérese una lista de tales sentencias, primero las de  $\mathcal{L}'_1$  y luego las de  $\mathcal{L}'_2$ :

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots (n \in \aleph_0), \quad \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots (n \in \aleph_0)$$

Ahora se construirán dos secuencias crecientes de teorías de  $\mathcal{L}'_1$  y de  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente,

$$\{\chi\} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \dots \subseteq K_n \dots (n \in \aleph_0), \quad \{\neg\zeta\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \dots \subseteq H_n \dots (n \in \aleph_0),$$

tales que cumplan las siguientes propiedades:

- (i)  $K_n$  y  $H_n$  son conjuntos finitos de sentencias inseparables.
- (ii) Si  $K_n \cup \{\chi_n\}$  es inseparable con  $H_n$ , entonces  $\chi_n \in K_{n+1}$ . Si  $K_{n+1}$  y  $H_n \cup \{\zeta_n\}$  son inseparables, entonces  $\zeta_n \in H_{n+1}$  (Notar que el procedimiento es en zigzag).
- (iii) Si  $\chi_n = \exists x \rho(x)$  y  $\chi_n \in K_{n+1}$ , entonces  $\rho(a) \in K_{n+1}$ , para alguna  $a \in C$  tal que  $a$  no aparezca en  $K_n \cup \{\chi_n\}$ . Si  $\zeta_n = \exists x \tau(x)$  y  $\zeta_n \in H_{n+1}$ , entonces  $\tau(b) \in H_{n+1}$ , para alguna  $b \in C$  tal que  $b$  no aparezca en  $H_n \cup \{\zeta_n\}$ .

Si han sido definidas las teorías  $K_n$  y  $H_n$ , entonces se pueden construir las teorías  $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  de la manera usual:

$$K_{n+1} = \begin{cases} K_n \cup \{\chi_n\} & \text{si } K_n \cup \{\chi_n\} \text{ es inseparable con } H_n \text{ y } \chi_n \text{ no es existencial} \\ K_n \cup \{\chi_n\} \cup \{\rho(a)\} & \text{si } K_n \cup \{\chi_n\} \text{ es inseparable con } H_n, \text{ y } \chi_n = \exists x \rho(x) \\ K_n & \text{en caso de que } K_n \cup \{\chi_n\} \text{ no sea inseparable con } H_n \end{cases}$$

donde  $a$  es la menor constante de  $C$  (en la numeración fijada al inicio) que no aparece en  $K_n \cup \{\chi_n\}$ .

$$H_{n+1} = \begin{cases} H_n \cup \{\zeta_n\} & \text{si } H_n \cup \{\zeta_n\} \text{ es inseparable con } K_{n+1} \text{ y } \zeta_n \text{ no es existencial} \\ H_n \cup \{\zeta_n\} \cup \{\tau(b)\} & \text{si } H_n \cup \{\zeta_n\} \text{ es inseparable con } K_{n+1}, \text{ y } \zeta_n = \exists x \tau(x) \\ H_n & \text{en caso de que } H_n \cup \{\zeta_n\} \text{ no sea inseparable con } K_{n+1} \end{cases}$$

donde  $b$  es la menor constante de  $C$  (en la numeración fijada al inicio) que no aparece en  $H_n \cup \{\zeta_n\}$ .

Entonces, como por construcción se tiene a las teorías  $K_0 = \{\chi\}$  y  $H_0 = \{\neg\zeta\}$ , se puede continuar construyendo inductivamente, mediante la regla de definición anterior, a las dos secuencias de teorías  $K_i$  y  $H_i$ , para cada  $i \in \aleph_0$ . Se demostrará que tales secuencias tienen las propiedades (i), (ii) y (iii). Solo se mostrará (i), pues las propiedades (ii) y (iii) se cumplen por construcción.

- (i) Hay que probar que  $\forall i \in \aleph_0$ ,  $K_i$  y  $H_i$  son finitos e inseparables. Se hará por inducción en  $\mathbb{N}$ :

*Caso base:* ( $n = 0$ ).

Obviamente  $K_0$  y  $H_0$  son finitos y también son inseparables (Ver Proposición  $\diamond$ ).

*Caso inductivo:*

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Supóngase que  $K_n$  y  $H_n$  cumplen con lo deseado, es decir, son finitos e inseparables. Se debe probar que  $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  son finitos e inseparables. El que son finitos es

inmediato por la construcción. Para probar que son inseparables hay que considerar varios casos según la definición inductiva ( $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  tienen tres posibilidades de ser cada uno), pero la idea principal de dicha prueba se puede presentar demostrando un caso modelo de todos los posibles, los demás casos salen usando esa idea y/o la hipótesis inductiva y/o la definición inductiva.

Considérese el siguiente caso:

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= K_n \cup \{\chi_n\} \cup \{\rho(a)\}, \\ H_{n+1} &= H_n \cup \{\zeta_n\} \cup \{\tau(b)\}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $\chi_n = \exists x\rho(x)$ ,  $\zeta_n = \exists x\tau(x)$ ,  $a$  es la menor constante de  $C$  (en la numeración fijada al inicio) que no aparece en  $K_n \cup \{\chi_n\}$ , y  $b$  es la menor constante de  $C$  (en la numeración fijada al inicio) que no aparece en  $H_n \cup \{\zeta_n\}$ . Supóngase que  $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  son separables, es decir, existe una sentencia  $\lambda$  de  $\mathcal{L}'_0$  tal que:

$$K_{n+1} \models \lambda \text{ y } H_{n+1} \models \neg\lambda.$$

Aplicando el teorema de completitud de Gödel y el teorema de la deducción en  $H_{n+1}$  se tiene que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \vdash \tau(b) \rightarrow \neg\lambda.$$

Entonces, como  $b$  no aparece en  $H_n \cup \{\zeta_n\}$ , se aplica la regla de introducción del generalizador y se tiene que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \vdash \forall x(\tau(x) \rightarrow \neg\lambda).$$

Volviendo a aplicar el teorema de completitud de Gödel se concluye que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \models \forall x(\tau(x) \rightarrow \neg\lambda).$$

En consecuencia se tiene que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \models \neg\lambda.$$

Entonces  $K_{n+1}$  y  $H_n \cup \{\zeta_n\}$  son separables. Esto contradice la definición de  $H_{n+1}$  en el caso analizado, ver la ecuación (1) y la definición inductiva. Por lo tanto,  $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  son inseparables, lo que se quería probar.

Sean ahora,

$$K_\omega = \bigcup_{n \in \omega} K_n, \quad H_\omega = \bigcup_{n \in \omega} H_n.$$

Se mostrará lo siguiente:

**Proposición ♣:**  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son inseparables.

*Demostración:* Aplicando reducción al absurdo, si  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son separables, entonces existe una sentencia  $\lambda$  de  $\mathcal{L}'_0$  tal que  $K_\omega \models \lambda$  y  $H_\omega \models \neg\lambda$ . Entonces, por el teorema de compacidad, existen conjuntos finitos  $\Gamma_0 \subseteq K_\omega$  y  $\Gamma_1 \subseteq H_\omega$  tales que  $\Gamma_0 \models \lambda$  y  $\Gamma_1 \models \neg\lambda$ . Luego, por la construcción  $K_\omega$  y  $H_\omega$ , existe  $j \in \aleph_0$  tal que  $\Gamma_0 \subseteq K_j$  y  $\Gamma_1 \subseteq H_j$ . En consecuencia,  $K_j \models \lambda$  y  $H_j \models \neg\lambda$ . Por lo tanto,  $K_j$  y  $H_j$  son separables. Esto contradice la cláusula (i) probada anteriormente. Entonces,

$K_\omega$  y  $H_\omega$  son inseparables. ■

Ahora, tomando en cuenta la Definición 3.4.2 y la Definición 3.4.3, se tiene lo siguiente:

**Proposición  $\triangle$ :**  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son teorías maximal consistentes en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente. Además, ambas tienen al conjunto de constantes  $C$  como conjunto de testigos (en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente).

*Demostración:* Primero se probará que  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son consistentes, luego se probará que son maximal consistentes, y por último se probará que el conjunto de constantes  $C$  es un conjunto de testigos para  $K_\omega$  y también para  $H_\omega$  (en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente).

Para probar que  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son consistentes primero se probará que  $\forall i \in \aleph_0$ ,  $K_i$  y  $H_i$  son consistentes. Aplicando inducción en  $\mathbb{N}$ :

*Caso base:* ( $n = 0$ ).

$K_0$  tiene un modelo, pues por hipótesis  $\chi$  no es insatisfacible, y  $H_0$  tiene un modelo, pues por hipótesis  $\zeta$  no es válida, entonces por el teorema de completitud de Gödel  $K_0$  y  $H_0$  son consistentes.

*Caso inductivo:*

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Supóngase que  $K_n$  y  $H_n$  cumplen con lo deseado, es decir, ellas son consistentes. Se debe probar que  $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  son consistentes. Para esto hay que considerar varios casos según la definición inductiva ( $K_{n+1}$  y  $H_{n+1}$  tienen tres posibilidades de ser cada uno), pero la idea principal de dicha prueba se puede presentar demostrando un caso modelo de todos los posibles, los demás casos salen usando esa idea y/o la hipótesis inductiva y/o la definición inductiva.

Considérese ahora el siguiente caso:

$$K_{n+1} = K_n \cup \{\chi_n\} \cup \{\rho(a)\}, \quad (2)$$

$$H_{n+1} = H_n \cup \{\zeta_n\} \cup \{\tau(b)\}, \quad (3)$$

donde  $\chi_n = \exists x\rho(x)$ ,  $\zeta_n = \exists x\tau(x)$ ,  $a$  es la menor constante de  $C$  (en la numeración fijada al inicio) que no aparece en  $K_n \cup \{\chi_n\}$ , y  $b$  es la menor constante de  $C$  (en la numeración fijada al inicio) que no aparece en  $H_n \cup \{\zeta_n\}$ . Supóngase que  $K_{n+1}$  es inconsistente, entonces cualquier proposición de  $\mathcal{L}'_1$  es consecuencia lógica de  $K_{n+1}$ . Sea  $\lambda$  una sentencia contradictoria de  $\mathcal{L}'_0$ , entonces:

$$K_{n+1} \models \lambda.$$

Aplicando el teorema de completitud de Gödel y el teorema de la deducción en  $K_{n+1}$  se tiene que:

$$K_n \cup \{\chi_n\} \vdash \rho(a) \rightarrow \lambda.$$

Entonces, como  $a$  no aparece en  $K_n \cup \{\chi_n\}$ , se aplica la regla de introducción del generalizador y se tiene que:

$$K_n \cup \{\chi_n\} \vdash \forall x(\rho(x) \rightarrow \lambda).$$

Volviendo a aplicar el teorema de completitud de Gödel se concluye que:

$$K_n \cup \{\chi_n\} \models \forall x(\rho(x) \rightarrow \lambda).$$

En consecuencia, se tiene que  $K_n \cup \{\chi_n\}$  es insatisfacible. Por lo tanto,  $K_n \cup \{\chi_n\} \models \lambda$  y, como  $\neg\lambda$  es una sentencia válida, se tiene que  $H_n \models \neg\lambda$ . Así,  $K_n \cup \{\chi_n\}$  y  $H_n$  son separables. Esto



contradice la definición de  $K_{n+1}$  en el caso analizado, ver ecuación (2) y definición inductiva. Por lo tanto,  $K_{n+1}$  es consistente.

Si  $H_{n+1}$  es inconsistente, entonces se aplica un razonamiento análogo al caso anterior de  $K_{n+1}$  y se concluye que  $H_n \cup \{\zeta_n\}$  y  $K_{n+1}$  son separables lo cual contradice a definición de  $H_{n+1}$  en el caso analizado, ver ecuación (3) y definición inductiva. Por lo tanto,  $H_{n+1}$  es consistente. Con lo queda demostrado que  $\forall i \in \aleph_0$ ,  $K_i$  y  $H_i$  son consistentes.

Ahora se probará que  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son consistentes. Si  $K_\omega$  es inconsistente, entonces por la Definición 3.3.1 se tiene que existe un conjunto finito  $\Gamma_0 \subseteq K_\omega$  tal que  $\Gamma_0$  es inconsistente. En consecuencia, (por construcción) existe un  $j \in \aleph_0$  tal que  $\Gamma_0 \subseteq K_j$ . Por lo tanto,  $K_j$  es inconsistente. Esto contradice el resultado anterior. Entonces  $K_\omega$  es consistente. Aplicando un razonamiento análogo se prueba que  $H_\omega$  es consistente.

