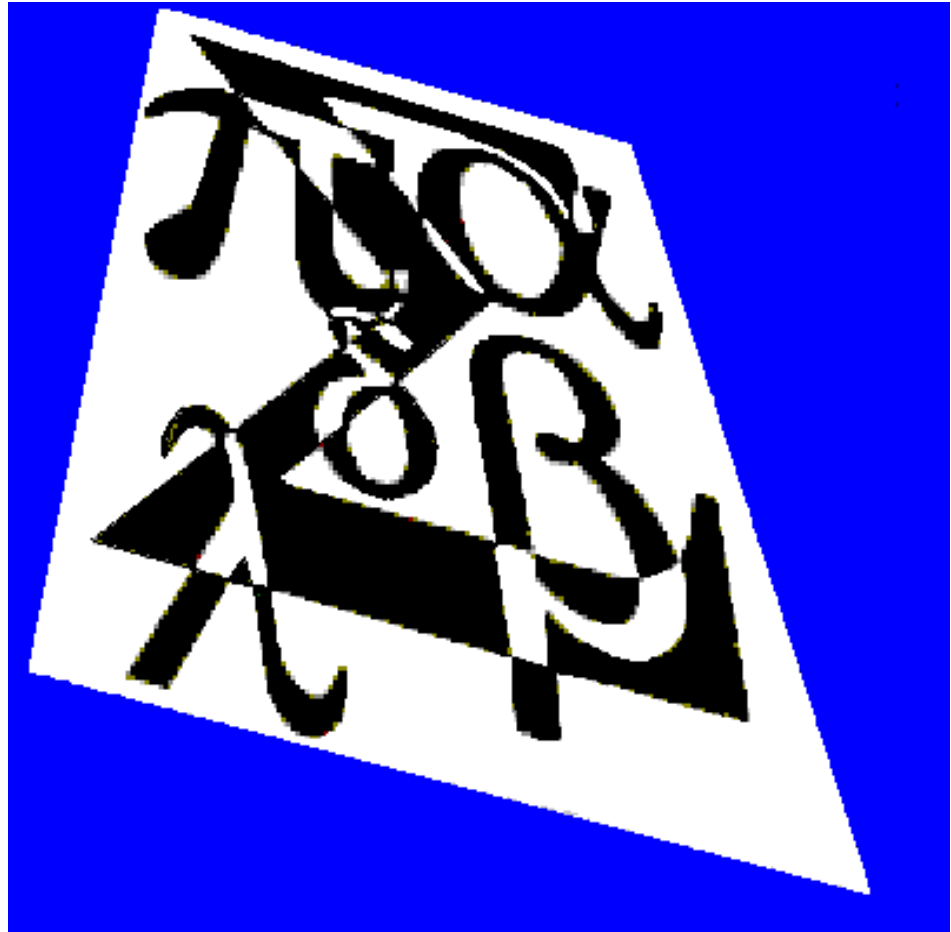




**Universidad  
del Zulia**

# **Divulgaciones Matemáticas**



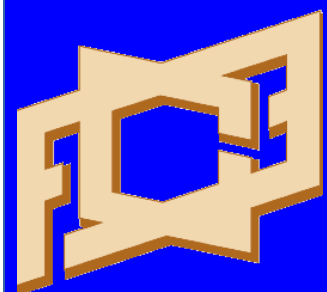
**Departamento de Matemática**

**Depósito legal: pp 199302ZU392**

**ISSN 1315-2068**

**Maracaibo - Venezuela**

**Vol. 22 - 2021 - N° 1**



**Facultad  
Experimental  
de Ciencias**

# Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia  
Facultad Experimental de Ciencias  
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Latindex, Wordcat, Mir@bel, Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

## Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)

Dr. Wilson Pacheco (LUZ)

Dr. Deivi Luzardo (LUZ)

**Editor Jefe:** Dr. Tobías Rosas Soto ([trosas@demat-fecluz.org](mailto:trosas@demat-fecluz.org))

**Editores Asociados:** Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

**Editores Eméritos:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

**Editore Fundadores:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de Javier Adolfo Ortiz.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526  
Maracaibo, Estado Zulia  
Venezuela

Correo electrónico: [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org)

URL: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org)

[produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones](http://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones)

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con  $\text{\LaTeX}$  y  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$  en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES  
MATEMÁTICAS

---

---

Vol. 22

2021

No. 1

---

---



# Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 22, No. 1, 2022**. Los artículos contenidos en el presente volumen fueron recibidos entre el segundo semestre del año **2020** y durante el primer semestre del año **2021**, los mismos fueron evaluados y aceptados para su publicación, antes de la edición del presente volumen.

Es importante notar que, a pesar de la poca demanda de artículos por parte de autores y la complicada situación mundial con respecto a la pandemia de COVID-19 que se está viviendo, en particular, en nuestro país Venezuela, la revista logró recibir trece (13) trabajos de los cuales seis (6) no aprobaron la etapa de evaluación por los árbitros respectivos. De manera que en este número se publican cinco (5) artículos en la sección de Artículos de Investigación, dos (2) artículo en la sección de Artículos de Divulgación e Históricos y un manuscrito con la solución de dos (2) problemas presentados en la sección de Problemas y Soluciones, presentando ésta tres nuevos problemas para resolver propuesto en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe 2020, organizada por Panamá y realizada de manera virtual.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado de mucho esfuerzo del Comité Editorial y del Editor Jefe de la revista, miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias de la Universidad del Zulia. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este volumen: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de *Problemas y Soluciones*. A todos, mil gracias.

Como ya se había informado, la revista está ahora en el portal de *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* cuyo sitio web oficial es: [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org). Ahora los artículos están identificados con el membrete del *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*. Por tanto, la revista tiene dos páginas web de uso oficial:

[divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org)                      y                      [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org),

donde serán publicados los artículos y se podrán descargar de forma gratuita. Sin embargo, el traspaso de los archivos a la plataforma de SERBILUZ se ha visto obstaculizado por problemas en la misma plataforma, por lo cual se sugiere a los autores visitar la dirección principal: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org). Todo esto con la finalidad de darle más expansión y reconocimiento a la revista.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* pide disculpas a los autores de los artículos aquí publicados por el leve retraso en la publicación de este número y por los inconvenientes que esto pudo haberles causados, les agradecemos su espera. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiéndolos sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

<sup>1</sup> Dr. Tobías Rosas Soto.

---

<sup>1</sup>Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

# Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 22, No. 1, 2022**. The articles contained in this volume are those received during the second semester of the year **2020** and during the first semester of the year **2021**, with ones were evaluated and accepted for publication, before the edition of this volume.

It is important to note, that despite the low demand for articles by authors and the complicated global situation regarding the COVID-19 pandemic that is being experienced, in particular, in our country Venezuela, the journal could receive thirteen 13 works of which six (6) did not approve the evaluation stage by the respective arbitrators. So, in this number are published five (5) articles in the Research Articles section, two (2) articles in the Expository and Historical Articles section and a manuscript with the solution of two (2) problems presented in the Problems and Solutions section, presenting this three new problems to solve proposed in the Mathematical Olympiad of Central America and the Caribbean 2020, organized by Panama and held virtually.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of Editorial Board and the Chief Editor, members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences from the University of Zulia. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this volume possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the *Problems and Solutions* section. To all of them, thanks a lot.

The journal is now in the portal of *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* with official webpage is: [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org). Now the articles are identify with the letterhead of *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*. Furthermore, the journal have two oficial webpages:

[divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org) and [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org),

where will be published the articles y it will may download in a free way. However, the transfer of the files to the SERBILUZ platform has been hampered by problems in the same platform, for which the authors are suggested to visit the main address:[divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org). All these with the purpose to give more expansion and recognition to the journal.

Finally, the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* ask for apologize to the authors of the articles published here for the slight delay in the publication of this issue and for the inconvenience that this may have caused them, we thank them for wait. Furthermore, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

<sup>2</sup> Dr. Tobías Rosas Soto.

---

<sup>2</sup>Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present volume

# DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 22, No. 1, 2021

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación

(Research papers)

- Caputo and Caputo-Fabrizio fractional differential masks for images.**  
Máscaras diferenciales fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio para la mejora de imágenes.  
*Gustavo MBoro, Leandro Lau, Ana Morales* 1–21
- A note on the Banach contraction principle in  $b$ -metric spaces.**  
Una nota sobre el principio de contracción de Banach en  $b$ -espacios métricos.  
*Mohamed Akkouchi* 22–30
- The graph of a base power  $b$ , associated to a positive.**  
El grafo potencia de base  $b$ , asociado a un entero positivo.  
*Daniel Brito, Oscar Castro, Lope Marín* 31–39
- Influence of physical exercise on the strengthening of immunity. Mathematical model.**  
Influencia del ejercicio físico en el fortalecimiento de la inmunidad. Modelo matemático.  
*Annia Ruiz- Daniela Rodríguez - Sandy Sánchez - Yuri Alcántara - Adolfo Fernández - Isabel Martén - Antonio Ruiz* 40–51
- A note on some forms of continuity.**  
Una nota sobre algunas formas de continuidad.  
*Zanyar Ameen* 52–63

### Artículos de Divulgación e Históricos

(Expository and Historical papers)

- Un breve recorrido histórico por el álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones a la economía.**  
A short tour along the history of linear algebra and some of its applications to economics.  
*Ana Martín, Concepción Paralera, Ángel Tenorio* 64–89
- A proof of a version of Hensel's lemma.**  
Una prueba de una versión del lema de Hensel.  
*Dinamérico Pombo* 90–95

**Problemas y Soluciones**  
(Problems and Solutions)

*José H. Nieto S.* (Editor)

96–98



# Caputo and Caputo-Fabrizio fractional differential masks for images enhancement

*Máscaras diferenciales fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio para la mejora de imágenes*

Gustavo Asumu MBoro Nchama ([asumu@matcom.uh.cu](mailto:asumu@matcom.uh.cu))

Universidad Nacional de Guinea Ecuatorial (UNGE)  
Malabo, Guinea Ecuatorial, Calle Hassan II

Leandro Daniel Lau Alfonso ([leandro@icimaf.cu](mailto:leandro@icimaf.cu))

Instituto de Cibernética Matemática y Física, ICIMAF  
Calle 15, No. 551, entre C y D, Vedado, Habana 4, CP-10400, Cuba

Ana Luisa Morales Galloso ([pedrosoaugusto584@gmail.com](mailto:pedrosoaugusto584@gmail.com))

Facultad de Ciencias Medicas, Miguel Enríquez  
Ramón Pinto y Ensenada Luyano, La Habana

## Abstract

Image enhancement is one of the most important tasks in the field of image processing. With the help of computer and programming languages many mathematical methods have been implemented to improve the visual quality of an image. One of the most effective methods for this purpose is the histogram equalization. The construction of fractional differential masks for images enhancement has also been proposed. In this paper, we propose a new way of construction of fractional differential mask based on the Caputo and Caputo-Fabrizio derivatives. The effectiveness of the proposed methods have been compared with the histogram equalization method and the multiplication of each pixel of an image by a constant. The experiments results have shown superiority of the proposed methods, with better visual quality and higher gray-level co-occurrence matrix values in four directions.

**Key words and phrases:** Contrast image enhancement, fractional calculus, fractional differential mask.

## Resumen

La mejora de imágenes es una de las tareas más importantes en el campo del procesamiento de imágenes. Con la ayuda de lenguajes informáticos y de programación, se han implementado muchos métodos matemáticos para mejorar la calidad visual de una imagen. Uno de los métodos más eficaces para este propósito es la ecualización del histograma. También se ha propuesto la construcción de máscaras diferenciales fraccionarias para la mejora de imágenes. En este artículo, se propone una nueva forma de construcción de máscara diferencial fraccional basada en las derivadas de Caputo y Caputo-Fabrizio. La eficacia de los métodos propuestos se ha comparado con el método de ecualización del histograma y la

---

Received 9/12/2020. Revised 12/01/2021. Accepted 11/04/2021.

MSC (2010): Primary 34Axx; Secondary 65Lxx.

Corresponding author: Gustavo Asumu MBoro Nchama

multiplicación de cada píxel de una imagen por una constante. Los resultados de los experimentos han demostrado la superioridad de los métodos propuestos, con una mejor calidad visual y valores de matriz de co-ocurrencia de nivel de gris más altos en cuatro direcciones.

**Palabras y frases clave:** Mejora de la imagen de contraste, cálculo fraccional, Máscara diferencial fraccionaria.

## 1 Introduction

Digital image processing is a set of techniques applied to digital images with the aim of improving their quality using a computer. For years, these type of techniques have been investigated and used in applications for different tasks such as image enhancement, image restoration and image edge detection, among others. For the image enhancement, various methods have been proposed: Histogram Equalization (HE) is one of the best used methods for image enhancement. It provides better quality of images without loss of any information [12]. The multiplication of each pixel of an image by a constant is also one of the effective methods to make image clearer. Recently, many authors have proposed the construction of masks, for image enhancement, based on fractional derivatives [38-47]. A fractional derivative is an integral operator which generalizes the ordinary derivative, such that if the fractional derivative is represented by  $D^\alpha$  then, when  $\alpha = n$ , it coincides with the usual differential operator  $D^n$  [5]. Such kind of operators are defined by the help of spaces as:

**Definition 1.1.** A function  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be absolutely continuous on  $[a, b]$ , denoted by  $f \in AC[a, b]$ , if given  $\epsilon > 0$  there exists some  $\sigma > 0$  such that

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

whenever  $\{[x_k, y_k] : k = 1, \dots, n\}$  is a finite collection of mutually disjoint subintervals of  $[a, b]$  with

$$\sum_k (y_k - x_k) < \sigma.$$

**Definition 1.2.** Let  $n \in \mathbb{N}$  and  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , the space  $AC^n[a, b]$  is defined by

$$AC^n[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f^{(k)}(t) \in C[a, b], f^{(n-1)}(t) \in AC[a, b]\}.$$

There are many definitions of fractional derivatives [42-4]. One of the most popular was defined by Gronwald and Letnikov:

**Definition 1.3.** Let  $a, b \in \mathbb{R}$  with  $a < b$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f \in C^n[a, b]$ . The Gronwald-Letnikov (*GL*) fractional derivative of order  $\alpha$ , is given by

$${}^{GL}D_{at}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh). \quad (1)$$

where  $\left[\frac{x-a}{h}\right]$  denotes the integer part of  $\frac{x-a}{h}$ .

One of the inconveniences of Gronwald-Letnikov derivative is that the class of functions for which this derivative is defined is very narrow. To overcome this inconvenience, Riemann and Liouville proposed the following definition [17]:

**Definition 1.4.** Let  $a, b \in \mathbb{R}$  with  $a < b$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f \in AC^n[a, b]$ . The Riemann-Liouville (*RL*) fractional derivative of order  $\alpha$ , is defined by

$${}^{RL}D_{at}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - s)^{n-(\alpha+1)} f(s) ds.$$

Even though the *RL* approach overcomes the drawbacks related the *GL* definition and it has been applied successfully in many areas of engineering, unfortunately, it leads to initial conditions containing the limit values of the *RL* fractional derivative at the lower terminal  $t = a$ , for example

$$\lim_{t \rightarrow a} \{{}^{RL}D_{at}^{\alpha-1} f(t)\} = b_1, \quad \lim_{t \rightarrow a} \{{}^{RL}D_{at}^{\alpha-2} f(t)\} = b_2, \quad \dots, \quad \lim_{t \rightarrow a} \{{}^{RL}D_{at}^{\alpha-n} f(t)\} = b_n.$$

In spite of the fact that initial value problems with such initial conditions can be successfully solved mathematically, their solutions are practically useless, because there is no known physical interpretation for such types of initial conditions. An alternative solution to this conflict was proposed by M. Caputo [17]:

**Definition 1.5.** Let  $a, b \in \mathbb{R}$  with  $a < b$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f \in AC^n[a, b]$ . The Caputo fractional derivative of order  $\alpha$ , is defined by

$${}^C D_{at}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n-(\alpha+1)} f^{(n)}(s) ds. \tag{2}$$

For  $0 < \alpha \leq 1$  and  $a = 0$ , the numerical approximation of (2) takes the form

$${}^C D_{0x}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{-\alpha} u'(\xi) d\xi \approx \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kx}{N}}^{\frac{(k+1)x}{N}} (x - \xi)^{-\alpha} u'(\xi_k) d\xi. \tag{3}$$

To describe material heterogeneity and structures with different scales which cannot be well described by classical local theories or by fractional models with singular kernel, Caputo and Fabrizio introduced a new fractional approach [7]:

**Definition 1.6.** Let  $a, b \in \mathbb{R}$  with  $a < b$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $f \in AC^1[a, b]$ . The Caputo-Fabrizio fractional derivative of order  $\alpha$ , is defined by

$${}^{CF} D_{ax}^\alpha u(x) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-s)} u'(s) ds,$$

where  $M(\alpha)$  is a function such that  $M(0) = M(1) = 1$ .

In [24], Losada and Nieto, suggested the following particular case

$$\begin{aligned} {}^{CF} D_{ax}^\alpha u(x) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-s)} u'(s) ds \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \left( u(x) - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}x} u(a) \right) - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \int_a^x e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-\tau)} u(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Taking  $a = 0$ , formula (4) can be approximated as

$${}^{CF}D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-\xi)} u'(\xi) d\xi \approx \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\frac{kx}{N}}^{\frac{(k+1)x}{N}} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-\xi)} u'(\xi_k) d\xi. \quad (5)$$

Fractional derivatives provide interesting possibilities for scientific fields such as anomalous diffusion [40-23], circuit theory [3-43], image processing [33-26] and many others [1-29]. The purpose of this paper is to improve the visual quality of dark images by using Fractional Differential Masks in Caputo (FDMC) and Caputo-Fabrizio (FDMCF) senses. The remainder of this paper is organized as follows: in section 2, we construct a fractional differential mask in the Caputo sense, next, fractional differential mask in Caputo-Fabrizio sense is given in section 3. Section 4 presents the experimental results of the proposed methods. A conclusion is considered in section 5.

## 2 Prewitt fractional filter in the Caputo sense

The goal of this section is to construct a fractional differential mask based on the Caputo derivative definition. For this purpose, we first discretize numerically the Caputo derivative based on the forward finite difference scheme in the interval  $[0, x]$  (analogously  $[0, y]$ ). Let's take a partition of  $N$  nodes of the interval  $[0, x]$ , with step  $\Delta x = \frac{x}{N}$ . Thus, there are  $N + 1$  nodes. The  $N + 1$  causal pixels can be given by

$$\begin{cases} u_0 = u(0) \\ u_1 = u(\frac{x}{N}) \\ \vdots \\ u_k = u(\frac{kx}{N}) \\ \vdots \\ u_N = u(x), \end{cases}$$

For  $\alpha \in (0, 1)$ , by approximating, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\frac{kx}{N}}^{\frac{(k+1)x}{N}} (x-\xi)^{-\alpha} u'(\xi_k) d\xi &\approx \frac{u(\frac{kx+x}{N}) - u(\frac{kx}{N})}{\Delta x} \int_{\frac{kx}{N}}^{\frac{kx+x}{N}} (x-\xi)^{-\alpha} d\xi \\ &= \frac{u(\frac{kx+x}{N}) - u(\frac{kx}{N})}{-(1-\alpha)(\Delta x)^{\alpha}} [(N-k-1)^{1-\alpha} - (N-k)^{1-\alpha}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Then, taking (6) into (3), we have

$$\begin{aligned}
 {}^C D_{0x}^\alpha u(x) &\approx \frac{1}{(\Delta x)^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[ u\left(\frac{(k+1)x}{N}\right) - u\left(\frac{kx}{N}\right) \right] [(N-k-1)^{1-\alpha} - (N-k)^{1-\alpha}] \right\} \\
 &= \frac{1}{(\Delta x)^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \left\{ \begin{aligned} &1^{1-\alpha} u_N + (2^{1-\alpha} - 2 \cdot 1^{1-\alpha}) u_{N-1} \\ &+ (2 \cdot 2^{1-\alpha} - 3^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) u_{N-2} \\ &+ [(N-j-1)^{1-\alpha} + (N-j+1)^{1-\alpha} \\ &- 2(N-j)^{1-\alpha}] u_j + \dots + [(N-2)^{1-\alpha} \\ &- 2(N-1)^{1-\alpha} + N^{1-\alpha}] u_1 \\ &+ [(N-1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}] u_0 \end{aligned} \right\}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