Seguidamente se probará que  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son maximal consistente en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente. Se demostrará que  $H_\omega$  es maximal consistente en  $\mathcal{L}'_2$ , para esto suficiente mostrar que  $\forall i \in \aleph_0$ ,  $(\zeta_i \in H_\omega)$  o  $(\neg\zeta_i \in H_\omega)$ . Por reducción al absurdo, supóngase que existe un  $n \in \aleph_0$  tal que  $(\zeta_n \notin H_\omega)$  y  $(\neg\zeta_n \notin H_\omega)$ . Así, por construcción, ambas proposiciones fueron sacadas en el paso correspondiente a su subíndice,  $\zeta_n$  en  $H_{n+1}$ , y supóngase que  $\neg\zeta_n$  en  $H_{r+1}$ , donde  $r \in \aleph_0$ , es decir, por construcción:  $H_n \cup \{\zeta_n\}$  es separable con  $K_{n+1}$ ; y  $H_r \cup \{\zeta_r\}$  es separable con  $K_{r+1}$ , donde  $\neg\zeta_n = \zeta_r$ . En consecuencia, existe una sentencia  $\lambda$  de  $\mathcal{L}'_0$  tal que  $(H_n \cup \{\zeta_n\}) \models \lambda$  y  $K_{n+1} \models \neg\lambda$ . Y existe una sentencia  $\lambda'$  de  $\mathcal{L}'_0$  tal que  $(H_r \cup \{\neg\zeta_n\}) \models \lambda'$  y  $K_{r+1} \models \neg\lambda'$ . Sin perder generalidad, supóngase que  $r > n$ . Entonces, por construcción,  $H_n \subseteq H_r$  y  $K_{n+1} \subseteq K_{r+1}$ , teniendo que:

$$H_r \models \zeta_n \rightarrow \lambda, \quad K_{r+1} \models \neg\lambda, \quad H_r \models \neg\zeta_n \rightarrow \lambda', \quad K_{r+1} \models \neg\lambda'.$$

Luego,

$$H_r \models (\lambda \vee \lambda'), \quad K_{r+1} \models \neg(\lambda \vee \lambda').$$

En consecuencia,

$$K_\omega \models (\lambda \vee \lambda'), \quad H_\omega \models \neg(\lambda \vee \lambda').$$

Por lo tanto,  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son separables. Esto contradice lo desmostrado anteriormente en la Proposición ♣, entonces  $\forall i \in \aleph_0$ ,  $(\zeta_i \in H_\omega)$  o  $(\neg\zeta_i \in H_\omega)$ , concluyendo que  $H_\omega$  es maximal consistente. La prueba de que  $K_\omega$  es maximal consistente se realiza de manera análoga.

Por último, se probará que el conjunto de constantes  $C$  es un conjunto de testigos para  $K_\omega$  y para  $H_\omega$  (en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente). Se mostrará que  $C$  es un conjunto de testigos para  $K_\omega$  en  $\mathcal{L}'_1$ . Sea  $\exists x\varphi(x)$  una sentencia de  $\mathcal{L}'_1$ . Como  $K_\omega$  es maximal consistente, entonces  $\exists x\varphi(x) \in K_\omega$  o  $\neg\exists x\varphi(x) \in K_\omega$ . Si  $\exists x\varphi(x) \in K_\omega$ , entonces por construcción para alguna constante  $a \in C$  se tiene que  $\varphi(a) \in K_\omega$ . Así,  $K_\omega \vdash \varphi(a)$  y, en consecuencia,  $K_\omega \vdash \exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(a)$ . Si  $\neg\exists x\varphi(x) \in K_\omega$ , entonces  $K_\omega \vdash \neg\exists x\varphi(x)$ . Luego,  $K_\omega \vdash (\neg\exists x\varphi(x)) \vee \varphi(a)$  para cualquier constante  $a \in C$ . En consecuencia,  $K_\omega \vdash \exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(a)$  para cualquier constante  $a \in C$ . En conclusión,  $C$  es un conjunto de testigos para  $K_\omega$  en  $\mathcal{L}'_1$ . La demostración de que  $C$  es un conjunto de testigos para  $H_\omega$  (en  $\mathcal{L}'_2$ ) se realiza de manera análoga. ■

**Proposición ♠:**  $K_\omega \cap H_\omega$  es una teoría maximal consistente en  $\mathcal{L}'_0$ .

*Demostración:* Como  $K_\omega \cap H_\omega \subseteq K_\omega$  y  $K_\omega \cap H_\omega \subseteq H_\omega$  y  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son teorías consistentes, entonces  $K_\omega \cap H_\omega$  es consistente. Se probará que  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente demostrando que para toda proposición  $\phi$  de  $\mathcal{L}'_0$  se cumple que  $\phi \in K_\omega \cap H_\omega$  o  $\neg\phi \in K_\omega \cap H_\omega$ . Sea una proposición  $\phi$  de  $\mathcal{L}'_0$ . Como  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son inseparables, entonces no puede ocurrir que  $\phi \in K_\omega$  y

$\neg\phi \in H_\omega$  o que  $\neg\phi \in K_\omega$  y  $\phi \in H_\omega$ . Entonces como  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son teorías maximal consistentes en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente, se concluye que  $\phi \in K_\omega \cap H_\omega$  o  $\neg\phi \in K_\omega \cap H_\omega$ . Por lo tanto,  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente. ■

Ahora se procederá a construir un modelo para la teoría  $K_\omega \cup H_\omega$ , y como  $\chi \in K_\omega$  y  $\neg\zeta \in H_\omega$  entonces se tendrá el modelo buscado para  $\chi \wedge \neg\zeta$ . Con esto terminará la demostración del teorema:

Usando la técnica de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin, que se aplica para demostrar en teorema de completitud de Gödel en [8], se puede construir un modelo para la teoría  $K_\omega$  y otro modelo para la teoría  $H_\omega$ , pues se ha demostrado (Proposición  $\Delta$ ) que dichas teorías son maximal consistentes en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente. Además, ambas tienen al conjunto numerable de nuevas constantes  $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  como un conjunto de testigos (en  $\mathcal{L}'_1$  y  $\mathcal{L}'_2$ , respectivamente).

Sea  $\mathfrak{A}$  una estructura para  $\mathcal{L}'_1$ , modelo para  $K_\omega$ , que se construirá utilizando la técnica referida anteriormente. Sea  $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  el conjunto de nuevas constantes. Para no tener problemas con las sentencias atómicas de  $K_\omega$ , se define sobre  $C$  una relación de equivalencia  $\sim$  de la siguiente manera:

Sean  $c_i \in C$  y  $c_j \in C$ , entonces

$$c_i \sim c_j \text{ si y solo si } c_i \equiv c_j \in K_\omega.$$

Notar que  $\sim$  es una relación de equivalencia porque, la relación de identidad es reflexiva, simétrica y transitiva. Sea  $\frac{C}{\sim} = \{[c_n] : c_n \in C\}$  el conjunto cociente determinado por  $\sim$ . Notar que el cardinal de  $\frac{C}{\sim}$  es a lo sumo numerable.

El universo  $A$  de la estructura  $\mathfrak{A}$  es el conjunto cociente  $\frac{C}{\sim}$ , y las interpretaciones en  $\mathfrak{A}$  para los símbolos de  $\mathcal{L}'_1$  son las siguientes:

- (1) Si  $c_1, \dots, c_n$  son constantes de  $C$  y  $R$  es un símbolo relacional  $n$ -ario de  $\mathcal{L}'_1$  entonces,

$$R^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) \iff R(c_1, \dots, c_n) \in K_\omega.$$

- (2) Si  $a$  es un símbolo constante de  $\mathcal{L}'_1$ , entonces,

$$a^{\mathfrak{A}} = [c_i],$$

para alguna constante  $c_i \in C$  tal que  $a \equiv c_i \in K_\omega$ . Tal constante existe, pues  $\vdash \exists x(a \equiv x)$ . Por tanto,  $\exists x(a \equiv x) \in K_\omega$ . Luego, como  $C$  es un conjunto de testigos para  $K_\omega$ , se concluye que existe una constante  $c_i \in C$  tal que  $(a \equiv c_i) \in K_\omega$ . Notar que por las propiedades de la relación de identidad  $\equiv$  la interpretación de  $a$  en  $A$ ,  $a^{\mathfrak{A}}$ , es única. Notar también que  $\forall j \in \mathbb{N}_0$  si  $c_j \in C$ , entonces  $c_j^{\mathfrak{A}} = [c_j]$ , pues  $c_j \equiv c_j \in K_\omega$ .

- (3) Si  $c_1, \dots, c_n$  son constantes de  $C$  y  $f$  es un símbolo funcional  $n$ -ario de  $\mathcal{L}'_1$  entonces,

$$f^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = [c_i],$$

para alguna constante  $c_i \in C$  tal que  $(f(c_1, \dots, c_n) \equiv c_i) \in K_\omega$ . Como en el caso anterior, tal constante  $c_i$  existe pues  $\exists x(f(c_1, \dots, c_n) \equiv x) \in K_\omega$  y  $C$  es un conjunto de testigos para  $K_\omega$ . Notar también que por las propiedades de la relación de identidad está garantizada la unicidad de la imagen en  $A$  de  $f^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n])$ .

Con esto termina la definición de la estructura  $\mathfrak{A}$  que es un modelo de la teoría  $K_\omega$ . Sea ahora una estructura  $\mathfrak{B}$  para  $\mathcal{L}'_2$ , modelo para  $H_\omega$ , que se construye de manera análoga a la estructura  $\mathfrak{A}$  para  $\mathcal{L}'_1$ . Los universos de  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son los siguientes (por construcción):

$$A = \{[c_n] : c_n \in C\}, \quad B = \{[c_n]' : c_n \in C\}.$$

Como  $K_\omega \cap H_\omega$  es una teoría maximal consistente en  $\mathcal{L}'_0$  (Proposición  $\spadesuit$ ), pues  $K_\omega$  y  $H_\omega$  son inseparables (Proposición  $\clubsuit$ ), se cumple que  $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$  y  $\mathfrak{B} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$  son isomorfas. Donde  $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$  es la estructura para  $\mathcal{L}'_0$  que tiene el mismo universo de  $\mathfrak{A}$  y preserva la misma interpretación de  $\mathfrak{A}$  para los símbolos de  $\mathcal{L}'_0$ , y  $\mathfrak{B} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$  es la estructura para  $\mathcal{L}'_0$  que tiene el mismo universo de  $\mathfrak{B}$  y preserva la misma interpretación de  $\mathfrak{B}$  para los símbolos de  $\mathcal{L}'_0$ .

En efecto, sea  $f : A \rightarrow B$  una función de  $A$  en  $B$  definida así:  $f([c_n]) = [c_n]'$ . Claramente,  $f$  es sobreyectiva, y  $f$  es inyectiva porque  $K_\omega \cap H_\omega$  es una teoría maximal consistente en  $\mathcal{L}'_0$ . Por tanto,  $f$  es una función biyectiva. Se demostrará que  $f$  preserva las funciones, relaciones y constantes correspondientes a  $\mathcal{L}'_0$ .

Sea  $R$  un símbolo de relación  $n$ -ario de  $\mathcal{L}'_0$ . Hay que probar que:

$$R^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}([c_1]', \dots, [c_n]').$$

Por definición se tiene que:

$$R^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n]) \Leftrightarrow R(c_1, \dots, c_n) \in K_\omega$$

Como  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente, entonces

$$R(c_1, \dots, c_n) \in K_\omega \Leftrightarrow R(c_1, \dots, c_n) \in H_\omega.$$

Luego, por definición,

$$R(c_1, \dots, c_n) \in H_\omega \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}([c_1]', \dots, [c_n]').$$

Sea  $g$  un símbolo de función  $n$ -ario de  $\mathcal{L}'_0$ . Hay que probar que:

$$f(g^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n])) = g^{\mathfrak{B}}(f([c_1]), \dots, f([c_n])).$$

Por definición de  $f$ , se obtiene que

$$g^{\mathfrak{B}}(f([c_1]), \dots, f([c_n])) = g^{\mathfrak{B}}([c_1]', \dots, [c_n]')$$

Dado que  $g(c_1, \dots, c_n) \equiv c_i \in H_\omega$  (para algún  $i \in \mathfrak{N}_0$ ), entonces

$$g^{\mathfrak{B}}([c_1]', \dots, [c_n]') = [c_i]'$$

Por definición de  $f$ , se tiene que  $[c_i]' = f([c_i])$ . Así, dado que  $g(c_1, \dots, c_n) \equiv c_i \in K_\omega$  pues  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente, se tiene

$$f([c_i]) = f(g^{\mathfrak{A}}([c_1], \dots, [c_n])).$$

Sea  $c_i$  una constante de  $C$ , entonces por definición,  $c_i^{\mathfrak{A}} = [c_i]$  y  $c_i^{\mathfrak{B}} = [c_i]'$ . En consecuencia,  $f(c_i^{\mathfrak{A}}) = f([c_i]) = [c_i]' = c_i^{\mathfrak{B}}$ .

Sea  $a$  una constante de  $\mathcal{L}'_0$  que no está en  $C$ , entonces existe un  $j \in \mathfrak{N}_0$  tal que  $c_j \in C$  y  $a \equiv c_j \in K_\omega$ . Luego,  $a \equiv c_j \in H_\omega$  pues  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente. En consecuencia, por

definición,  $a^{\mathfrak{A}} = [c_j]$  y  $a^{\mathfrak{B}} = [c_j]'$ , concluyendo que  $f(a^{\mathfrak{A}}) = a^{\mathfrak{B}}$ . Así, se tiene que  $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$  y  $\mathfrak{B} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$  son isomorfas.