The anterior approximate difference of fractional partial differential on  $x$  and  $y$  coordinates are expressed as

$${}^C D_{0x}^\alpha u(x, y) \approx \frac{1}{(\Delta x)^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \left\{ \begin{aligned} &1^{1-\alpha} u(x, y) + (2^{1-\alpha} - 2 \cdot 1^{1-\alpha}) u(x-1, y) \\ &+ (2 \cdot 2^{1-\alpha} - 3^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) u(x-2, y) \\ &+ \dots + [(N-1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}] u(x-n, y) \end{aligned} \right\}, \tag{8}$$

and

$${}^C D_{0y}^\alpha u(x, y) \approx \frac{1}{(\Delta x)^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \left\{ \begin{aligned} &1^{1-\alpha} u(x, y) + (2^{1-\alpha} - 2 \cdot 1^{1-\alpha}) u(x, y-1) \\ &+ (2 \cdot 2^{1-\alpha} - 3^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) u(x, y-2) \\ &+ \dots + [(N-1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}] u(x, y-n) \end{aligned} \right\}. \tag{9}$$

As in a digital 2- $D$  gray image  $u(x, y)$ , the shortest distance on  $x$  and  $y$  coordinates is one pixel, then we put  $\Delta x = \Delta y = 1$ , and from (7), we obtain  $N + 1$  coefficients  $c_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ), which

depend on the fractional order  $\alpha$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \\ c_1 = \frac{2^{1-\alpha} - 2 \cdot 1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \\ c_2 = \frac{2 \cdot 2^{1-\alpha} - 3^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \\ \vdots \\ c_j = \frac{(N-j-1)^{1-\alpha} + (N-j+1)^{1-\alpha} - 2(N-j)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \\ \vdots \\ c_N = \frac{(N-1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \end{array} \right.$$

### 3 Prewitt fractional filter in the Caputo-Fabrizio sense

Following the idea as in the previous section, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\frac{kx}{N}}^{\frac{(k+1)x}{N}} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-\xi)} u'(\xi_k) d\xi &\approx \frac{u\left(\frac{kx+x}{N}\right) - u\left(\frac{kx}{N}\right)}{\Delta x} \int_{\frac{kx}{N}}^{\frac{kx+x}{N}} e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(x-\xi)} d\xi, \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{u\left(\frac{kx+x}{N}\right) - u\left(\frac{kx}{N}\right)}{\Delta x} \cdot [e^{-\frac{\alpha(N-k-1)\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha(N-k)\Delta x}{1-\alpha}}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Inserting (10) into (5), we have

$$\begin{aligned} {}^{CF}D_{0x}^\alpha u(x) &\approx \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[ \frac{u\left(\frac{(k+1)x}{N}\right) - u\left(\frac{kx}{N}\right)}{\frac{x}{N}} \right] \left[ e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}[N-(k+1)]\frac{x}{N}} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}[N-k]\frac{x}{N}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot \Delta x} \left\{ \begin{array}{l} (1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta x})u_N + (2e^{-\frac{\alpha\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-2\frac{\alpha\Delta x}{1-\alpha}} - 1)u_{N-1} + \\ (2e^{-\frac{2\alpha\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-3\frac{\alpha\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha\Delta x}{1-\alpha}})u_{N-2} + \dots + \\ (2e^{-\frac{\alpha(N-j)\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha(N-j-1)\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha(N-j+1)\Delta x}{1-\alpha}})u_j \\ + \dots + (2e^{-\frac{\alpha(N-1)\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha(N-2)\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha N\Delta x}{1-\alpha}})u_1 \\ + (2e^{-\frac{\alpha N\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha(N-1)\Delta x}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha(N+1)\Delta x}{1-\alpha}})u_0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

From (11), we obtain  $N + 1$  nonzero coefficients  $c_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ), given by

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{\alpha\Delta x} (1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta x}), \\ c_1 = \frac{1}{\alpha\Delta x} (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta x} - e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}\Delta x} - 1), \\ c_2 = \frac{1}{\alpha\Delta x} (2e^{-2\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta x} - e^{-3\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta x}), \\ \vdots \\ c_j = \frac{1}{\alpha\Delta x} (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-j)\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-j-1)\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-j+1)\Delta x}), \\ \vdots \\ c_{N-1} = \frac{1}{\alpha\Delta x} (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-1)\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-2)\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}N\Delta x}), \\ c_N = \frac{1}{\alpha\Delta x} (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}N\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-1)\Delta x} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N+1)\Delta x}). \end{cases}$$

Taking  $\Delta x = \Delta y = 1$ , as in the previous section, we obtain the followings two expressions:

$${}^{CF}D_{0y}^\alpha u(x, y) \approx \frac{1}{\alpha} \left\{ \begin{aligned} &(1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}})u(x, y) + (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1)u(x - 1, y) \\ &+ (2e^{-2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-3\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}})u(x - 2, y) + \dots \\ &+ (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}N} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-1)} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N+1)})u(x - n, y) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

and

$${}^{CF}D_{0y}^\alpha u(x, y) \approx \frac{1}{\alpha} \left\{ \begin{aligned} &(1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}})u(x, y) + (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1)u(x, y - 1) \\ &+ (2e^{-2\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-3\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}})u(x, y - 2) + \dots \\ &+ (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}N} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N-1)} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(N+1)})u(x, y - n) \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

The next images show the results of applying the proposed FDMCF, with different values of differential order  $\alpha$ , on the following images: goldhill image, drak bedroom and dark room.



(a) Original image

(b)  $\alpha = 0.0071$ (c)  $\alpha = 0.0072$ (d)  $\alpha = 0.0073$ (e)  $\alpha = 0.0074$ (f)  $\alpha = 0.0075$ 

Figure 1: Result of applying the proposed FDMCF on goldhill image with different values of differential order  $\alpha$ .



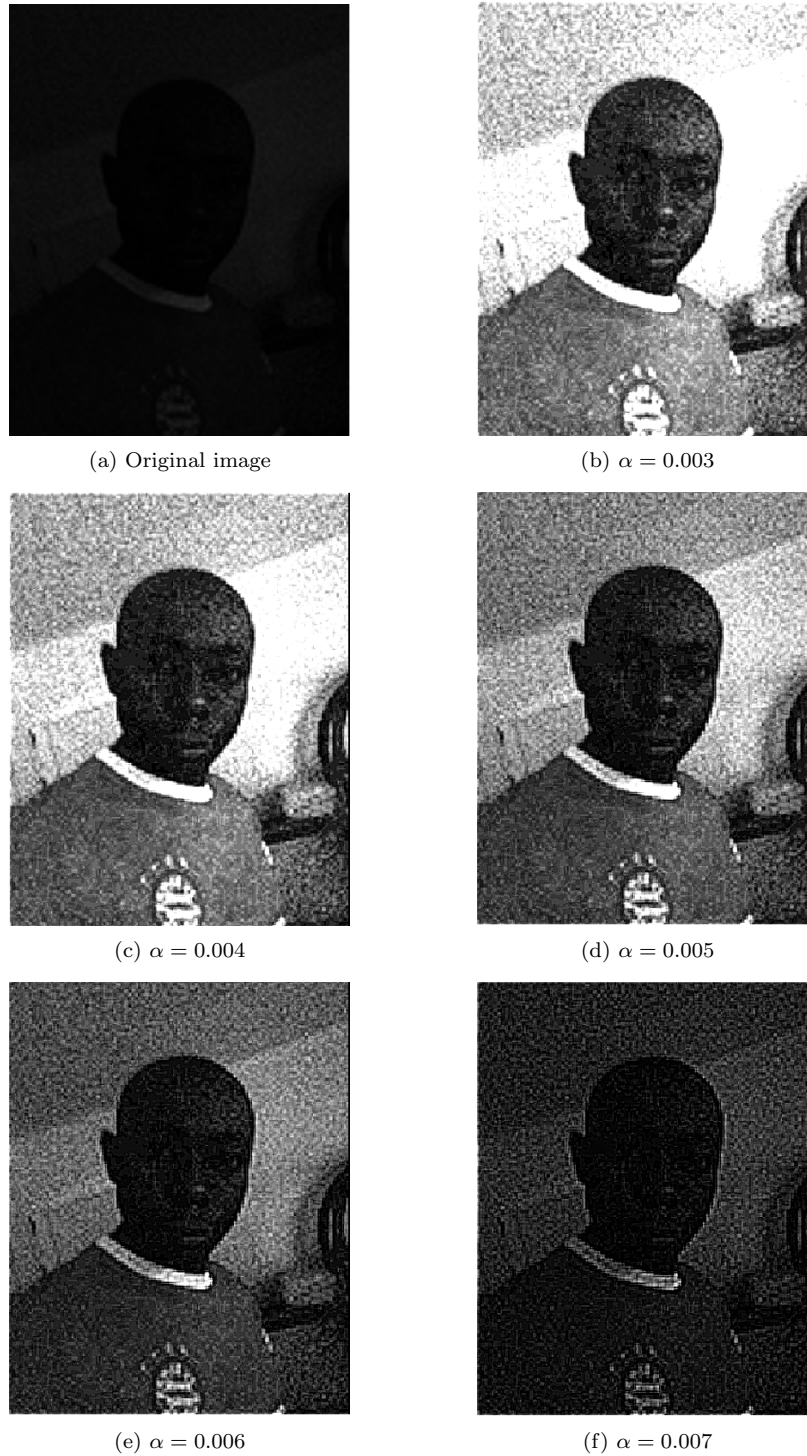


Figure 2: Result of applying the proposed FDMCF on a dark bedroom image with different values of differential order  $\alpha$ .



(a) Original image

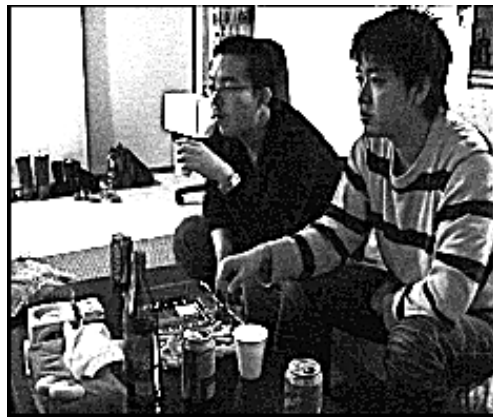
(b)  $\alpha = 0.003$ (c)  $\alpha = 0.004$ (d)  $\alpha = 0.005$ (e)  $\alpha = 0.006$ (f)  $\alpha = 0.007$ 

Figure 3: Result of applying the proposed FDMCF on a dark room image with different values of differential order  $\alpha$ .

The next tables show the results of contrast in terms of the Gray-Level Co-occurrence Matrix (GLCM) in 4 directions, on the following images: goldhill image, drak bedroom and dark room.

		Angle			
		0 <sup>0</sup>	45 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	135 <sup>0</sup>
Original image		0.2743	0.5685	0.4336	0.5542
M e t h o d	HE	0.5018	0.9403	0.6727	0.9352
	MPIT	0.4642	0.8428	0.6060	0.8476
	FDMC for $\alpha = 0.0155$	7.4922	11.7211	8.8573	11.5499
	FDMC for $\alpha = 0.0165$	13.0910	18.5857	12.7200	18.6007
	FDMC for $\alpha = 0.0170$	15.1278	20.5889	13.4156	20.7000
	FDMCF for $\alpha = 0.0071$	9.0089	12.3465	8.7710	12.4288
	FDMCF for $\alpha = 0.0072$	9.5492	12.8873	9.0874	13.0488
	FDMCF for $\alpha = 0.0073$	9.9501	13.2338	9.2318	13.4732

Table 1: Gold-hill image.

		Angle			
		0 <sup>0</sup>	45 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	135 <sup>0</sup>
Original image		0.0007	0.0888	0.0885	0.0888
M e t h o d	HE	0.2229	0.3526	0.2241	0.3632
	MPITH	0.1345	0.2625	0.1488	0.2638
	FDMC for $\alpha = 0.013$	0.7667	1.4983	1.0776	1.5015
	FDMC for $\alpha = 0.014$	0.7653	1.4477	1.0253	1.4494
	FDMC for $\alpha = 0.015$	0.7172	1.4236	1.0371	1.4240
	FDMCF for $\alpha = 0.005$	0.6574	1.0510	0.6768	1.0653
	FDMCF for $\alpha = 0.006$	0.6459	0.9865	0.6296	0.9923
	FDMCF for $\alpha = 0.007$	0.5014	0.7176	0.4438	0.7180

Table 2: Dark bedroom.

		Angle			
		0 <sup>0</sup>	45 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	135 <sup>0</sup>
Original image		0.4711	0.6691	0.2139	0.6694
M e t h o d	HE	0.6178	0.8568	0.5153	0.8977
	MPITH	0.4221	0.7419	0.4225	0.7560
	FDMC for $\alpha = 0.013$	3.5218	5.4161	3.4127	5.4255
	FDMC for $\alpha = 0.014$	3.6872	5.8437	3.7464	5.8422
	FDMC for $\alpha = 0.015$	3.8128	6.0092	3.8800	6.0260
	FDMCF for $\alpha = 0.005$	2.4504	3.9630	2.6457	3.9593
	FDMCF for $\alpha = 0.006$	2.5697	4.2178	2.8633	4.1469
	FDMCF for $\alpha = 0.007$	2.7114	4.0842	2.6762	4.0415

Table 3: Dark room.

The following images show the comparison of contrast enhancement capability between the methods: MPIT; MPITH; HE; FDMC; and FDMCF applied to the *Goldhill image*.



(a) Original image



(b) MPIT



(c) MPITH



(d) HE

(e) FDMC with  $\alpha = 0.0155$ (f) FDMCF with  $\alpha = 0.0072$ 

Figure 4: Comparison of contrast enhancement capability between methods.

The next images show the comparison of contrast enhancement capability between the methods: MPIT; MPITH; HE; FDMC; and FDMCF applied to the *Dark Bedroom image*.

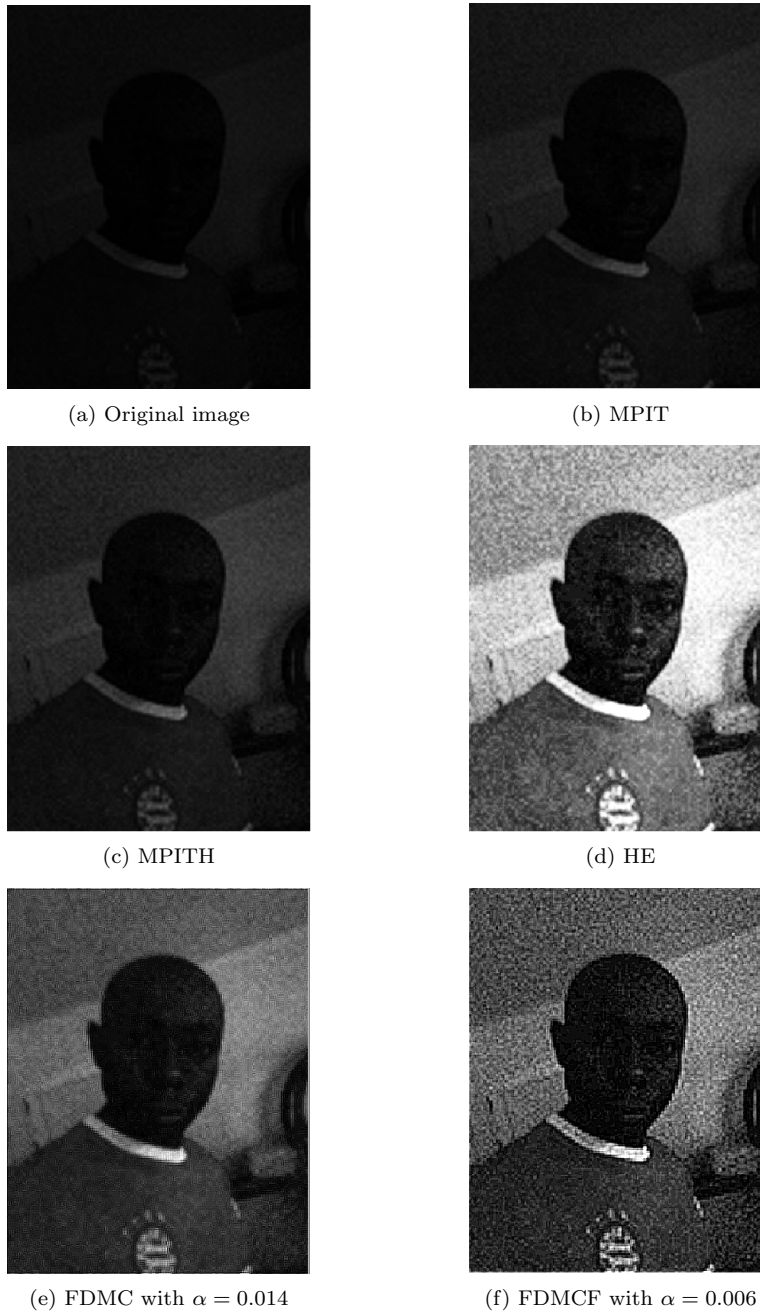


Figure 5: Comparison of contrast enhancement capability between methods.

The next images show the comparison of contrast enhancement capability between the methods: MPIT; MPITH; HE; FDMC; and FDMCF applied to the *Dark room image*.



(a) Original image



(b) MPIT



(c) MPITH



(d) HE

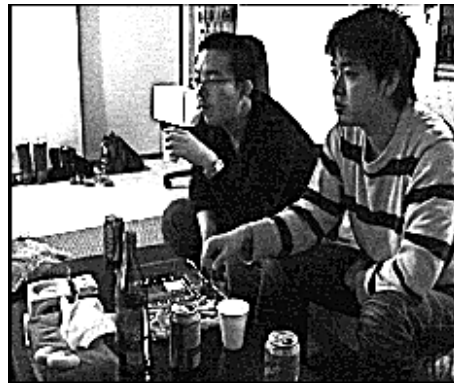
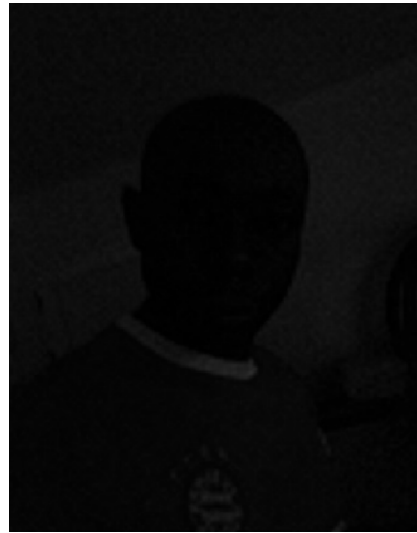
(e) FDMC with  $\alpha = 0.013$ (f) FDMCF with  $\alpha = 0.005$ 

Figure 6: Comparison of contrast enhancement capability between methods.



(a) Dark bedroom image



(b) Dark room image



(c) Gold-hill image

Figure 7: Original images used in the experimental result.