Considérese ahora que  $A = B$ , es decir, que  $\forall n \in \mathbb{N}_0([c_n] = [c_n]')$ . Sea  $D$  un conjunto equipotente a  $B$  y  $h : B \rightarrow D$  una función biyectiva de  $B$  en  $D$ , entonces se construye una extensión de la estructura  $\mathfrak{B}$  al lenguaje  $\mathcal{L}'$  de la manera usual (teniendo presente la definición de estructuras isomorfas), es decir, se construye de la manera natural una estructura  $\mathfrak{D}$  para  $\mathcal{L}'$  tal que  $\mathfrak{D} \upharpoonright \mathcal{L}'_2$  y  $\mathfrak{B}$  sean isomorfas, y  $\mathfrak{D} \upharpoonright \mathcal{L}'_1$  y  $\mathfrak{A}$  sean isomorfas. En consecuencia,  $\mathfrak{D}$  es un modelo de  $T_\omega \cup H_\omega$  y, como  $\chi \in K_\omega$  y  $\neg\zeta \in H_\omega$ , entonces  $\mathfrak{D}$  es un modelo de  $\chi \wedge \neg\zeta$ .  $\square$

**Observación 3.4.2.** Como se dijo en la introducción de este artículo un corolario importante del teorema de interpolación de Craig es el teorema de definibilidad de Beth (1953):  $\Gamma(Q)$  define a  $Q$  implícitamente si y solo si  $\Gamma(Q)$  define a  $Q$  explícitamente. Donde  $Q$  es un símbolo relacional  $n$ -ario y  $\Gamma(Q)$  es un conjunto de sentencias de un lenguaje que contiene a  $Q$  y (posiblemente) a otros símbolos relacionales. Otro corolario destacado del teorema de interpolación de Craig, es el teorema de consistencia de Robinson (1956): Sean  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$  dos lenguajes y sea  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ . Supóngase que  $K$  es una teoría completa en  $\mathcal{J}$ , y  $K_1 \supseteq K$  y  $K_2 \supseteq K$  son dos teorías consistentes en  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$ , respectivamente. Entonces  $K_1 \cup K_2$  es una teoría consistente en  $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ . Una (detallada) formulación y demostración de ambos teoremas a partir del teorema de interpolación de Craig puede encontrarse en el texto [8, p. 90-91].

## 4 Algunas generalizaciones del teorema de interpolación Craig a otros sistemas lógicos

La revisión de bibliografía especializada sobre la propiedad de interpolación Craig revela que tal tema es bastante amplio y profundo, (como se dijo en la introducción de este artículo) abarca teoría de la demostración, teoría de modelos abstracta, ciencias de la computación, lógica modal, lógica intuicionista, etc. Por ejemplo, se ha investigado si dicha propiedad la cumplen otros sistemas lógicos, y entre los resultados obtenidos se encuentran los siguientes [13, 14, 19, 32], entre otros.

Antes de enunciar dichos resultados se presentarán dos maneras de formular la propiedad de interpolación Craig que existen (entre otras) en la bibliografía especializada: La *propiedad de interpolación Craig* ( $PIC^{\rightarrow}$ ), también llamada *propiedad de interpolación local* o *propiedad de interpolación fuerte*, y  $\models$ -*propiedad de interpolación Craig* ( $PIC^{\models}$ ), también llamada *propiedad de interpolación global* o *propiedad de interpolación débil*, ambas propiedades no son comparables, es decir, ninguna implica a la otra ( $PIC^{\rightarrow} \not\Rightarrow PIC^{\models}$  y  $PIC^{\models} \not\Rightarrow PIC^{\rightarrow}$ ), una prueba de ello puede encontrarse en [19, p.31]. Aunque bajo algunas condiciones (*teorema de deducción local*) se cumple que  $PIC^{\rightarrow} \Rightarrow PIC^{\models}$  (ver [19, p. 30]):

$PIC^{\rightarrow}$ : Sea  $\ell$  una lógica la cual tiene la implicación entre sus conectivas lógicas. Se dice que  $\ell$  tiene la *propiedad de interpolación Craig*, o que  $PIC^{\rightarrow}$  ocurre para ella, si para cualquier par de fórmulas  $\chi$  y  $\zeta$  del lenguaje de  $\ell$  tal que  $\models_{\ell} \chi \rightarrow \zeta$ , existe una fórmula *interpolante* en  $\ell$ . Es decir, existe una fórmula  $\lambda$  del lenguaje de  $\ell$ , con un lenguaje común a  $\chi$  y  $\zeta$  tal que:  $\models_{\ell} \chi \rightarrow \lambda$  y  $\models_{\ell} \lambda \rightarrow \zeta$ .

**Observación 4.1.** En el caso de que la lógica  $\ell$  no contenga fórmulas constantes las cuales denoten *verdad* y *falsedad*, la existencia de una interpolante para  $\models_{\ell} \chi \rightarrow \zeta$  es requerida solo en el caso de  $\not\models_{\ell} \neg\chi$  y  $\not\models_{\ell} \zeta$ . Un ejemplo de una lógica con estas características es la lógica de primer orden sin identidad ( $\ell_{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0^*}$ ), esta lógica no tiene  $PIC^{\rightarrow}$  pues, por ejemplo, no existe interpolante

para  $\models_{\aleph_0 \aleph_0^*} Q(x) \rightarrow (T(x) \leftrightarrow T(x))$ . Sin embargo, el teorema de interpolación ocurre para tal lógica si se agrega a la definición  $PIC^{\rightarrow}$  la observación anterior.

$PIC^{\models}$ : Sea  $\ell$  una lógica. Se dice que  $\ell$  tiene la  $\models$ -*propiedad de interpolación Craig*, o que  $PIC^{\models}$  ocurre para ella, si para cualquier par de fórmulas  $\chi$  y  $\zeta$  del lenguaje de  $\ell$  tal que  $\chi \models_{\ell} \zeta$ , existe una fórmula *interpolante* en  $\ell$ . Es decir, existe una fórmula  $\lambda$  del lenguaje de  $\ell$ , con un lenguaje común a  $\chi$  y  $\zeta$  tal que:  $\chi \models_{\ell} \lambda$  y  $\lambda \models_{\ell} \zeta$ . (Aplica para  $PIC^{\models}$  la misma observación que para  $PIC^{\rightarrow}$ ).

Notar que  $PIC^{\rightarrow}$  depende de la noción de validez y  $PIC^{\models}$  depende de la relación de consecuencia lógica.

En la bibliografía consultada se pueden encontrar varias tablas que resumen algunos resultados obtenidos, dichos resúmenes son con  $PIC^{\rightarrow}$  o con  $PIC^{\models}$ , y ellos tienen algunos resultados similares, se elige presentar aquí una parte de la tabla resumen que se encuentra en [19, p. 40], la cual se hace considerando  $PIC^{\rightarrow}$ . La elección de esta tabla resumen se debe a que en la misma aparecen sistemas lógicos no clásicos, además de los clásicos, algo que no ocurre con otros resúmenes revisados:

#### 4.1 Lógicas que cumplen $CIP^{\rightarrow}$

1. Lógica proposicional, ver [19, p. 40]. En este trabajo se probó que también cumple con  $PIC^{\models}$ .
2. Lógica de primer orden, (ver Craig, [6, 7]). En este trabajo se probó que también cumple con  $PIC^{\models}$ .
3.  $\ell_{\aleph_1, \aleph_0}$ : lógica infinitaria que admite conjunciones y disyunciones infinitas numerables. (Lopez-Escobar, 1965), ver [19, p. 40]. También cumple con  $PIC^{\models}$  (Lopez-Escobar, 1965), ver [32].
4. Lógica modal proposicional T. (Gabbay, 1972), ver [19, p. 40].
5. Lógica modal proposicional S4. (Gabbay, 1972), ver [19, p. 40].
6. Lógica modal proposicional S5. (Schumm, 1976). ver [19, p. 40].
7. Lógica modal en primer orden T (sin la fórmula de Barcan), (Gabbay, 1972), ver [19, p. 40].
8. Lógica modal en primer orden S4 (sin la fórmula de Barcan), (Gabbay, 1972), ver [19, p. 40].
9. Lógica intuicionista de predicados, (Schütte, 1962), ver [19, p. 40].

#### 4.2 Lógicas que no cumplen $CIP^{\rightarrow}$

1. Lógica de segundo orden ( $\ell_{II}$ ), (Lopez-Escobar, Barwise), ver [13]. (*Observación:* La lógica de segundo orden cumple con  $PIC^{\models}$  [29, p. 163-164])
2. Lógicas con cuantificadores generalizados:  $\ell_{Q_{\alpha}}$ , para todo ordinal  $\alpha \geq \aleph_0$ .  $Q_{\alpha} x P x \iff \{x : P(x)\} \mid \geq \aleph_{\alpha}$ , (Lopez-Escobar, Barwise), ver [13].

3. Lógicas infinitarias:  $\ell_{\alpha\aleph_0}$ , para todo  $\alpha > \aleph_1$ , o  $\alpha = \infty$ . ( $\ell_{\alpha\aleph_0}$  admite conjunciones y disyunciones de cardinal menor que  $\alpha$ , y  $\ell_{\infty\aleph_0}$  admite conjunciones y disyunciones de cualquier cardinalidad), (Malitz, 1971), ver [19, p. 40]. También no cumple con  $PIC^{\models}$ . (Malitz, 1971), ver [32].
4. Lógica modal S5 en primer orden, (Fine, 1979), ver [19, p. 40].
5. Las lógicas con varios valores de verdad de Lukasiewicz, para  $n > 2$ , (Krzystek y Zachorowski, 1977), ver [19, p. 30].
6. Lógica de la relevancia  $R$ , (Urquart, 1999), ver [19, p. 40].
7. Lógica Entailment  $E$ , (Urquart, 1999), ver [19, p. 40].

## 5 Una caracterización de la lógica infinitaria $\ell_{\aleph_1\aleph_0}$ usando interpolación en el contexto de la teoría de modelos abstracta

Por los resultados presentados en la sección anterior (4) se tiene que la lógica  $\ell_{\aleph_1\aleph_0}$  satisface el teorema de interpolación Craig (Lopez-Escobar, 1965). También se tiene que Scott y Engeler probaron (de manera independiente) que:

- ( $\star$ ) *Toda estructura numerable para un lenguaje numerable puede ser caracterizada, salvo isomorfismo, con una sentencia de  $\ell_{\aleph_1\aleph_0}$  (ver [23, p. 17]).*

Después de eso Makowsky probó en 1973 un teorema que caracteriza a  $\ell_{\aleph_1\aleph_0}$  con tal propiedad ( $\star$ ) e interpolación (ver [23, p. 23]), la caracteriza como la menor lógica (la lógica de menor poder expresivo) que satisface la propiedad de interpolación de Craig y cumple con ( $\star$ ). Para formular el teorema primero se deben presentar dos conceptos fundamentales de la teoría de modelos abstracta: (1) “lógica abstracta”,  $\ell$ , y (2) cuándo una lógica abstracta  $\ell'$  es “al menos más fuerte” que otra lógica abstracta  $\ell$ :  $\ell \leq \ell'$ . Se formulan tales conceptos a continuación siguiendo los textos [12, p. 193-194] y [8, p. 128]:

**Definición 5.1.** Una *lógica abstracta* (o sistema lógico),  $\ell$ , es un par ordenado  $(S, \models_{\ell})$  donde  $S$  es una función y  $\models_{\ell}$  una relación binaria que cumplen con las siguientes propiedades:

1.  $S$  asocia a cualquier lenguaje  $\mathcal{L}$  un conjunto  $S(\mathcal{L})$ , el conjunto de las sentencias de  $\ell$  correspondientes al lenguaje  $\mathcal{L}$ , las  $S$ -sentencias de  $\ell$ .
2. Si  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$ , entonces  $S(\mathcal{L}) \subseteq S(\mathcal{L}^*)$ .
3. Si  $\mathfrak{U} \models_{\ell} \phi$  (es decir,  $\mathfrak{U}$  y  $\phi$  están relacionadas según  $\models_{\ell}$ ), entonces para algún lenguaje  $\mathcal{L}$ ,  $\mathfrak{U}$  es una estructura para  $\mathcal{L}$  y  $\phi \in S(\mathcal{L})$ .
4. (*Propiedad de isomorfismo*). Si  $\mathfrak{U} \models_{\ell} \phi$  y  $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{X}$ , entonces  $\mathfrak{X} \models_{\ell} \phi$ .
5. (*Propiedad de reducción*). Si  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$ ,  $\phi \in S(\mathcal{L})$ , y  $\mathfrak{U}$  es una estructura para  $\mathcal{L}^*$ , entonces:

$$\mathfrak{U} \models_{\ell} \phi \iff \mathfrak{U} \upharpoonright \mathcal{L} \models_{\ell} \phi.$$

**Ejemplo 5.1.** *Algunos ejemplos de lógicas abstractas son:  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ ,  $\ell_{II}$ ,  $\ell_{\aleph_1 \aleph_0}$ ,  $\ell_{Q_\alpha}$ , (ver [12, p. 194]).*

Si  $\ell$  es una lógica abstracta y  $\phi \in S(\mathcal{L})$ , entonces:

$$\text{Mod}_\ell^{\mathcal{L}}(\phi) = \{\mathfrak{U} : \mathfrak{U} \text{ es una estructura para } \mathcal{L} \text{ y } \mathfrak{U} \models_\ell \phi\}.$$

**Definición 5.2.** Sea  $\ell$  y  $\ell'$  dos lógicas abstractas.

1.  $\ell'$  es al menos más fuerte que  $\ell$ ,  $\ell \leq \ell'$ , si y solo si, para cualquier lenguaje  $\mathcal{L}$  y para cualquier  $\phi \in S(\mathcal{L})$  existe  $\psi \in S'(\mathcal{L})$  tal que:

$$\text{Mod}_\ell^{\mathcal{L}}(\phi) = \text{Mod}_{\ell'}^{\mathcal{L}}(\psi).$$

2.  $\ell$  y  $\ell'$  son igual de fuertes ( $\ell$  y  $\ell'$  tienen el mismo poder expresivo),  $\ell \sim \ell'$ , si y solo si  $\ell \leq \ell'$  y  $\ell' \leq \ell$ .