## 4 Experimental results

The aim of this section is to demonstrate that fractional differential masks based on Caputo (FDMC) and Caputo-Fabrizio (FDMCF) definitions have better capability in texture-enhancing than the traditional approaches for texture-rich image. To this purpose, we analyze the texture-enhancing capability of the proposed masks and discuss the relationship between fractional power parameter  $\alpha$  and texture-enhancing details by using Gray-Level Co-occurrence Matrix (GLCM). Finally, we discuss the capability of texture enhancement of the proposed masks by making comparison with Histogram Equalization (HE), Multiplication of each Pixel of an Image by Two (MPIT) and Multiplication of each Pixel of an Image by Three (MPITH) methods. Three images

used in the experimental results are shown in Figures 7. First is dark bedroom image, second is a dark room image, the third one is the gold-hill image. To obtain the fractional differential on the eight symmetric directions and make the fractional differential masks have anti-rotation capability, eight fractional differential masks which are respectively on the directions of  $0^0$ ,  $45^0$ ,  $90^0$ ,  $135^0$ ,  $180^0$ ,  $225^0$ ,  $270^0$  and  $315^0$  are implemented in Fig. 8. Considering

$$sum = \frac{c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n}{8}$$

and taking into account the eight neighboring pixels of a given one, we propose the fractional differential mask, given by Table 4.

$C_n$	0	0	$C_n$	0	0	$C_n$
0	$\ddots$	0	$\vdots$	0	$\ddots$	0
$\vdots$	0	$C_1$	$C_1$	$C_1$	0	$\vdots$
$C_n$	$\dots$	$C_1$	sum	$C_1$	$\dots$	$C_n$
$\vdots$	0	$C_1$	$C_1$	$C_1$	0	$\vdots$
0	$\ddots$	0	$\vdots$	0	$\ddots$	0
$C_n$	0	0	$C_n$	0	0	$C_n$

Table 4: Fractional differential mask.

For the implementation of the FDMCF method, we have taken only the following three coefficients:

$$c_0 = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}),$$

$$c_1 = \frac{1}{\alpha} (2e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} - e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}} - 1),$$

$$c_2 = \frac{1}{\alpha} (2e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}} - e^{-\frac{3\alpha}{1-\alpha}} - e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}),$$

while for the FDMC method, we considered the coefficients:

$$c_0 = \frac{1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad c_1 = \frac{2^{1-\alpha} - 2 \cdot 1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad c_2 = \frac{2 \cdot 2^{1-\alpha} - 3^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$



$c_0$	0	...							
0	$c_1$	0	...						
$\vdots$	0	$c_2$	0						
	$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$					
		$\vdots$	0	$c_k$	0	$\vdots$			
			$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	0	...		
				...	0	$c_{N-2}$	0	$\vdots$	
					...	0	$c_{N-1}$	0	
						...	0	$c_N$	

Mask in the direction of  $315^\circ$

					...	0	$c_{N-1}$	$c_N$	
				...	0	$c_{N-2}$	0	$\vdots$	
				$\ddots$	$\ddots$	0	$\vdots$		
				...	0	$c_k$	0	...	
			$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$		
			$\vdots$	0	$c_2$	0	...		
			0	$c_1$	0	...			
$c_0$	0	...							

Mask in the direction of  $45^\circ$

		...	0	$c_N$	0	...			
		...	0	$c_{N-1}$	0	...			
		...	0	$c_{N-2}$	0	...			
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
		...	0	$c_k$	0	...			
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
		...	0	$c_2$	0	...			
		...	0	$c_1$	0	...			
		...	0	$c_0$	0	...			

Mask in the direction of  $90^\circ$

		...	0	$c_0$	0	...			
		...	0	$c_1$	0	...			
		...	0	$c_2$	0	...			
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
		...	0	$c_k$	0	...			
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
		...	0	$c_{N-2}$	0	...			
		...	0	$c_{N-1}$	0	...			
		...	0	$c_N$	0	...			

Mask in the direction of  $270^\circ$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	...	0	...	0	0	0	0
$c_N$	$c_{N-1}$	$c_{N-2}$	...	$c_k$	...	$c_2$	$c_1$	$c_0$	
0	0	0	...	0	...	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Mask in the direction of  $180^\circ$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	...	0	...	0	0	0	0
$c_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_k$	...	$c_{N-2}$	$c_{N-1}$	$c_N$	
0	0	0	...	0	...	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Mask in the direction of  $0^\circ$

$c_N$	0	...							
0	$c_{N-1}$	0	...						
$\vdots$	0	$c_{N-2}$	0						
	$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$					
		$\vdots$	0	$c_k$	0	$\vdots$			
			$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	0	...		
				...	0	$c_2$	0	$\vdots$	
					...	0	$c_1$	0	
						...	0	$c_0$	

Mask in the direction of  $135^\circ$

					...	0	$c_0$		
					...	0	$c_1$	0	
				...	0	$c_2$	0	$\vdots$	
				$\ddots$	$\ddots$	0	$\vdots$		
				...	0	$c_k$	0	...	
			$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$		
			$\vdots$	0	$c_{N-2}$	0	...		
			0	$c_{N-1}$	0	...			
$c_N$	0	...							

Mask in the direction of  $225^\circ$

Figure 8: Different mask

Images a) of the Figures 1, 2 and 3 are the original images while images b), c), d) and f) of Figures 1, 2 and 3 are the results of applying the FDMCF method on the original images with different values of differential order. Images a), b), c), d) and f) of the Figures 4, 5 and 6 are the original image, enhancing result of a) by MPIT, enhancing result of a) by MPITH, enhancing result of a) by HE, enhancing result of a) by FDMC and enhancing result of a) by FDMCF, respectively. On these figures, we can see that images obtained by the proposed methods look better than those obtained by other methods. For the comparison purpose, we use the contrast of Gray-Level Co-occurrence Matrix (GLCM) in four directions. Tables 1, 2 and 3 are the contrasts of GLCM in four directions. From these tables we can conclude that the proposed methods outperform HE, MPIT and MPITH methods. Based on the results shown in Figures 4, 5 and 6 we can see that the proposed methods are more effective than the HE, MPIT and MPITH methods, since they enhance better the visual appearance of an image and make it clearer.

## 5 Conclusion

In this paper, we proposed construction of fractional differential masks using Caputo and Caputo-Fabrizio fractional derivatives. Experiments results showed that filtered images by the proposed methods have better visual appearance. Moreover, the proposed techniques have demonstrated a good performance with higher GLCM values.

## References

- [1] Ajou, A.; Oqielat, M. N.; Al-Zhour, Z.; Kumar, S. and Momani, S.; *Solitary solutions for time-fractional nonlinear dispersive PDEs in the sense of conformable fractional derivative*, Chaos (2019), **29** (2019), 093102.
- [2] Al-Zhour, Z.; Barfeie, M.; Soleymani, F. and Tohidi, E.; *A computational method to price with transaction costs under the nonlinear Black-Scholes model*, Chaos, Solitons & Fractals, **127** (2019), 291–301.
- [3] Andrade, A. M. F.; Lima, E. G. and Dartora, C. A.; *An introduction to fractional calculus and its Applications in Electric Circuits*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **40** (2018), e3314.
- [4] Atangana, A. and Baleanu, D.; *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model*, arXiv preprint, arXiv:1602.03408 (2016).
- [5] Baleanu, D.; Diethelm, K.; Escalas, E.; and Trujillo, J. J.; *Fractional Calculus: Models and numerical methods*, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, **3** (2012).
- [6] Baleanu, D.; Jajarmi, A.; Sajjadi, S. S. and Mozyrska, D.; *A new fractional model and optimal control of a tumor-immune surveillance with non-singular derivative operator*, Chaos, **29** (2019), 083127.
- [7] Caputo, M. and Fabrizio, M.; *A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel*, Progr. Fract. Differ. Appl., **1** (2005), 73–85.

- [8] Concezzi, M. and Spigler, R.; *Identifying the Fractional Orders in Anomalous Diffusion Models from Real Data*, *Fractal Fract.*, **2**(1) (2014), 14.
- [9] El-Ajou, A.; Al-Zhour, Z.; Oqielat, M.; Momani, S. and Hayat, T.; *Series Solutions of Nonlinear Conformable Fractional KdV-Burgers Equation with Some Applications*, *The European Physical Journal Plus*, **134** (2019), 402.
- [10] El-Ajou, A.; Oqielat, M.; Al-Zhour, Z. and Momani, S.; *Analytical Numerical Solutions of the Fractional Multi-Pantograph System: Two Attractive Methods and Comparisons*, *Results in Physics*, **14** (2019), 102500.
- [11] El-Ajou, A.; Oqielat, M.; Al-Zhour, Z.; Kumar, S. and Momani, S.; *Solitary solutions for time-fractional nonlinear dispersive PDEs in the sense of conformable fractional derivative*, *Chaos*, **29** (2019), 093102.
- [12] Garg, P. and Jain, T.; *A comparative study on histogram equalization and cumulative histogram equalization*. *International Journal of technology and research*, **3**(9) (2017), 41–43.
- [13] Goufo, E. F. D. and Mugisha, S. B.; *Similarities in a fifth-order evolution equation with and without singular kernel*, *Chaos, Solitons & Fractals*, **130** (2020), 10946.
- [14] Jajarmi, A.; Arshad, S. and Baleanu, D.; *A new fractional modelling and control strategy for the outbreak of dengue fever*, *Physica A.*, **535** (2019), 122524.
- [15] Jajarmi, A.; Baleanu, D.; Sajjadi, S. S. and Asad, J. H.; *A new feature of the fractional Euler-Lagrange equations for a coupled oscillator using a nonsingular operator approach*, *Frontiers in Physics*, **7** (2019), 00196.
- [16] Jajarmi, A.; Ghanbari, B. and Baleanu, D.; *A new and efficient numerical method for the fractional modelling and optimal control of diabetes and tuberculosis co-existence*, *Chaos*, **29** (2019), 093111.
- [17] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J.; *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, *North Holland Mathematics Studies*, **204** (2006).
- [18] Kumar, S.; *A new fractional modeling arising in engineering sciences and its analytical approximate solution*, *Alexandria Engineering Journal*, **52** (2013), 813–819.
- [19] Kumar, S.; Kumar, A.; Abbas, S.; Al Qurashi, M. and Baleanu, D.; *A modified analytical approach with existence and uniqueness for fractional Cauchy reaction-diffusion equations*, *Advances in Difference Equations*, **2020**(1) (2020), 1–18.
- [20] Kumar, S.; Kumar, A. and Nisar, K. S.; *Numerical solutions of nonlinear fractional model arising in the appearance of the strip patterns in two dimensional systems*, *Advances in Difference Equations*, **413** (2019).
- [21] Kumar, R.; Kumar, S.; Singh, J. and Al-Zhour, Z. *A comparative study for fractional chemical kinetics and carbon dioxide  $CO_2$  absorbed into phenyl glycidyl ether problems*, *Mathematics*, **5**(4) (2020), 3201–3222.
- [22] Kumar, S.; Nisar, K. S.; Kumar, R.; Cattani, C. and Samet, B.; *A new Rabotnov fractional-exponential function based fractional derivative for diffusion equation under external force*, *Mathematical Methods in Applied Science*, **43** (2020), 4460–4471.