**Ejemplo 5.2.** *Algunos ejemplos son:  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0} \leq \ell_{II}$ ;  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0} \leq \ell_{\aleph_1 \aleph_0}$ ;  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0} \leq \ell_{Q_1}$ ;  $\ell_{Q_1} \not\leq \ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ ;  $\ell_{II} \not\leq \ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ ;  $\ell_{\aleph_1 \aleph_0} \not\leq \ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ . Demostraciones de algunos de estos resultados pueden encontrarse en [12].*

Ahora, finalmente, se formula el teorema que caracteriza a  $\ell_{\aleph_1 \aleph_0}$ :

**Teorema 5.1.** *Sea  $\ell$  una lógica abstracta que satisface el teorema de interpolación de Craig y, además, se cumple que toda estructura numerable para un lenguaje numerable puede ser caracterizada, salvo isomorfismo, con una sentencia de  $\ell$ , entonces  $\ell_{\aleph_1 \aleph_0} \leq \ell$ .*

## 6 Problemas abiertos en teoría de modelos abstracta relacionados con la propiedad de interpolación

A continuación se presenta uno de los primeros problemas abiertos (clásicos) que fueron planteados en relación con las lógicas abstractas, los cuantificadores generalizados, la propiedad de interpolación y  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$ . Dicho problema contribuyó con el desarrollo de la teoría de modelos abstracta y fue formulado (por ejemplo) por Feferman, Friedman y Shelah (ver [33, p. 2]), más información sobre el mismo puede encontrarse en [33], el autor de este artículo no tiene noticias de que halla sido resuelto:

**Problema abierto 1 :** *>Existe una lógica abstracta  $\ell$  que sea extensión propia de  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$  y que satisfaga las siguientes propiedades: compacidad numerable, y interpolación Craig?*

Una lógica abstracta  $\ell$  tiene la propiedad de *compacidad numerable* si satisface el teorema de compacidad (Teorema 3.3.2) para todo conjunto numerable de sentencias  $\Sigma \subseteq \text{Lenguaje de } \ell$ . Por ejemplo, la lógica  $\ell_{Q_1}$  es numerablemente compacta [13, p. 18], [12, p. 142-143] y [8, p. 134]. Sin embargo, ella no satisface la propiedad de interpolación de Craig como aparece referido en el resumen de sistemas lógicos que no satisfacen la propiedad de interpolación expuesta anteriormente en la sección 4.

**Problema abierto 2:** *>Existe una lógica abstracta  $\ell$  que sea extensión propia de  $\ell_{\aleph_0 \aleph_0}$  y sea "razonable"? (ver [13, p. 22])*

Donde se ha sugerido que para que una lógica  $\ell$  sea “razonable” ella debe satisfacer compacidad numerable y  $\Delta$ -interpolación, o al menos la propiedad de Beth. La definición (y referencias) de estas propiedades puede encontrarse en [13], entre otros. Pero intuitivamente se puede decir que  $\Delta$ -interpolación es una propiedad más débil que la propiedad de interpolación (interpolación implica  $\Delta$ -interpolación) y que la propiedad de Beth significa que “definibilidad explícita” es equivalente a “definibilidad implícita” (ver [8]). Por ejemplo, la lógica  $\ell_{Q_1}$  es numerablemente compacta, pero ella no satisface  $\Delta$ -interpolación (ver [13, p. 21]).

Otros interesantes problemas abiertos sobre la propiedad de interpolación en el contexto de la teoría de modelos abstracta pueden encontrarse en [13, 33], entre otros.

## 7 Conclusiones

Se cumplió con el objetivo de presentar dos demostraciones del teorema de interpolación: Una para  $\ell_{prop}$  y otra para  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$ . Ambas en el contexto de la teoría de modelos. Vale la pena resaltar que la demostración que se realizó para  $\ell_{prop}$  es constructiva y usa el principio de inducción matemática. Tal demostración proporciona un procedimiento efectivo para construir una proposición  $\lambda$  interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$ , para cualquier par de proposiciones  $\chi$  y  $\zeta$  que cumplan con las hipótesis del teorema. Dicho procedimiento usa las letras proposicionales que están en  $\chi$  y no están en  $\zeta$  hasta eliminarlas todas sustituyéndolas por una tautología ( $s \vee \neg s$ ) o por una contradicción ( $s \wedge \neg s$ ) de una manera específica (utilizando disyunciones) para lograr construir la proposición interpolación. La demostración realizada para  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$  no es constructiva, es decir, se demuestra la existencia de la sentencia  $\lambda$  interpolación de  $\chi$  y  $\zeta$  por reducción al absurdo sin ofrecer un procedimiento efectivo para calcularla. Es importante destacar que la técnica usada, para dicha prueba (Henkin, 1963), es una ampliación del método de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin (1949), mediante la noción de “teorías inseparables”. El nuevo método de construcción de modelos resultante, permite construir un modelo para la unión de dos teorías  $K_0 \cup H_0$  en un lenguaje  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , respectivamente, las cuales son consistentes e inseparables, expandiéndolas simultáneamente (por inducción y en zigzag) a dos teorías  $K_\omega$  y  $H_\omega$  maximal consistentes e inseparables en un lenguaje extendido  $\mathcal{L}_1 \cup C$  y  $\mathcal{L}_2 \cup C$ , respectivamente, donde  $C$  es un conjunto numerable de nuevos símbolos constantes que funciona como testigos para ambas. También se cumple (por la maximal consistencia e inseparabilidad) que la teoría  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente. El modelo buscado  $\mathfrak{D}$  para  $K_0 \cup H_0$  se construye (Henkin, 1963) aplicando el hecho de que  $K_\omega \cap H_\omega$  es maximal consistente a dos modelos previos: Un modelo  $\mathfrak{A}$  para  $K_\omega$  y un modelo  $\mathfrak{B}$  para  $H_\omega$  que se construyen mediante el método de Henkin de 1949.

Adicionalmente se presentaron ejemplos de aplicaciones o generalizaciones de la propiedad de interpolación a otros sistemas lógicos distintos a  $\ell_{prop}$  y  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$  como por ejemplo: lógicas infinitarias, lógicas con cuantificadores generalizados, lógica de segundo orden, lógicas no clásicas, lógicas abstractas, etc. Y también se ofrecieron referencias de problemas abiertos en el contexto de la teoría de modelos abstracta relacionados con la propiedad de interpolación, como por ejemplo: *>Existe una lógica abstracta  $\ell$  que sea extensión propia de  $\ell_{\aleph_0\aleph_0}$  y que sea “razonable”?*, donde se ha sugerido que para que una lógica sea “razonable” ella debe satisfacer compacidad numerable y  $\Delta$ -interpolación, o al menos la propiedad de Beth.



## Referencias

- [1] E. Amir. *Interpolation theorems for Nonmonotonic Reasoning Systems*. Appear in 8th European Conference on Logic in Artificial Intelligence (JELIA 2002).
- [2] A. Anderson and R. Belnap. *Entailment. The Logic of relevance and necessity*. Princeton University Press. 1975.
- [3] J. Bell. *Infinitary Logic*. Enciclopedia de Filosofía de la universidad de Stanford. 2016. <https://plato.stanford.edu/entries/logic-infinitary/>
- [4] E. Beth. *On Padoa's method in the theory of definition*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56 = Indagationes Math., 15: 330-339. (1953).
- [5] J. van Benthem. *Interpolation, Annotated Proofs, and Inference Across Models*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. <http://math.stanford.edu/~feferman>.
- [6] W. Craig. *Linear reasoning. A new form the Herbrand-Gentzen theorem*. The Journal of Symbolic Logic 22 (1957), n° 3, 250-268.
- [7] W. Craig. *Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory*. The Journal of Symbolic Logic 22 (1957), n° 3, 269-285.
- [8] C. Chang and H. Keisler. *Model Theory*. Dover Publications, Inc. New York. 2012.
- [9] C. Di Prisco. *Introducción a la lógica Matemática*. EMALCA AMAZONIA. 2009.
- [10] C. Di Prisco. *Inmersiones elementales y grandes cardinales*. Notas no publicadas. 1982.
- [11] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la lógica*. Universidad Nacional Autónoma de México. México. 2004.
- [12] H. Ebbinghaus, J. Flum and W. Thomas. *Mathematical Logic*. Springer-Verlag. New York. 1989.
- [13] S. Feferman. *Harmonious Logic: Craig's Interpolation Theorem and its Descendants*. Interpolations Conference in Honor o William Craig. Universidad de Stanford. 2007. <http://math.stanford.edu/~feferman>.
- [14] D. Gabbay and L. Maksimova. *Interpolation and Definability: modal and Intuitionistic Logics*. Clarendon Press. Oxford. 2005.
- [15] F. Galindo. *Una presentación de la demostración directa del teorema de compacidad de la lógica de primer orden que usa el método de ultraproductos*. UNA INVESTIGACIÓN, Vol. VIII, N° 15 (2016).
- [16] K. Gödel. *Obras completas*. Alianza. Madrid. 1981.
- [17] L . Henkin. *The completeness of the firs-orden functional calculus*. The Journal of Symbolic Logic 14 (1949), 159-166.

- 
- [18] L. Henkin. *An extension of the Craig-Lyndon interpolation theorem*. The Journal of Symbolic Logic **28** (1963), 201-216.
- [19] E. Hoogland. *Definability and Interpolation. Model-Theoretic investigations*. Institute for Logic, Language and Computation. Universiteit van Amsterdam. Promotor: Prof. dr. D. H. J. de Jongh. 2001.
- [20] G. Hughes y M. Cresswell. *Introducción a la lógica modal*. Tecnos. Madrid. 1973.
- [21] G. Hunter. *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden*. Paraninfo. Madrid. 1981.
- [22] T. Jech. *Set Theory*. Springer. New York. 2000.
- [23] J. Makowsky. *Model Theory in computer science: My Own Recurrent themes (and some lessons I learned)*. Faculty of Computer Science Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel. 2016.
- [24] M. Manzano. *Teoría de modelos*. Alianza. Madrid. 1989.
- [25] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. U.S.A. 2009.
- [26] A. Nerode y R. Shore. *Logic for Applications*. Springer-Verlag. New York. 1993.
- [27] A. Robinson. *A result on consistency and its application to the theory of definition*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 59 = Indag. Math., **18**, 47-58. 1956.
- [28] H. Royden. *Real Analysis*. Pearson. 2010.
- [29] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism. A Caso for Second-order Logic*. Clarendon Press. Oxford. 2002.
- [30] M. Sundström. *A Pedagogical History of Compactness*. The American Mathematical Monthly, Vol. 122, N° 7, (August-September 2015), 619-635.
- [31] C. Tinelli. *The Impact of Craig's Interpolation Theorem in Computer Science*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. <http://math.stanford.edu/~feferman>.
- [32] J. Väänänen. *The Interpolation Theorem in Abstract Model Theory*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. <http://math.stanford.edu/~feferman>.
- [33] J. Väänänen. *Barwise: Abstract Model Theory and Generalized Quantifiers*. The Bulletin Symbolic Logic. Volumen **10**, Número 1, Marzo 2004.

# Generalización del estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos

*Generalization of the Kaplan-Meier estimator for fuzzy lifetimes*

José A. González C. (jgonzalez@upla.cl)

Laboratorio de investigación Lab[e]saM, Departamento de Matemática y Estadística  
Universidad de Playa Ancha, Chile.

## Resumen

Esta propuesta entrega una generalización del estimador de Kaplan-Meier, en la cual los tiempos de vida son considerados números difusos. Esta propuesta se sitúa en un contexto mucho más real para el proceso de medición, considerando la imprecisión propia de la naturaleza humana. Es necesario para ello la definición de algunos conceptos como frecuencia relativa y clases difusas. Se presentan algunos resultados asintóticos y finalmente una aplicación y comparación con la metodología convencional de estimación.

**Palabras y frases clave:** conjunto difusos, número difuso, función de pertenencia, Kaplan-Meier, asintótico.

## Abstract

This proposal provides a generalization of the Kaplan-Meier estimator, where lifetimes are considered fuzzy numbers. This proposal is consistent with a much more realistic context to the measurement process considering the imprecision of human nature. To achieve our goal, concepts such as relative frequency and fuzzy classes are given. Moreover, some asymptotic results are presented, together with an application and comparison with the conventional estimation method.

**Key words and phrases:** fuzzy set, fuzzy number, membership function, Kaplan-Meier, asymptotic.

## 1 Introducción

La importancia del estimador producto límite o Kaplan-Meier es indiscutible, sin embargo los valores numéricos usados para representar las mediciones son idealizaciones de informaciones imprecisas. Esos tipos de imprecisiones están relacionados con el proceso de medición, ya sea en el registro y cuantificación del tiempo de vida. La certeza o verdad, la duda o incerteza, han estado en el centro de la epistemología del conocimiento. En la filosofía griega, Platón localiza la certeza en el "mundo de las ideas", en oposición al "mundo sensible", en la cual tendríamos solo aproximaciones de valores del mundo de las ideas.

---

Recibido 31/03/2016. Revisado 28/03/2017. Aceptado 19/07/2017.

MSC (2010): Primary 62N86 ; Secondary 20M20.

Autor de correspondencia: José A. González C.

La principal motivación de la teoría difusa es la construcción de una estructura cuantitativa formal capaz de capturar la imprecisión del conocimiento humano, esto es como ese conocimiento es formulado en un lenguaje natural. La teoría de conjuntos difusos es la conexión entre los modelos matemáticos tradicionales y la representación mental que es generalmente imprecisa [8].

En aplicaciones de ingeniería, el tiempo de vida de un sistema puede ser difícil de medir, debido a la complejidad del sistema [13]. En esta situación no considerar la imprecisión puede llevar a resultados irreales [18]. Por tanto, los métodos para estimar la función no paramétrica de sobrevivencia usando el método de Kaplan-Meier debe ser adaptada a la situación de tiempos de vida difusos, con la finalidad de obtener resultados realistas. La teoría de conjuntos difusos es una importante herramienta matemática para lidiar con problemas de incerteza, imprecisiones o verdades parciales, permitiendo dar tratabilidad a problemas del mundo real, muchas veces con soluciones a bajo costo. Así la generalización del estimador de Kaplan-Meier considera los tiempos de vida como números difusos, sin embargo para el desarrollo del proceso de estimación bajo este concepto es necesario de la definición de algunos elementos, tales como frecuencia relativa y orden de los tiempos de vida.

## 2 Preliminares

Es importante indicar que son usados algunos conceptos y terminologías de la teoría de conjuntos difusos basados principalmente en los trabajos de [21], [8] y [15].

**Definición 2.1.** Conjunto difuso. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$  un subconjunto no vacío del espacio Euclidiano  $k$ -dimensional. Un conjunto difuso  $\tilde{A}$  es un conjunto de pares ordenados  $\tilde{A} = \{(\omega, \mu_{\tilde{A}}(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ , donde  $\mu_{\tilde{A}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  es llamada función de pertenencia para el conjunto difuso  $\tilde{A}$ . Adicionalmente, el conjunto difuso vacío  $\tilde{\emptyset}$  es caracterizado por  $\mu_{\tilde{\emptyset}}(\omega) = 0$  para todo  $\omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ .

Observemos que la teoría de conjuntos difusos extiende la teoría de conjuntos convencionales, relajando el concepto de pertenencia de los elementos en sus respectivos conjuntos. Por un lado, en la teoría de los conjuntos convencionales se considera que  $\omega \in A$  (pertenencia uno) o  $\omega \notin A$  (pertenencia cero), es decir es una operación binaria. Por otro lado, la teoría de los conjuntos difusos considera un grado de pertenencia que varía en el intervalo  $[0, 1]$ , es decir,  $\omega$  es un elemento de  $A$  con un cierto grado y ese mismo elemento  $\omega$  es también un elemento de  $A^c$  con otro grado. La teoría de probabilidad es contruida sobre la teoría de conjuntos usuales y provee un número en el intervalo  $[0, 1]$  para describir el grado de certeza que  $\omega \in A$ . La principal diferencia entre la teoría de probabilidades y la teoría de conjuntos difusos se encuentra en la definición de un conjunto: la primera considera los conjuntos tradicionales el otro considera los conjuntos difusos. Como veremos en esta sección, las propiedades de los conjuntos difusos son muy diferentes de las tradicionales. La aplicabilidad de los conjuntos difusos es enorme en la modelación lingüística[22], análisis de imagen, diseño de dispositivos electrónicos [9], etc.

De la Definición 2.1, podemos representar un conjunto común usando una notación difusa. Note que si  $\Omega = \mathbb{R}^k$ , cualquier subconjunto usual  $B \subseteq \mathbb{R}^k$  es representado por definición por  $\mu_{\tilde{B}}(\omega) = 1$  para todo  $\omega \in B$  y  $\mu_{\tilde{B}}(\omega) = 0$  para todo  $\omega \notin B$ . Por ejemplo, sea  $\Omega = \mathbb{R}$  y  $B = (a, b)$  un intervalo en la recta real con  $a < b$ . Entonces,  $B$  puede ser escrito en términos de un conjunto difuso como  $\tilde{B} = \{(\omega, 1) : \forall \omega \in B\} \cup \{(\omega, 0) : \forall \omega \notin B\}$ .

Es importante resaltar que funciones de pertenencia y de densidad de probabilidad son intrínsecamente diferentes. Por ejemplo, si  $\pi(\omega)$  es una función de densidad con  $\pi(\omega) \geq 0$  para todo  $\omega \in \Omega$  y  $\int_{\Omega} \pi(\omega) d\omega = 1$ , podemos obtener una función de pertenencia, definiendo

$\mu_{\tilde{A}}(\omega) = C^{-1}\pi(\omega)$ , desde que  $C = \sup_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) < \infty$ . Sin embargo, el inverso no es necesariamente verdadero, debido a que una función de pertenencia no necesita ser integrable sobre  $\Omega$ .

Para las funciones de densidad de probabilidad, es común definir un soporte para caracterizar el conjunto de todos los puntos con una densidad positiva. Para una función de pertenencia tenemos la misma definición para representar el conjunto de todos los puntos con pertenencia positiva en el conjunto difuso. La Definición 2.2 formaliza este concepto.

**Definición 2.2.** El soporte de un conjunto difuso  $\tilde{A}$  es definido como  $supp(\tilde{A}) = \{\omega \in \Omega : \mu_{\tilde{A}}(\omega) > 0\}$ .

Note que un elemento  $\omega$  tiene pertenencia plena en su respectivo conjunto difuso, cuando su pertenencia a él es uno. En este contexto el elemento  $\omega$  contiene completamente todos los recursos exigidos por el conjunto difuso. La Definición 2.3 formaliza el conjunto de todos los puntos con pertenencia plena, esto es, todos los puntos donde sus funciones de pertenencia son iguales a 1.

**Definición 2.3.** El núcleo de un conjunto difuso  $\tilde{A}$  es definido como  $Nucleo(\tilde{A}) = \{\omega \in \Omega : \mu_{\tilde{A}}(\omega) = 1\}$ .

Cuando el núcleo tiene por lo menos un elemento tenemos un conjunto difuso normal, (ver Definición 2.4).

**Definición 2.4.** Un conjunto difuso  $\tilde{A}$  es llamado normal si su núcleo es no vacío. En otras palabras, existe por lo menos un punto  $\omega \in \mathbb{R}^k$  con  $\mu_{\tilde{A}}(\omega) = 1$ .

Sea  $\tilde{A}$  un conjunto difuso normal, luego mientras más próximo  $\mu_{\tilde{A}}(\omega_0)$  está de uno, más creemos que  $\omega_0$  se encuentra en  $core(\tilde{A})$  y mientras más próximo  $\mu_{\tilde{A}}(\omega_0)$  está de cero, más creemos que  $\omega_0$  no está en  $core(\tilde{A})$ . Esto es, el grado de pertenencia de un elemento puede ser también visto como una medida de incerteza [22].

Sean  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  dos conjuntos difusos con función de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$  y  $\mu_{\tilde{B}}(\omega)$ , respectivamente, de acuerdo con [21] [19], si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ , entonces las operaciones comunes son definidas de la siguiente forma:

1.  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(\omega) \leq \mu_{\tilde{B}}(\omega)$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .
2.  $\tilde{A} \equiv \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(\omega) = \mu_{\tilde{B}}(\omega)$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .
3.  $\tilde{A}^c$  es el complemento de  $\tilde{A} \iff \mu_{\tilde{A}^c}(\omega) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\omega)$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .
4.  $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{C}}(\omega) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(\omega), \mu_{\tilde{B}}(\omega)\}$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .
5.  $\tilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{D}}(\omega) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(\omega), \mu_{\tilde{B}}(\omega)\}$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .

Basado en las definiciones anteriores, si consideramos  $\tilde{\Omega} = \{(\omega, 1); \omega \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^k\}$  como el conjunto difuso universal, entonces para cualquier conjunto difuso  $\tilde{A}$  con función de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ , tenemos que  $\tilde{A} \subseteq \tilde{\Omega}$ . Además si existe  $\omega_0 \in \Omega$  tal que  $\max\{\mu_{\tilde{A}}(\omega_0), \mu_{\tilde{A}^c}(\omega_0)\} < 1$  tenemos que  $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq \tilde{\Omega}$ . Por otro lado, si existe  $\omega_0 \in \Omega$  tal que  $\min\{\mu_{\tilde{A}}(\omega_0), \mu_{\tilde{A}^c}(\omega_0)\} > 0$ , tenemos que  $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \tilde{\emptyset}$ . Observemos que estas propiedades no atienden las leyes del tercero excluido y de contradicción de la teoría de los conjuntos clásicos [10, 19].

El concepto de conjunto difuso es muy amplio y difícil de lidiar sin algunas especificaciones adicionales. En este contexto la próxima definición permite especificar un número difuso, que es una extensión natural de los números reales. Sin embargo, esta última definición depende de la convexidad en el contexto difuso, que se define a continuación.

**Definición 2.5.** [21] Un conjunto  $\tilde{A}$  es convexo, si y solo si

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(\omega_1), \mu_{\tilde{A}}(\omega_2)\}$$

para todo  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  y  $\lambda \in [0, 1]$ .

Observemos que el concepto de convexidad desde la perspectiva difusa difiere de la definición clásica de convexidad en análisis funcional. Un intervalo difuso  $\tilde{A}$  es un conjunto difuso que satisface la condición de convexidad y normalidad, de modo que el intervalo es construido por todos los elementos con función de pertenencia 1. Un número difuso  $\tilde{A}$  es un número difuso cuando la cardinalidad del  $Nucleo(\tilde{A})$  es igual que 1 [15]. Los números e intervalos difusos son útiles para representar imprecisiones y medidas de intervalos, respectivamente. Estos conceptos tienen múltiples aplicaciones, por ejemplo, en inteligencia artificial, procesamiento de imágenes, reconocimiento de voz, ciencias biológicas y médicas, investigación de operaciones, análisis de decisión y procesamiento de información, economía, geografía, psicología, lingüística, etc. Más aplicaciones pueden ser encontradas en [8] y [11].

En [8] fueron definidas las clases de funciones de pertenencia LR (left and right) definidas sobre  $\Omega = \mathbb{R}$ , es decir, la clase de funciones de pertenencia que pueden ser enteramente caracterizadas por tres parámetros,  $(m, \alpha, \beta)$ , y dos funciones  $L$  y  $R$ . La próxima definición está relacionada con el concepto de números difuso tipo LR.

**Definición 2.6.** El número difuso  $\tilde{A}$  es dicho tipo LR si existen dos funciones decrecientes  $L, R : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  con  $L(0) = R(0) = 1$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} L(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} R(\omega) = 0$  y números reales positivos  $m \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  tal que

$$\mu_{\tilde{A}}(\omega) = \begin{cases} L\left(\frac{m - \omega}{\alpha}\right), & \text{para } \omega \leq m, \\ R\left(\frac{\omega - m}{\beta}\right), & \text{para } \omega \geq m, \end{cases}$$

donde  $m$  es llamado el centro de  $\tilde{A}$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son llamados propagaciones izquierda y derecha respectivamente.

Si  $\alpha = \beta$ ,  $\tilde{A}$  es llamado número difuso simétrico. Es importante resaltar que, para una función simétrica, se tiene la igualdad  $L\left(\frac{m - \omega}{\alpha}\right) = R\left(\frac{\omega - m}{\beta}\right)$  para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si  $L$  y  $R$  son segmentos que comienzan en los puntos  $(a_l, 0)$  y  $(a_r, 0)$ , respectivamente, y finalizan en  $(a_m, 1)$ , entonces se dice que  $\tilde{A}$  es un número difuso triangular.

### 3 Método

Cuando es asumida la naturaleza difusa de los tiempos de vida se refiere a la Definición 2.6. Por razones prácticas no tendría sentido tener soportes de amplitud infinita, ya que las expansiones son conocidas.

### 3.1 El estimador de Kaplan-Meier

El análisis de sobrevivencia y particularmente la metodología de estimación de Kaplan-Meier, es una importante línea de investigación, comenzando con un fuerte desarrollo aplicado, después desarrollos teóricos formales orientados al estudio de la normalidad asintótica del estimador [4], Extensiones dimensionales [6, 7, 17] y generalizaciones [1]. [2] estudia las propiedades de acotado y desigualdades del estimador de Kaplan-Meier, asociados con el estudio de varianza [16].

Actualmente el estimador de Kaplan-Meier es utilizado fuertemente en salud humana, permitiendo presentar mejores resultados, controles e identificación de los puntos de impacto significativo [20, 14], es actualmente una línea establecida de investigación.