- [23] Liang, X.; Gao, F.; Zhou, C. B.; Wang, Z. and Yang, X. J.; *An anomalous diffusion model based on a new general fractional operator with the Mittag-Leffler function of Wiman type*, Advances in Difference Equations, **18**(1) (2018), 25.
- [24] Losada, J. and Nieto, J.; *Properties of a New Fractional Derivative without Singular Kernel*, Progr. Fract. Differ. Appl., **1** (2015), 87–92.
- [25] Mboro Nchama, G. A.; Alfonso, L. L.; León Mecías, A. M. and Rodríguez Richard, M.; *Construction of Caputo-Fabrizio fractional differential mask for image enhancement*, Progress in Fractional Differentiation and Application (2020).
- [26] Mboro Nchama, G. A.; León Mecías, A. M. and Rodríguez Ricard, M.; *Perona-Malik model with diffusion coefficient depending on fractional gradient via Caputo-Fabrizio derivative*, Abstract and Applied Analysis (2020), **2020** (2020), 15 pages.
- [27] Mboro-Nchama, G. A.; Mecías, A. L. and Ricard, M. R.; *The Caputo-Fabrizio fractional integral to generate some new inequalities*, Information Sciences Letters, **8** (2019), 73–80.
- [28] Mboro-Nchama, G. A.; Mecías, A. L. and Ricard, M. R.; *Properties of the Caputo-Fabrizio fractional derivative*, Applied Mathematics & Information Sciences, **14** (2020), 1–10.
- [29] Mboro Nchama, G. A.; *New fractional integral inequalities via Caputo-Fabrizio operator and an open problem concerning an integral inequality*, New trends in Mathematical Sciences (2020), **8**(2) (2020), 9–21.
- [30] Mboro Nchama, G. A.; *On open problems concerning Riemann-Liouville fractional integral inequality*, Mediterranean Journal of Modeling and Simulation, **11** (2019), 001–008.
- [31] Mboro-Nchama, G. A.; *Properties of Caputo-Fabrizio fractional operators*, New Trends in Mathematical Sciences, **8** (2020), 1–25.
- [32] Morales-Delgado, V. F.; Gómez-Aguilar, J. F. and Taneco-Hernández, M. A.; *Analytical solutions of electrical circuits described by fractional conformable derivatives in Liouville-Caputo sense*, International Journal of Electronics and Communications, **85** (2018), 108–117.
- [33] Nandal, A.; Gamboa-Rosales, H.; Dhaka, A.; Celaya-Padilla, J. M.; Galvan-Tejada, J. I.; Galvan-Tejada, C. E.; Martinez-Ruiz, F. J. and Guzman-Valdivia, C.; *Image edge detection using fractional calculus with feature and contrast enhancement*. Circuits, Systems, and Signal Processing, **37**(9) (2018), 3946–3972.
- [34] Odham, K. B. and Spanier, J.; *The Fractional Calculus*, Academic Press (1984), New York.
- [35] Oqielat, M.; El-Ajou, A.; Al-Zhour, Z.; Alkhasawneh, R. and Alrabaiah, H.; *Series solutions for nonlinear time-fractional Schrödinger equations: Comparisons between conformable and Caputo derivatives*, Alexandria Engineering Journal (2020).
- [36] Polubny, I.; *Fractional Differential Equations*, Academic Press (1999), New York.
- [37] Pu, Y.; *Application of fractional differential approach to digital image processing*. Journal of Sichuan University, **39**(3) (2007), 124–132.

- [38] Pu, Y.; Wang, W.; Zhou, J. et al. *Fractional differential approach to detecting texture features of digital image and its fractional differential filter implementation*, Sci. China Ser. F, Inf. Sci.; **38**(12) (2008), 2252–2272.
- [39] Qing-li, C.; H. Guo, H. and Xiu-qiong, Z.; *A Fractional Differential Approach to Low Contrast Image Enhancement*, International Journal of Knowledge and Language Processing (2012), **3**(2) (2012), 20–27.
- [40] Ramírez, C.; Astorga, V.; Nuñez, H.; Jaques, A. and Simpson, R.; *Anomalous diffusion based on fractional calculus approach applied to drying analysis of apple slices: The effects of relative humidity and temperature*, Food Process Engineering (2017), **40** (5) (2017), e12549.
- [41] Rchid, M.; Ammi, S. and Jamiai, I.; *Finite difference and Legendre spectral method for a time-fractional diffusion-convection equation for image restoration*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series, **11** (2018), 103–117.
- [42] Sabatier, J.; Agrawal, O. P. and Machado, J. A. T.; *Advanced in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer (2007).
- [43] Sikora, R.; *Fractional derivatives in electrical circuit theory critical remarks*, Archives of Electrical Engineering, **66** (2017), 155–163.
- [44] Surya Prasath, V. B.; *Image denoising by anisotropic diffusion with inter-scale information fusion*, Pattern Recognition and Image Analysis, **27** (2017), 748–753.
- [45] Yirenkyi, P. A.; Appati, J. K. and Dontwi, I. K.; *A new construction of a fractional derivative mask for image edge analysis based on Riemann-Liouville fractional derivative*. Advances in Difference Equations (2016), DOI 10.1186/s13662-016-0946-8, pp. 1-21.
- [46] Yu, J.; Zhai, R.; Zhou, S. and Tan, L.; *Image Denoising Based on Adaptive Fractional Order with Improved PM Model*, Mathematical Problems in Engineering (2018), Article ID 9620754.
- [47] Zhang, Y.; Pu, Y. and Zhou, J.; *Construction of Fractional differential Masks Based on Riemann-Liouville Definition*. Journal of Computational Information Systems, **6** (2010), 3191–3198.

# A note on the Banach contraction principle in $b$ -metric spaces

*Una nota sobre el principio de contracción de Banach en  $b$ -espacios métricos*

Mohamed Akkouchi (akkm555@yahoo.fr)

Department of Mathematics  
Faculty of Sciences-Semlalia, University Cadi Ayyad  
Av. Prince My. Abdellah, BP: 2390, Marrakesh;  
(40.000-Marrakech), Morocco (Maroc).

## Abstract

Let  $(X, d; s)$  be a complete  $b$ -metric space with parameter  $s \geq 1$ . Let  $T$  a contractive map on  $X$ , that is a selfmap  $T$  of  $X$  satisfying

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in X, \quad (B_\lambda)$$

with some  $\lambda \in [0, 1)$ . In 1989, Bakhtin established an analogous to the Banach contraction principle in the context of complete  $b$ -metric spaces. Precisely, he proved that if  $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ . Then  $T$  has a unique fixed point. The aim of this note is to give a simple proof of the Banach contraction principle in  $X$  for all  $\lambda \in [0, 1)$ . So, in particular, we provide some complements to Bakhtin's result. We establish a fundamental contraction inequality for  $T$  and use it to prove convergence of Picard sequences. For such sequences, we give an evaluation of the order of convergence and a posteriori error estimate. We estimate the diameter of the  $T$ -orbits. As applications, we deduce two stopping rules indicating the sufficient number of iterations of the Picard process which allows a satisfactory approximation for the fixed point of  $T$ .

**Key words and phrases:** Banach fixed point principle;  $b$ -metric space; stopping rules.

## Resumen

Sea  $(X, d; s)$  un espacio  $b$ -métrico completo con el parámetro  $s \geq 1$ . Sea  $T$  un mapa contractivo en  $X$ , que es un automapa  $T$  de  $X$  satisfactorio

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in X, \quad (B_\lambda)$$

con algo de  $\lambda \in [0, 1)$ . En 1989, Bakhtin estableció un principio análogo al principio de contracción de Banach en el contexto de espacios  $b$ -métricos completos. Precisamente, demostró que si  $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ , entonces  $T$  tiene un punto fijo único. El objetivo de esta nota es dar una prueba simple del principio de contracción de Banach en  $X$  para todos los  $\lambda \in [0, 1)$ . Entonces, en particular, brindamos algunos complementos al resultado de Bakhtin. Establecemos una desigualdad de contracción fundamental para  $T$  y la usamos para probar la convergencia de las secuencias de Picard. Para tales secuencias, damos una evaluación del orden de convergencia y una estimación del error a posteriori. Estimamos el diámetro de las órbitas  $T$ .

Received 31/01/2021. Revised 23/02/2021. Accepted 25/05/2021.

MSC (2010): Primary 47H10; Secondary 54H25.

Corresponding author: Mohamed Akkouchi

Como aplicaciones, deducimos dos reglas de parada que indican el número suficiente de iteraciones del proceso Picard que permite una aproximación satisfactoria para el punto fijo de  $T$ .