La expresión general del estimador de Kaplan-Meier es presentada considerando los siguientes preliminares:

1.  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , son los tiempos diferentes ordenados de acuerdo con las fallas.
2.  $d_j$  el número de fallas en  $t_j, j = 1, \dots, k$ , y
3.  $n_j$  el número de individuos en riesgo en el tiempo  $t_j$ , esto es, individuos que no fallaron y no fueron censurados hasta el momento inmediatamente antes de  $t_j$ .

Luego el estimador de Kaplan-Meier es definido como:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j: t_j < t} \left( \frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j: t_j < t} \left( 1 - \frac{d_j}{n_j} \right).$$

El estimador de Kaplan-Meier y otros estimadores tienen variaciones que deben ser descritas en términos de estimaciones intervalares. La expresión para la varianza asintótica del estimador de Kaplan-Meier, es dada por:

$$\widehat{Var}(\hat{S}(t)) = [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j: t_j < t} \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)},$$

esta expresión es conocida como fórmula de Greenwood y es basada en las propiedades del estimador de máxima verosimilitud. Para  $t$  fijo,  $\hat{S}(t)$  tiene distribución normal asintótica, luego un intervalo aproximado de  $100(1 - \alpha)\%$  de confianza para  $S(t)$  es dado por:

$$\hat{S}(t) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{S}(t))}.$$

Esos elementos serán usados para comparar los resultados. Así para definir el estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos, es necesario de dos desarrollos teóricos, la definición de un orden, el cual no será abordado en este artículo y la definición del concepto de frecuencia relativa en números difusos.

### 3.2 Frecuencia relativa difusa

El histograma es uno de los primeros y uno de los más comunes métodos de estimación de densidad. Es importante tener en mente que el histograma es una técnica de suavizado usado para estimar la densidad desconocida y por tanto merece alguna consideración. Se intenta reunir

los datos por contéo de cuántos datos o puntos pertenecen a un pequeño intervalo difuso de amplitud  $h$ . Este tipo de intervalos es llamado bin. Sin pérdida de generalidad, se considera un bin centrado en 0, denominado intervalo difuso  $\tilde{H} = \{(x, 1) : \frac{-h}{2} \leq x < \frac{h}{2}\}$ .

La estimación natural de esta probabilidad es la frecuencia relativa de las observaciones en este intervalo de tiempo, es decir, se cuenta el número de observaciones en el intervalo y dividimos por el número total de observaciones, luego una generalización difusa debería ser similar.

Por tanto es necesario de algunos elementos base para la caracterización de un histograma en una estructura difusa.

Sea  $\mathcal{M}$  una muestra observada y  $n$  el tamaño muestral, tal que  $\mathcal{M} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \in \tilde{A}_j, \text{ para algun } j \in \{1, \dots, n\}\}$ . También sea  $\text{máx}(\mathcal{M}) = (\text{máx}(x), \text{mín}(\mu_{\tilde{A}}(\text{máx}(x))))$  y  $\text{mín}(\mathcal{M}) = (\text{mín}(x), \text{mín}(\mu_{\tilde{A}}(\text{mín}(x))))$  el máximo y mínimo de la muestra, respectivamente.

Sea  $K$  el número de clases o intervalos de amplitud  $a_i$ , donde  $i \in \{1, \dots, k\}$ .  $L_{I_1}$  es el límite inferior de la primera clase,  $L_{I_1} = \text{mín}(x) - \epsilon_1$ , donde  $\epsilon_1 > 0$  y  $L_{S_k}$  es el límite superior de la última clase,  $L_{S_k} = \text{máx}(x) + \epsilon_2$ , donde  $\epsilon_2 > 0$ .  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  dependen de la forma como obtenemos  $K$ , por ejemplo Sturges,  $\sqrt{n}$ , etc.

Sea  $C_i$  la  $i$ -ésima clase caracterizada por  $C_i = \{x : (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \in \mathcal{M} \text{ y } L_{S_{i-1}} \leq x < L_{I_{i+1}}\}$  y  $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $\tilde{A}_{C_i} = \bigcup_{L} \tilde{A}_j$ , el conjunto difuso del intervalo o clase  $C_i, \forall j \in \{1, \dots, n\}$  y  $L = \{x \in \Omega : L_{S_{i-1}} \leq x < L_{I_{i+1}}\}$ .

**Definición 3.2.2.** Sea

$$\tilde{n}_i = \#Nucleo(\tilde{A}_{C_i}) + \int_{L_{I_i}}^{L_{S_i}} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx,$$

la frecuencia difusa absoluta y sea

$$\tilde{n} = \#Nucleo(\mathcal{M}) + \int_{\text{mín}(x)}^{\text{máx}(x)} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx,$$

la frecuencia difusa total. Si  $\tilde{A}_i$  es un número convencional  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces

$$\int_{L_{I_i}}^{L_{S_i}} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx = 0 \text{ y } \int_{\text{mín}(x)}^{\text{máx}(x)} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx = 0,$$

así  $\tilde{n}_i = n_i$  y  $\tilde{n} = n$ , donde  $n_i$  es la frecuencia absoluta y  $n$  el tamaño muestral.

Note que:

$$\sum_{i=1}^k \tilde{n}_i = \sum_{i=1}^k \{\#Nucleo(\tilde{A}_{C_i}) + \int_{L_{I_i}}^{L_{S_i}} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx\} = \sum_{i=1}^k \#Nucleo(\tilde{A}_{C_i}) + \sum_{i=1}^k \int_{L_{I_i}}^{L_{S_i}} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx,$$

finalmente

$$\sum_{i=1}^k \tilde{n}_i = \#Nucleo(\mathcal{M}) + \int_{\text{mín}(x)}^{\text{máx}(x)} \mu_{\tilde{A}_{C_i}}(x) dx = \tilde{n}.$$



**Definición 3.2.3.** Sea  $\tilde{f}_i = \frac{\tilde{n}_i}{\tilde{n}}$ , la frecuencia relativa difusa, donde  $\sum_{i=1}^k \tilde{f}_i = 1$ .

Conocidos los datos difusos  $X_1, \dots, X_n$ , se tiene:  $P(X \subseteq \tilde{H}) \approx \frac{\tilde{n}_h}{\tilde{n}} = \tilde{f}_h$ , donde  $\tilde{n}_h$  es la frecuencia absoluta difusa limitada por la clase  $\tilde{H} = \{(x, 1) : -\frac{h}{2} \leq x < \frac{h}{2}\}$ . Así se obtiene la siguiente estimación de la densidad difusa:

$$\tilde{f}_h(x) = \frac{1}{\tilde{n}h} \{ \#Nucleo(\tilde{A}_{C_h}) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_{\tilde{A}_{C_h}}(x) dx \}.$$

Supongamos una muestra de observaciones difusa triangulares, con diferentes expansiones y no necesariamente simétricas, vea la Figura 1.

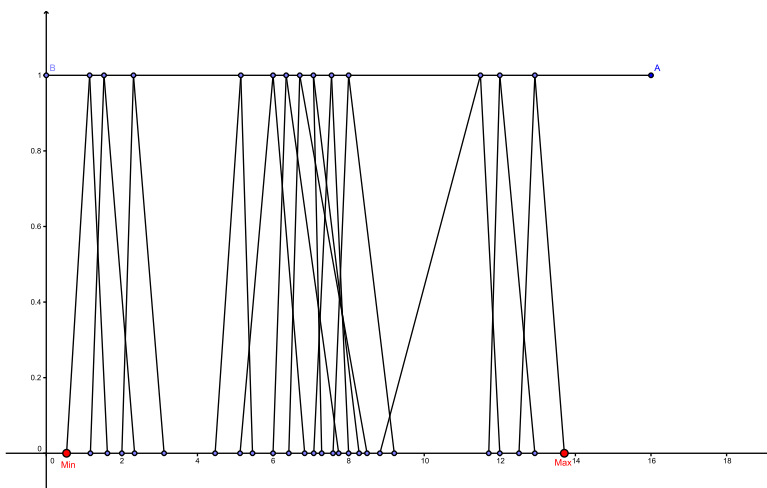


Figura 1: Esta figura presenta una muestra de números difusos triangulares no simétricos. Se destacan los valores máximo y mínimo.

La comparación es realizada utilizando el método convencional, presentado por [5], usando  $k = 5$ . En el Cuadro 1 son especificadas las frecuencias difusas.

Las funciones de pertenencia generadas en algunos artículos difusos con las características de una clase difusa son denominadas funciones de pertenencia no convexas [15].

## 4 Kaplan-Meier difuso y comportamiento asintótico

La generalización de Kaplan-Meier cuando los tiempos de vida son considerados números difusos es presentado considerando los siguientes preliminares:

1.  $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \dots < \tilde{t}_k$ , son  $k$  diferentes tiempos de vida difusos ordenados de acuerdo con las fallas.
2.  $\tilde{d}_j$  el número difuso de fallas en  $\tilde{t}_j, j = 1, \dots, k, y$

3.  $\tilde{n}_j$  el número difuso de individuos en riesgo  $\tilde{t}_j$ , esto es, individuos que no fallaron y no fueron censurados hasta el momento inmediatamente antes de  $\tilde{t}_j$ .

Luego el estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos es definido como:

$$\hat{S}(\tilde{t}) = \prod_{j:\tilde{t}_j < t} \left( \frac{\tilde{n}_j - \tilde{d}_j}{\tilde{n}_j} \right) = \prod_{j:\tilde{t}_j < t} \left( 1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j} \right).$$

**Teorema 4.1.** *La varianza asintótica del estimador de Kaplan-Meier cuando los tiempos de vida son considerados difusos es dada por:*

$$\widehat{Var}(\hat{S}(\tilde{t})) \approx [\hat{S}(\tilde{t})]^2 \sum_{j:\tilde{t}_j < t} \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j(\tilde{n}_j - \tilde{d}_j)}.$$

*Demostración.* Para la prueba es necesario el método delta. El método delta necesita que la función  $f(x)$  sea expresada en serie de Taylor. Sea  $f(x)$  una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ . La serie de Taylor de primer orden sobre la media es:

$$f(x) \approx f(\mu) + (x - \mu)f'(\mu). \quad (1)$$

En la ecuación (1), la varianza de la función  $f(x)$  es aproximadamente igual:

$$\widehat{Var}(f(x)) \approx [f'(\mu)]^2 \widehat{Var}(x - \mu) \approx [f'(\mu)]^2 \sigma^2,$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza de la variable aleatoria  $X$ . Por ejemplo, en el caso de la función logaritmo natural tenemos:

$$\ln(X) \approx \ln(\mu) + (X - \mu) \frac{1}{\mu}, \quad (2)$$

luego

$$\widehat{Var}(\ln(X)) \approx \frac{1}{\mu^2} \hat{\sigma}^2. \quad (3)$$

Cuadro 1: Frecuencia Absoluta difusas.

----- $\tilde{n}_i, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$ -----	
$\int_{L_{I_1}}^{L_{S_1}} \mu_{\tilde{A}_{C_1}}(x) dx = 1,4$	----- $\tilde{n}_1 = 4,4$
$\int_{L_{I_2}}^{L_{S_2}} \mu_{\tilde{A}_{C_2}}(x) dx = 0,68$	----- $\tilde{n}_2 = 1,68$
$\int_{L_{I_3}}^{L_{S_3}} \mu_{\tilde{A}_{C_3}}(x) dx = 2,32$	----- $\tilde{n}_3 = 8,32$
$\int_{L_{I_4}}^{L_{S_4}} \mu_{\tilde{A}_{C_4}}(x) dx = 1,3$	----- $\tilde{n}_4 = 1,3$
$\int_{L_{I_5}}^{L_{S_5}} \mu_{\tilde{A}_{C_5}}(x) dx = 1,63$	----- $\tilde{n}_5 = 4,63$

ahora, en nuestro contexto, para calcular la varianza del estimador de Kaplan-Meier basado en el método delta, tenemos:

$$\hat{S}(\tilde{t}) = \prod_{j:\tilde{t}_j < t} \left( \frac{\tilde{n}_j - \tilde{d}_j}{\tilde{n}_j} \right),$$

luego

$$\ln(\hat{S}(\tilde{t})) = \sum_{j:\tilde{t}_j < t} \ln \left( 1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j} \right). \tag{4}$$

Con la substitución de  $\hat{p}_j = 1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j}$  en la ecuación (4) tenemos:

$$\ln(\hat{S}(\tilde{t})) = \sum_{j:\tilde{t}_j < t} \ln(\hat{p}_j), \tag{5}$$

usando el operador varianza en ambos lados de la ecuación (5) y asumiendo independencia entre las variables  $\hat{p}_j$ , tenemos:

$$\hat{V}ar(\ln(\hat{S}(\tilde{t}))) = \sum_{j:\tilde{t}_j < t} Var(\ln(\hat{p}_j)). \tag{6}$$

Si suponemos que  $\hat{p}_j$  tiene distribución Bernoulli con probabilidad  $p_j$ , luego, el estimador de  $p_j$  es  $\hat{p}_j$  y como estimador de la varianza  $\frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{\tilde{n}_j}$ , ahora usando las ecuaciones (2) y (3) tenemos:

$$\hat{V}ar(\ln(\hat{p}_j)) \approx \frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{\hat{p}_j^2 \tilde{n}_j},$$

luego usando el hecho que  $\hat{p}_j = \frac{\tilde{n}_j - \tilde{d}_j}{\tilde{n}_j}$ , tenemos:

$$\hat{V}ar(\ln(\hat{p}_j)) \approx \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j(\tilde{n}_j - \tilde{d}_j)}.$$

Finalmente tenemos:

$$\hat{V}ar(\ln(\hat{S}(\tilde{t}))) \approx \sum_{j:\tilde{t}_j < t} \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j(\tilde{n}_j - \tilde{d}_j)}. \tag{7}$$

La expresión (7) permite obtener una estimación de la varianza del logaritmo natural de la función de sobrevivencia. Nuevamente aplicando el método delta en la función exponencial para eliminar el logaritmo natural de la expresión (7) tenemos:

$$\hat{V}ar(\hat{S}(\tilde{t})) = [\hat{S}(\tilde{t})]^2 \sum_{j:\tilde{t}_j < t} \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j(\tilde{n}_j - \tilde{d}_j)}.$$

□

Basado en la definición de frecuencia difusa, también es posible proponer una expresión general para la varianza e intervalos de confianza. Asumiendo que  $\hat{S}(\tilde{t})$ , para  $\tilde{t}$  fijo, también tiene distribución normal asintótica (ver Teorema 4.1.4), tiene un intervalo aproximado de  $100(1-\alpha)\%$  de confianza para  $S(\tilde{t})$  dado por:

$$\hat{S}(\tilde{t}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}ar(\hat{S}(\tilde{t}))}.$$

### 4.1 Comportamiento asintótico

Sean  $\hat{S}(t)$  y  $\hat{S}(\tilde{t})$  el estimador de Kaplan-Meier convencional y para tiempos de vida difuso respectivamente, donde

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right) \text{ y } \hat{S}(\tilde{t}) = \prod_{j:\tilde{t}_j < \tilde{t}} \left(1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j}\right).$$

Se dice que  $\tilde{n}$  tiende a  $\infty$ , cuando  $n_m \in \text{Nucleo}(\tilde{n})$  tiende a  $\infty$ .

**Teorema 4.1.1.**  $\|\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(\tilde{t})\| \xrightarrow{P} 0$ .

*Demostración.* Tenemos

$$\lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} \|\hat{S}_n(t)\| = \lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} \left\| \prod_{j:t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right) \right\| = 0,$$

porque los factores  $1 - \frac{d_j}{n_j} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por otro lado

$$\lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} \|\hat{S}_n(\tilde{t})\| = \lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} \left\| \prod_{j:\tilde{t}_j < \tilde{t}} \left(1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j}\right) \right\| = 0,$$

porque los factores  $1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j} \rightarrow 0$  cuando  $\tilde{n} \rightarrow \infty$ . Además basado en el Teorema de Slutsky

$$\lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} \|\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(\tilde{t})\| = 0.$$

Entonces  $\|\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(\tilde{t})\| \xrightarrow{L_2} 0$  e  $\|\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(\tilde{t})\| \xrightarrow{P} 0$ .  $\square$

Basado en la Definición 3.2.2 se puede escribir,  $\tilde{d}_j = d_j + \epsilon_j$  y  $\tilde{n}_j = n_j + \delta_j$ , donde  $\epsilon \geq 0$  y  $\delta \geq 0$ .

**Teorema 4.1.2.** Si  $\frac{d_j}{n_j} \geq \frac{\epsilon_j}{\delta_j}$ , para todo  $j$ , tal que  $t_j < t$ . Entonces  $\hat{S}(t) \leq \hat{S}(\tilde{t})$ .

*Demostración.* Si  $\frac{d_j}{n_j} \geq \frac{\epsilon_j}{\delta_j}$  entonces

$$\begin{aligned} d_j \delta_j \geq \epsilon_j n_j &\iff d_j \delta_j - \epsilon_j n_j \geq 0 \iff d_j n_j + d_j \delta_j - \epsilon_j n_j \geq d_j n_j \\ &\iff \frac{d_j(n_j + \delta_j)}{n_j} - \epsilon_j \geq d_j \iff \frac{d_j(n_j + \delta_j) - \epsilon_j n_j}{n_j} \geq d_j \\ &\iff \frac{d_j(n_j + \delta_j) - \epsilon_j n_j}{n_j(n_j + \delta_j)} \geq \frac{d_j}{n_j + \delta_j} \iff \frac{d_j}{n_j} - \frac{\epsilon_j}{n_j + \delta_j} \geq \frac{d_j}{n_j + \delta_j} \\ &\iff \frac{d_j}{n_j} \geq \frac{d_j}{n_j + \delta_j} + \frac{\epsilon_j}{n_j + \delta_j} \iff \frac{d_j}{n_j} \geq \frac{d_j + \epsilon_j}{n_j + \delta_j} \\ &\iff 1 - \frac{d_j}{n_j} \leq 1 - \frac{d_j + \epsilon_j}{n_j + \delta_j}. \end{aligned}$$

Finalmente  $\hat{S}(t) \leq \hat{S}(\tilde{t})$ .  $\square$

Note que si  $\frac{d_j}{n_j} \leq \frac{\epsilon_j}{\delta_j}$ , para todo  $j$ , tal que  $t_j < t$ . entonces  $\hat{S}(t) \geq \hat{S}(\tilde{t})$ .

**Teorema 4.1.3.**  $\lim_{(\epsilon_j, \delta_j) \rightarrow (0,0)} \hat{S}_n(\tilde{t}) \xrightarrow{D} N\left(E(\hat{S}(t)), Var(\hat{S}(t))\right)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \lim_{(\epsilon_j, \delta_j) \rightarrow (0,0)} \hat{S}_n(\tilde{t}) &= \lim_{(\epsilon_j, \delta_j) \rightarrow (0,0)} \prod_{j: \tilde{t}_j < \tilde{t}} \left(1 - \frac{\tilde{d}_j}{\tilde{n}_j}\right) \\ &= \lim_{(\epsilon_j, \delta_j) \rightarrow (0,0)} \prod_{j: \tilde{t}_j < \tilde{t}} \left(1 - \frac{d_j + \epsilon_j}{n_j + \delta_j}\right) \\ &= \prod_{j: t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right) \\ &= \hat{S}_n(t). \end{aligned}$$

Basado en [3] tenemos que  $\hat{S}(t)$  tiene normalidad asintótica puntual en los intervalos compactos, esto es,  $\sqrt{n}(\hat{S}_n(t) - S(t))$  converge en distribución para una normal, es decir,  $\sqrt{n}(\hat{S}_n(t) - S(t)) \xrightarrow{D} N(0, Var(\hat{S}(t)))$ . Así  $\lim_{(\epsilon_j, \delta_j) \rightarrow (0,0)} \hat{S}_n(t) \xrightarrow{D} N\left(E(\hat{S}(t)), Var(\hat{S}(t))\right)$ .  $\square$

Es importante indicar que el estimador de Kaplan-Meier es el estimador de máxima verosimilitud, portanto todas las propiedades que eso implica deben ser consideradas [17].

**Teorema 4.1.4.** Si  $\hat{S}(\tilde{t})$  es el estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos, entonces  $\hat{S}_n(\tilde{t}) \xrightarrow{D} N\left(E(\hat{S}(\tilde{t})), Var(\hat{S}(\tilde{t}))\right)$ .

*Demostración.* Basado en la notación del Teorema 4.1 y las Expansiones de Edgeworth, tenemos:

$$\hat{S}_n(\tilde{t}) = \Phi(p_j) + \frac{C_1(\hat{S})q_1(p_j)\phi(p_j)}{\sqrt{n}} + \frac{C_2(\hat{S})q_2(p_j) + C_3(\hat{S})q_3(p_j)\phi(p_j)}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

donde  $E(\hat{S}(\tilde{t})) = \mu$ ;  $C_1(\hat{S}) = \frac{E(\hat{S}(\tilde{t})-\mu)^3}{6\sigma^3}$ ;  $C_2(\hat{S}) = \frac{E(\hat{S}(\tilde{t})-\mu)^4}{24\sigma^4} - 3$ ;  $C_3(\hat{S}) = \frac{C_1^2(\hat{S})}{72}$ ;  $q_1(p_j) = (1 - p_j^2)$ ;  $q_2(p_j) = 3p_j - p_j^3$  y  $q_3(p_j) = 10p_j^3 - 15p_j - p_j^5$ . Observe que cuando  $\tilde{n} \rightarrow \infty$  se tiene que  $p_j \rightarrow 0$  (ver Teorema 4.1), entonces  $q_1(p_j) = (1 - p_j^2) \rightarrow 1$ ;  $q_2(p_j) = 3p_j - p_j^3 \rightarrow 0$  y  $q_3(p_j) = 10p_j^3 - 15p_j - p_j^5 \rightarrow 0$ , luego se puede escribir:

$$\hat{S}_n(\tilde{t}) = \Phi(p_j) + \frac{C_1(\hat{S})\phi(p_j)}{\sqrt{n}} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

El análisis del comportamiento asintótico de  $C_1(\hat{S}) = \frac{E(\hat{S}(\tilde{t})-\mu)^3}{6\sigma^3}$  se basa en el método Delta (ver Teorema 4.1), se tiene que  $C_1(\hat{S}) = \frac{E(\hat{S}(\tilde{t})-\mu)^3}{6\sigma^3} \rightarrow 0$  cuando  $\tilde{n} \rightarrow \infty$ . Finalmente  $\hat{S}_n(\tilde{t}) \xrightarrow{D} N\left(E(\hat{S}(\tilde{t})), Var(\hat{S}(\tilde{t}))\right)$ .  $\square$

## 5 Aplicación

Los tiempos de vida para el siguiente problema, no son difusos, sin embargo para efectos de la propuesta, serán asumidos con esta estructura (ver Tabla 3). Se realizó un estudio clínico aleatorio para investigar el efecto de la terapia con esteroides en el tratamiento de la hepatitis viral aguda [12]. Veintinueve pacientes con la enfermedad fueron aleatorizados para recibir un elemento inerte o tratamiento con esteroides. Cada paciente fue seguido por 16 semanas o hasta la muerte. Este conjunto de datos es estudiado por [5].

El Cuadro 2 muestra la función de sobrevivencia estimada basado en las estimaciones de Kaplan-Meier convencional [5].

Cuadro 2: Kaplan-Meier para el grupo de esteroides.

$t_j$	Intervalo	$d_j$	$n_j$	$\hat{S}(t_{j+})$
0	[0,1)	0	14	1,000
1	[1,5)	3	14	0,786
5	[5,7)	1	9	0,698
7	[7,8)	1	8	0,611
8	[8,10)	1	7	0,524
10	[10,16)	1	6	0,437

Basado en el mismo problema descrito en el Cuadro 2, se asume una representación difusa para cada tiempo de falla, como es mostrado en la Figura 1. Observe que las funciones de pertenencia son triangulares y no se asume simetría. Basado en las definiciones 2.6, 3.2 y 4, el estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos es presentado en el Cuadro 3.

Cuadro 3: Estimaciones de Kaplan-Meier para el grupo de esteroides con tiempos difusos.

$\tilde{t}_j$	Intervalo	$\tilde{d}_j$	$\tilde{n}_j$	$\tilde{S}(t_{j+})$
(0,0,0)	[0,1)	0.35	16.68	1,000
(0.3,1,1,3) (0.5,1,1,3) (0.7,1,1.7)	[1,5)	3.7	16.33	0,773
(4.3,5,5.3)	[5,7)	1.4	12.63	0,687
(6.5,7,8)	[7,8)	1.78	11.23	0,578
(6.7,8,8.3)	[8,10)	1.3	9.45	0,498
(9.7,10,10.3)	[10,16)	1.15	8.15	0,427

El Cuadro 4 muestra una pequeña comparación entre la determinación de la varianza y los intervalos de confianza en dos situaciones: de manera convencional y considerando los tiempos de vida como números difusos. Se recuerda que la notación  $(a_l, a_m, a_r)$  representa un número difuso tipo LR. Se observa que el Cuadro 4, la varianza disminuye y las amplitudes de los intervalos de confianza disminuyen, mostrando el efecto de la información adicional proporcionada por la consideración de los tiempos de falla como números difusos.

Cuadro 4: Estimaciones de Kaplan-Meier para los grupos de esteroides de manera convencional y con tiempos de vida difusos.

$t_j$	Varianza	Intervalo de confianza
$t_j = 5$	0.0163	$0,698 \pm 1,96\sqrt{0,0163} = (0,45; 0,95)$
$\tilde{t}_j = (4,3, 5, 5,3)$	0.0137	$0,687 \pm 1,96\sqrt{0,0137} = (0,458; 0,916)$

## 6 Conclusiones

En este trabajo es generalizado el estimador de Kaplan-Meier, cuando los tiempos de falla son considerados difusos. Es presentado un nuevo concepto de aproximaciones para las frecuencias relativas difusas y sus propiedades asintóticas. Se promueve el uso de estructuras numéricas en coherencia a la naturaleza humana, superando problemas de idealizaciones imprecisas. Uno de sus efectos es una disminución de la variabilidad y por tanto, una disminución en la amplitud de los intervalos de confianza. Como trabajos futuros se pretende estudiar el comportamiento asintótico del estimador de Kaplan-Meier.

## 7 Agradecimientos

J.A. González agradece el financiamiento entregado por la Dirección General de Investigación (fondo 2017) y Unidad de Soporte Estadístico para la Investigación.