**Palabras y frases clave:** Principio de punto fijo de Banach;  $b$ -espacio métrico; detener las reglas.

## 1 Introduction

An important generalization of metric spaces is given by the concept of  $b$ -metric spaces. We recall (see [2, 6, 7]) the following definition.

**Definition 1.1.** *Let  $X$  be a non-empty set and let  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  be a function. Then  $d$  is said to be a  $b$ -metric on the set  $X$ , if the following conditions are satisfied:*

(i)  $d(x, y) \geq 0$  and  $d(x, y) = 0$  if and only if  $x = y$ .

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(iii) there exists a real number  $s \geq 1$  such that:

$$d(x, y) \leq s [d(x, u) + d(u, y)] \quad \text{for all } x, y, u \in X.$$

The triplet  $(X, d; s)$  is said to be a  $b$ -metric space with parameter  $s$ . The inequality (iii) is also called the  $s$ -triangle inequality.

Throughout this paper,  $(X, d; s)$  will designate a  $b$ -metric space with parameter  $s \geq 1$ . As in the metric case, we have a topological setting. For the sequel, we denote the set of nonnegative integers by  $\mathbb{N}_0$ . As usual,  $\mathbb{N}$  designates the set of positive integers. A sequence  $\{x_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) of elements of a set  $X$  will be also denoted by  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  and its range set will be denoted by  $\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ .

**Definition 1.2.** *Let  $(X, d; s)$  be a  $b$ -metric space,  $\{x_n\}$  be a sequence in  $X$  and  $x \in X$ . Then, the following are defined as follows:*

(i) *The sequence  $\{x_n\}$  is said to be a Cauchy sequence, if for any  $\epsilon > 0$  there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that, for all  $n \geq N$  and all  $p \in \mathbb{N}$ , we have  $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$ .*

(ii) *The sequence  $\{x_n\}$  is said to be convergent to  $x$ , if for any  $\epsilon > 0$  there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that, for all  $n \geq N$ , we have  $d(x_n, x) < \epsilon$ . In this case, we write:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{or} \quad x_n \rightarrow x \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty.$$

(iii)  *$(X, d; s)$  is said to be complete  $b$ -metric space if every Cauchy sequence in  $X$  converges to some  $x \in X$ .*

We observe that every converging sequence in a  $b$ -metric space is Cauchy sequence but, in general, the converse is not true. It is easy to see that the limit of a converging sequence (in a  $b$ -metric space) is unique.

**Definition 1.3.** Let  $(X, d; s)$  be a  $b$ -metric space and  $\{x_n\}$  be a sequence in  $X$ . Let  $A$  be a non empty subset of  $X$  and  $\delta(A) := \sup\{d(x, y) : (x, y) \in A \times A\}$ . Then  $A$  is said to be bounded if  $\delta(A)$  is finite.

We observe that every Cauchy sequence in a  $b$ -metric space is bounded but, in general, the converse is not true.

**Definition 1.4.** Let  $X$  be a non empty set and let  $T$  be a selfmapping of  $X$ . Then, for every  $x \in X$ , the set  $O_T(x) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$  is called the orbit of  $T$  at  $x$ .

Now, we define the concepts of  $T$ -orbitally completeness.

**Definition 1.5.** Let  $(X, d; s)$  be a  $b$ -metric space and  $T$  be a selfmapping on  $X$ . Then  $X$  is said to be  $T$ -orbitally complete if, for any  $x \in X$ , every Cauchy sequence of the orbit  $O_T(x) := \{x, Tx, T^2x, \dots\}$  is convergent in  $X$ .

In the case of metric spaces, the concept of orbitally completeness was first introduced in 1974 by Ćirić in [4].

Fixed point theory in  $b$ -metric spaces started with the extension of the Banach contraction principle. Let  $T$  be a selfmapping of  $X$ , we say that  $T$  is contraction on  $X$ , if  $T$  satisfies the following inequality:

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in X, \quad (B_\lambda)$$

with some  $\lambda \in [0, 1)$ .

In 1989, Bakhtin established in [2] the following result, which may be considered as the analogous of Banach contraction principle for  $b$ -metric spaces.

**Theorem 1.1** ([2]). Let  $(X, d; s)$  be a complete  $b$ -metric space with parameter  $s$  and  $f : X \rightarrow X$  a mapping such that, for some  $\lambda > 0$ ,

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \text{for all } x, y \in X. \quad (1.1)$$

If  $0 < \lambda < 1/s$ , then  $f$  has a unique fixed point  $z$  and, for every  $x \in X$ , the sequence  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converges to  $z$  as  $n \rightarrow \infty$ . Furthermore, the following evaluation of the order of convergence holds

$$d(x_n, z) \leq \frac{sd(x_0, x_1)}{1 - \lambda s} \cdot \lambda^n, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

The articles [6] and [7] published in 1993 and 1998 by S. Czerwik, respectively, and the article [3] published by V. Berinde in 1993 have initiated investigation of fixed points in  $b$ -metric spaces. During the last two decades, a very intensive research work was conducted in  $b$ -metric spaces and in their generalizations. The survey [5] of S. Cobzaş contains a large view on the evolution and recent developments of the theory of  $b$ -metric spaces and fixed point theory therein. The survey [8] of E. Karapinar contains a short survey on some recent fixed point results obtained in the context of  $b$ -metric spaces. The reader is invited to consult the articles listed in the references of this work and the references therein.

In 2007, R. S. Palais (see [9]) provided a simple proof of the Banach contraction principle in complete metric spaces and established a stopping rule. The aim of this paper is to give a simple proof of the Banach contraction principle in  $X$  for all  $\lambda \in [0, 1)$ . The result obtained here is a variant of the Banach contraction in a complete  $b$ -metric space (See Theorem 2.1). This note is motivated by the article [9] of R. S. Palais concerning contractions in complete metric spaces.



This note extends the results of [9] to the case of  $b$ -metric spaces and may be considered as a continuation to [9].

To prove convergence of Picard sequences, we start by proving a fundamental contraction inequality for any given contraction  $T$  on any complete  $b$ -metric space  $(X, d, s)$ . Thus we show that for all values of  $\lambda \in [0, 1)$ , and for every point  $x \in X$ , the Picard sequence  $(T^n(x))_n$  converges to a unique fixed point  $z$  of  $T$ . So, by this we provide complements to Bakhtin's result (see Theorem (1.1)) by investigating the remaining case, where the parameter  $\lambda \in [\frac{1}{s}, 1)$  ( $s > 1$ ).

For each Picard sequence, we give an evaluation of the order of its convergence and an a posteriori error estimate. Also, we estimate the diameter of the  $T$ -orbits. As applications, we deduce two stopping rules precizing the sufficient number of iterations of the Picard process which allows a satisfactory approximation for the fixed point of  $T$ .

This paper is organized as follows: In section two, we establish a variant of the Banach contraction principle, where we have stated all our remarks and observations (see Theorem 2.1). Section three contains two stopping rules for contractive selfmappings in complete  $b$ -metric spaces. In particular, our results extend those obtained by R. S. Palais ([9]) for the Banach contractions in complete metric spaces.

## 2 A version of the Banach contraction principle

Let  $(X, d; s)$  be a  $b$ -metric space with parameter  $s \geq 1$ . We need to introduce the following notation. Let

$$\mathbb{B}_2 := \{(\lambda, s, p) \in [0, 1) \times [1, +\infty) \times (0, +\infty) : s^2 \lambda^p < 1\}.$$

We observe that if  $(\lambda, s, p) \in \mathbb{B}_2$ , then  $s \lambda^p < 1$ . For all  $(\lambda, s, p) \in \mathbb{B}_2$ , we set

$$C(\lambda, s, p) := \frac{s(1+s)}{2(1-s^2 \lambda^p)}.$$

Before stating our version of the Banach contraction principle in the setting of  $b$ -metric spaces, we need the following lemma.

**Lemma 2.1.** *Let  $(X, d; s)$  be a complete  $b$ -metric space with parameter  $s \geq 1$  and  $T : X \rightarrow X$  a mapping such that, for some  $\lambda \in [0, 1)$ ,*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \text{for all } x, y \in X. \quad (2.1)$$

*Let  $p_2$  be the smallest positive integer satisfying:  $s^2 \lambda^{p_2} < 1$ . Then for all  $x, y \in X$ , we have the following inequality:*

$$d(x, y) \leq C(\lambda, s, p_2) [d(x, T^{p_2}(x)) + d(y, T^{p_2}(y))]. \quad (2.2)$$

*Proof.* By using the  $s$ -triangle inequality, we have

$$d(x, y) \leq s d(x, T^{p_2}(x)) + s^2 d(T^{p_2}(x), T^{p_2}(y)) + s^2 d(T^{p_2}(y), y).$$

Therefore, we get

$$d(x, y) \leq s d(x, T^{p_2}(x)) + s^2 d(T^{p_2}(y), y) + s^2 \lambda^{p_2} d(x, y).$$

By a similar manner, we get

$$d(y, x) \leq sd(y, T^{p_2}(y)) + s^2 d(T^{p_2}(x), x) + s^2 \lambda^{p_2} d(y, x).$$

By adding left members and right members of the inequalities above, we obtain

$$2d(x, y) \leq s(1 + s)[d(x, T^{p_2}(x)) + d(y, T^{p_2}(y))] + 2s^2 \lambda^{p_2} d(x, y),$$

from which, we deduce that

$$d(x, y) \leq \frac{s(1 + s)}{2(1 - s^2 \lambda^{p_2})} [d(x, T^{p_2}(x)) + d(y, T^{p_2}(y))],$$

which is the desired inequality.  $\square$

The following result provides some complements to Theorem 1.1.

**Theorem 2.1.** *Let  $(X, d; s)$  be a  $b$ -metric space with parameter  $s \geq 1$  and  $T : X \rightarrow X$  a mapping such that*

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \text{for all } x, y \in X, \quad (2.3)$$

for some  $\lambda \in [0, 1)$ . Suppose that  $X$  is  $T$ -orbitally complete. Then

(P1)  $T$  has a unique fixed point  $z$  in  $X$ .