## Referencias

- [1] Amato, D. A., *A generalized kaplan-meier estimator for heterogenous populations*, Communications in Statistics-Theory and Methods, **17**(1)(1988), 263-286.
- [2] Bitouze, D., Laurent, B. and Massart, P., *A dvoretzky – kiefer – wolfowitz type inequality for the kaplan–meier estimator*, In Annales de l’Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, **35**(1)(1999), 735-763.
- [3] Breslow, N., *Covariance analysis of censored survival data*, Biometrics, **3**(1)(1974), 89-99.
- [4] Cai, Z., *Asymptotic properties of kaplan-meier estimator for censored dependent data*, Statistics and probability letters, **37**(4)(1998), 381-389.
- [5] Colosimo, E. A. and Giolo, S. R., *Análise de sobrevivencia aplicada*. In ABE-Projeto Fisher, Edgard Blucher, Sao Paulo, Brasil, 2006.
- [6] Dabrowska, D. M., *Kaplan-meier estimate on the plane*, The Annals of Statistics, **7**(4) (1988), 1475-1489.
- [7] Dabrowska, D. M., *Kaplan-meier estimate on the plane: weak convergence, lil, and the bootstrap*, Journal of Multivariate analysis, **29**(2)(1989), 308-325.
- [8] Dubois, D. and Prade, H., (1978). *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of systems science, **9**(6)(1978), 613-626.

- 
- [9] Egusa, Y., Akahori, H., Morimura, A. and Wakami, N., *An application of fuzzy set theory for an electronic video camera image stabilizer*, Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, **3**(3)(1995), 351-356.
- [10] Goguen, J. A., *L-fuzzy sets*, Journal of mathematical analysis and applications, **18**(1)(1967), 145-174.
- [11] González C., J. A., *Estatística e a teoria de conjuntos fuzzy*, Tese Doutorado Universidade Estadual de Campinas, Brasil , **1**(1)(2015), 1-77.
- [12] Gregory, P. B., Knauer, C. M., Kempson, R. L. and Miller, R., *Steroid therapy in severe viral hepatitis: A double-blind, randomized trial of methyl-prednisolone versus placebo*, New England Journal of Medicine, **294**(13)(1976), 681-687.
- [13] Huang, H.-Z., Zuo, M. J. and Sun, Z.-Q., *Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data*, Fuzzy Sets and Systems, **157**(12)(2006), 1674-1686.
- [14] Meier-Kriesche, H.-U., Schold, J. D. and Kaplan, B., *Long-term renal allograft survival: Have we made significant progress or is it time to rethink our analytic and therapeutic strategies?*, American Journal of Transplantation, **4**(8)(2004), 1289-1295.
- [15] Nasser, S., Taleshian, F., Alizadeh, Z. and Vahidi, J., *A new method for ordering lr fuzzy number*, The Journal of Mathematics and Computer Science, **4**(3)(2012), 283-294.
- [16] Stute, W., *The jackknife estimate of variance of a kaplan-meier integral*, The Annals of Statistics, **24**(6)(1996), 2679-2704.
- [17] Van der Vaart, A. W., *Asymptotic statistics*. Cambridge university press, 2000.
- [18] Viertl, R., *On reliability estimation based on fuzzy lifetime data*, Journal of Statistical Planning and Inference, **139**(5)(2009), 1750-1755.
- [19] Wang, L.-X., *A course in fuzzy systems*. Prentice-Hall press, USA, 1999.
- [20] Xie, J. and Liu, C., *Adjusted kaplan-meier estimator and log-rank test with inverse probability of treatment weighting for survival data*, Statistics in medicine, **24**(20)(2005), 3089-3110.
- [21] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets*, Information and control , **8**(3)(1965), 338-353.
- [22] Zadeh, L. A., *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*, Information sciences, **8**(3)(1975), 199-249.



# Problemas y Soluciones

## *Problems and Solutions*

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)  
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias  
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en  $\text{\LaTeX}$ ). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

*Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a  $\text{\LaTeX}$  source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.*

## 1 Problemas propuestos

Varios de los problemas propuestos a lo largo de los últimos años han quedado sin resolver hasta el día de hoy, a saber: 24–28, 44, 51, 54, 59, 68–69, 72–91, 94–106, 108–113, 116, 118–123, 125–130 y 132–137. Trataremos de ir llenando ese vacío, publicando en los números siguientes más soluciones que problemas nuevos. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para los problemas mencionados en la lista anterior.

139. *Propuesto en la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Antofagasta, Chile, 2016.*

Sea  $k$  un entero positivo y  $a_1, a_2, \dots, a_k$  dígitos dados. Pruebe que existe un entero positivo  $n$  tal que los últimos  $2k$  dígitos de  $2^n$  son, en este orden,  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ , para ciertos dígitos  $b_1, b_2, \dots, b_k$ .

## 2 Soluciones

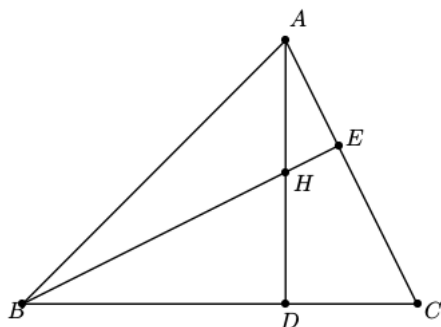
61. [10(2) (2002) p. 182.] ¿Para qué enteros  $n \geq 3$  es posible acomodar, en algún orden, los números  $1, 2, \dots, n$  en forma circular de manera que cualquier número divida a la suma de los dos números siguientes en el sentido de las manecillas del reloj?

*Solución del editor:* Obviamente se puede para  $n = 3$ , y veremos que sólo en este caso. Si se pueden acomodar  $1, 2, \dots, n$  cumpliendo la condición pedida entonces no puede haber dos números pares consecutivos, ya que el siguiente también sería par y siguiendo así resultarían todos pares. Tampoco puede haber dos pares separados por un sólo impar. Por lo tanto después de cada número par debe haber al menos dos impares antes del próximo par. Esto

implica que la cantidad de impares es por lo menos el doble de la cantidad de pares, lo cual sólo sucede si  $n = 3$ .

62. [10(2) (2002) p. 182.] Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo y sean  $D$  y  $E$  los pies de las alturas desde los vértices  $A$  y  $B$ , respectivamente. Muestre que si  $\text{área}(BDE) \leq \text{área}(DEA) \leq \text{área}(EAB) \leq \text{área}(ABD)$ , entonces el triángulo es isósceles.

*Solución del editor:* Denotemos por  $[XYZ]$  el área del triángulo  $XYZ$ . Sea  $H$  la intersección de  $AD$  y  $BE$ .



Como  $[BDE] \leq [DEA]$ , restando el área de la parte común  $DEH$  resulta  $[BDH] \leq [EAH]$ . Del mismo modo de  $[EAB] \leq [ABD]$ , restando el área de la parte común  $ABH$  resulta  $[EAH] \leq [BDH]$ . Por consiguiente  $[EAH] = [BDH]$  y de allí se sigue  $[BDE] = [DEA]$ . Como estos triángulos tienen la base  $DE$  común, sus alturas desde  $B$  y  $A$  deben ser iguales y  $AB$  debe ser paralela a  $DE$ . Como  $A, B, C$  y  $D$  son concíclicos se tiene que  $\angle EAD = \angle EBD$  y  $\angle DAB = \angle DEB = \angle EBA$ . Sumando resulta  $\angle CAB = \angle CBA$ .

63. [10(2) (2002) p. 182.] Para cada entero  $a > 1$  se construye una lista infinita de enteros  $\mathcal{L}(a)$  como sigue:
- (i)  $a$  es el primer número de la lista  $\mathcal{L}(a)$ .
  - (ii) Dado un número  $b$  en  $\mathcal{L}(a)$ , el siguiente número en la lista es  $b+c$ , donde  $c$  es el mayor entero que divide a  $b$  y es menor que  $b$ .

Encuentre todos los enteros  $a > 1$  tales que 2002 está en la lista  $\mathcal{L}(a)$ .

*Solución del editor:* Desde luego que 2002 está en la lista  $\mathcal{L}(2002)$ . Supongamos que  $\mathcal{L}(a) = \{a, \dots, d, 2002, \dots\}$  es una lista donde se encuentra 2002 y  $a \neq 2002$ ; los números de la lista son mayores que 1 y van creciendo, ya que  $b < b+c$ . Si  $p$  es el primo más pequeño que divide a  $d$  y  $m = d/p$  entonces el número de la lista que sigue a  $d$  es  $d+m = mp+m = m(p+1) = 2002$ . Como  $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = m(p+1)$ ,  $p$  no puede ser 2. Luego  $p+1$  es par y mayor que 2. Alguno de los números 7, 11, 13 divide a  $p+1$ , por lo que  $p \geq 2 \cdot 7 - 1 = 13$ . Si un primo menor que 13 divide a  $m$ , este primo divide a  $d$ , lo cual es imposible porque elegimos  $p$  como el menor primo que divide a  $d$ . Luego 7 y 11 no dividen a  $m$ , por lo que tienen que dividir a  $p+1$ . Luego  $p > 2 \cdot 7 \cdot 11 - 1 > 13$ , de donde 13 tampoco divide a  $m$ . La única posibilidad que resta es que  $m$  sea 1 y que  $p$  sea  $2002 - 1 = 2001$ , pero  $2001 = 3 \cdot 667$  no es primo. Todo lo anterior muestra que la única lista que contiene a 2002 es  $\mathcal{L}(2002)$ .

64. [10(2) (2002) p. 182.] Encuentre un conjunto infinito de enteros positivos  $S$  tal que para cada  $n \geq 1$  y cualesquiera  $n$  elementos distintos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $S$ , el número  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  no es un cuadrado perfecto.

*Solución del editor:* Sea  $S = \{10^{2k+1} : k \geq 1\}$ . Cualquier suma de elementos distintos de  $S$  acaba en un número impar de ceros y por lo tanto no es un cuadrado perfecto. Hay muchas otras soluciones.

65. [10(2) (2002) p. 182.] En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de  $n \times n$ , con  $n$  entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras  $(x, y)$ , con  $0 \leq x \leq n$  y  $0 \leq y \leq n$ . Considere los caminos que van de  $(0, 0)$  a  $(n, n)$  sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de  $x$  de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de  $y$  de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado  $n$  en dos figuras de la misma área.

*Solución del editor:* Sea  $P_0, P_1, \dots, P_{2n}$  un camino. Pongamos  $P_i = (x_i, y_i)$  y llamemos  $L$  al área que queda por debajo del camino y  $U$  al área que queda por encima. Sean  $P_{k-1}, P_k, P_{k+1}$  tres puntos consecutivos tales que el segmento  $P_{k-1}P_k$  sea vertical y el segmento  $P_kP_{k+1}$  sea horizontal. Construyamos otro camino sustituyendo  $P_k$  por  $P'_k = (x_k+1, y_k-1)$ . Es claro que en el nuevo camino la suma de las  $x$ 's aumenta en 1 respecto al camino original, mientras que el área debajo del camino disminuye en 1, por lo cual  $L + \sum x_i$  no cambia (es un invariante). Mediante modificaciones sucesivas de este tipo podemos llegar al camino que tiene  $n$  segmentos horizontales seguidos de  $n$  segmentos verticales, para el cual  $L + \sum x_i = 0 + (0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n + \dots + n) = n(n+1)/2 + n^2$ . Por lo tanto para cualquier camino se tiene  $L + \sum x_i = n(n+1)/2 + n^2$ . Intercambiando los ejes se prueba del mismo modo que  $U + \sum y_i = n(n+1)/2 + n^2$ . Por tanto  $L + \sum x_i = U + \sum y_i$ . Esta igualdad muestra que  $L = U$  si y sólo si  $\sum x_i = \sum y_i$ .

# Guía para los Autores

**Divulgaciones Matemáticas** es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

**Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

**Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

**Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

# Guide for Authors

**Divulgaciones Matemáticas** is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

**Identification.** This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

**Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

**Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 17, No. 2  
Se terminó de editar en Septiembre del 2017  
en el Departamento de Matemática (DEMAT)  
Maracaibo - Venezuela.

**La Universidad del Zulia**

**AUTORIDADES**

Jorge Palencia  
**Rector**

Judith Aular de Durán  
**Vicerrectora Académica**

Jesús Salom Crespo  
**Vicerrector Administrativo (E)**

Marlene Primera Galué  
**Secretaria de LUZ**

**Facultad Experimental de Ciencias**

Merlin Rosales  
**Decano**

Vinicio Ríos  
**Director del Departamento de Matemáticas**

# Divulgaciones Matemáticas

Vol. 17, No. 2, 2016

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación (Research papers)

- Orthocenters of triangles in the  $n$ -dimensional space.**  
Ortocentros de triángulos en el espacio  $n$ -dimensional.  
Horst Martini, Wilson Pacheco, Aljadis Varela, John Vargas **1-14**
- Dos teoremas de interpolación.**  
Two interpolation theorems.  
*Franklin Galindo* **15-42**
- Generalización del estimador de Kaplan-Meier para tiempos de vida difusos.**  
Generalization of the Kaplan-Meier estimator for fuzzy lifetimes.  
*José A. González C.* **43-56**

### Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

- José H. Nieto S.* (Editor). **57-59**