(P2) For every  $x \in X$ , the Picard sequence  $(x_n)_{n \geq 0}$  defined by

$$x_0 := x \quad \text{and} \quad x_n := T^n(x), \quad \text{for all integer } n \geq 1,$$

converges to  $z$  as  $n \rightarrow \infty$ .

(P3) If  $0 \leq \lambda < \frac{1}{s}$  then the following evaluation of the order of convergence holds

$$d(T^n(x), z) \leq \frac{s d(x, Tx)}{1 - \lambda s} \cdot \lambda^n, \quad \text{for all } n \geq 0. \quad (2.4)$$

(P4) If  $s > 1$  and  $\frac{1}{s} \leq \lambda < 1$ , let  $p_2$  is the smallest positive integer satisfying:  $s^2 \lambda^{p_2} < 1$ . Then:

(i) The following evaluation of the order of convergence holds

$$d(T^n(x), z) \leq s C(\lambda, s, p_2) d(x, T^{p_2}(x)) \lambda^n, \quad \text{for all } n \geq 0, \quad (2.5)$$

where the constant  $C(\lambda, s, p_2)$  is given by

$$C(\lambda, s, p_2) := \frac{s(1 + s)}{2(1 - s^2 \lambda^{p_2})}.$$

(ii) The following a posteriori error estimate holds:

$$d(x_n, z) \leq \frac{s\lambda}{1 - s\lambda^{p_2}} \cdot d(x_{n-1}, T^{p_2-1}x_n), \quad \text{for all } n \geq 1. \quad (2.6)$$

(iii) The orbit  $O_T(x)$  is bounded and we have the following estimate for its diameter:

$$\delta(O_T(x)) \leq 2C(\lambda, s, p_2) d(x, T^{p_2}(x)). \quad (2.7)$$

(P5) The rate of convergence of Picard iteration is given by

$$d(x_n, z) \leq \lambda d(x_{n-1}, z), \quad \text{for all integer } n \geq 1. \quad (2.8)$$

*Proof.* (1) The case where  $0 \leq \lambda < \frac{1}{s}$  was studied in Theorem 1.1 of Bakhtin. In this case, the properties (P1), (P2) and (P3) are given by Bakhtin's theorem. So, we are led to consider only the case where  $s > 1$  and  $\frac{1}{s} \leq \lambda < 1$ .

(2) For every  $x_0 \in X$ , we consider the sequence  $x_n := T^n(x_0)$  (for all  $n \in \mathbb{N}$ ). Let  $n$  and  $m$  be arbitrary nonnegative integers. By setting  $x := x_n$  and  $y := x_{n+m}$  in the inequality (2.2), we get

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq C(\lambda, s, p_2) [d(x_n, T^{p_2}(x_n)) + d(x_{n+m}, T^{p_2}(x_{n+m}))] \\ &= C(\lambda, s, p_2) [d(T^n x, T^n(T^{p_2}x)) + d(T^{n+m}x, T^{n+m}(T^{p_2}x))] \\ &\leq C(\lambda, s, p_2) [\lambda^n d(x, T^{p_2}x) + \lambda^{n+m} d(x, T^{p_2}x)] \\ &= \lambda^n (1 + \lambda^m) C(\lambda, s, p_2) d(x, T^{p_2}x), \end{aligned}$$

from which, we infer that

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq 2\lambda^n C(\lambda, s, p_2) d(x, T^{p_2}x), \quad (2.9)$$

for all integers  $n$  and  $m$ . From inequality (2.9), we deduce that the sequence  $(x_n)_n$  is a Cauchy sequence in  $X$ . Since the  $b$ -metric space  $X$  is supposed to be  $T$ -orbitally complete, this sequence converges to a point (say)  $z \in X$ .

For every nonnegative integer  $n$ , we have

$$d(T(x_n), T(z)) \leq \lambda d(x_n, z).$$

The above inequality, implies that the subsequence  $(x_{n+1})_n$  converges to  $Tz$ . By uniqueness of the limit, we infer that  $z = Tz$ . Thus,  $z$  is a fixed point of  $T$ .

It is clear, by the condition (2.1), that  $T$  has a unique fixed point. We observe the following facts concerning the integer  $p_2$ :

- (a)  $s\lambda^{p_2} \leq s^2\lambda^{p_2} < 1$ .
- (b) Since  $s \geq 1$  and  $1 \leq s\lambda$ , then we have  $p_2 \geq 2$ .

(3) Let  $x \in X$ . Next we show the estimate (2.5). Indeed, for all positive integer  $n$ , we have

$$\begin{aligned} d(T^n x, z) &\leq s [d(T^n x, T^{n+p_2}x) + d(T^{n+p_2}x, T^{p_2}z)] \\ &\leq s\lambda^n d(x, T^{p_2}x) + s\lambda^{p_2} d(T^n x, z), \end{aligned}$$

from which we get the inequality (2.5).

- (4) Next, we prove the estimate (2.6). Let  $x \in X$  and let  $(x_n)_{n \geq 0}$  be the Picard sequence associated to  $x$ . Then for every positive integer  $n$ , we have

$$\begin{aligned} d(x_n, z) &= d(Tx_{n-1}, Tz) \leq \lambda d(x_{n-1}, z) \\ &\leq s\lambda [d(x_{n-1}, T^{p_2-1}x_n) + d(T^{p_2-1}x_n, T^{p_2-1}z)] \\ &\leq s\lambda d(x_{n-1}, T^{p_2-1}x_n) + s\lambda^{p_2} d(x_n, z), \end{aligned}$$

from which we get the inequality (2.6).

- (5) Next, we prove the estimate (2.7). Let  $x \in X$  and let  $(x_n)_{n \geq 0}$  be the Picard sequence associated to  $x$ . Then, by virtue of the inequality (2.9), we deduce that

$$\delta(O_T(x)) = \sup\{d(x_n, x_{n+m}) : n, m \in \mathbb{N}_0\} \leq 2C(\lambda, s, p_2) d(x, T^{p_2}(x)).$$

which is the desired inequality.

- (6) The property (P5) is clear. □

We point out that a different proof of the parts (P1) and (P2) of Theorem 2.1 was given in [1] by T. V. An and N. V. Dung. The proof of [1] used a metrization method.

### 3 Application: Stopping Rules

We point out that a stopping rule was established by R.S. Palais in [9] for contractions in complete metric spaces. We give here two stopping rules in the setting of complete  $b$ -metric spaces depending on two cases:

- (i) where the parameter  $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ .
- (ii) where  $\lambda \in [\frac{1}{s}, 1)$  and  $s > 1$ .

Let  $(X, d; s)$  be a complete  $b$ -metric space with parameter  $s \geq 1$  and  $T : X \rightarrow X$  a mapping such that

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \text{for all } x, y \in X, \quad (3.1)$$

for some  $\lambda \in [0, 1)$ . According to Theorem 2.1, we know that  $T$  has a unique fixed point  $z$  in  $X$  and that for all  $x \in X$  the Picard sequence  $(x_n)_n$ , with  $x_n := T^n x$ , converges to  $z$ .

#### 3.1 A first stopping rule.

Suppose that  $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ . By virtue of Theorem 2.1, we have the following inequality

$$d(T^n(x), z) \leq K(s, \lambda) d(x, Tx) \lambda^n, \quad \text{for all } n \geq 0. \quad (3.2)$$

where  $K(s, \lambda) := \frac{s}{1-\lambda s}$ .

An application of the last inequality is as follows. Suppose that we accept an error of order  $\varepsilon$ , i.e., instead of the actual fixed point  $z$  of  $T$  we are satisfied with a point  $w$  of  $X$  satisfying  $d(z, w) < \varepsilon$ . Suppose also that we are starting our iteration at some point  $x$  in  $X$ . Then from

the inequality (3.2) it is easy to find an integer  $N$  so that  $w = T^N(x)$  will give the satisfactory answer. Indeed, since we desire that  $d(T^N(x), p) < \varepsilon$ , it is sufficient to require that

$$K(s, \lambda) d(x, Tx) \lambda^N < \varepsilon.$$

This is possible because  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K(s, \lambda) d(x, Tx) \lambda^n = 0$ . Now the first displacement  $\tau(x) = d(x, T(x))$  is a quantity that we can compute after the first iteration and we can then compute how large  $N$  has to be by taking the log of the above inequality and solving for  $N$  (remembering that  $\ln(\lambda)$  is negative).

Under the assumptions above we have the first stopping rule.

**Theorem 3.1** (First Stopping Rule). *If  $\tau(x) = d(x, Tx)$  and*

$$N > \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(s) + \ln(1 - s\lambda) - \ln(\tau(x))}{\ln(\lambda)}, \quad (3.3)$$

then  $d(T^N(x), z) < \varepsilon$ .

Another interpretation of (3.3) is the following: Suppose we take  $\varepsilon = 10^{-m}$  in our first stopping rule inequality. We see that the growth of  $N$  with  $m$  is a constant plus  $\frac{m}{|\ln(\lambda)|}$ , or in other terms, to get one more decimal digit of precision we have to do (roughly)  $\frac{1}{|\ln(\lambda)|}$  more iteration steps. In other words, if we need  $N$  iterative steps to get  $m$  decimal digits of precision, then we need another  $N$  in order to arrive to  $2m$  decimal digits of precision.

### 3.2 A second stopping rule.

Suppose that  $s > 1$  and  $\lambda \in [\frac{1}{s}, 1)$ . Let  $x \in X$  and let  $(x_n := T^n x)_n$  be the corresponding Picard sequence. Let  $p_2$  be the smallest positive integer satisfying:  $s^2 \lambda^{p_2} < 1$ . By virtue of Theorem 2.1, we have the following inequality:

$$d(T^n(x), z) \leq s C(\lambda, s, p_2) d(x, T^{p_2}(x)) \lambda^n, \quad \text{for all } n \geq 0, \quad (3.4)$$

where the constant  $C(\lambda, s, p_2)$  is given by

$$C(\lambda, s, p_2) := \frac{s(1+s)}{2(1-s^2 \lambda^{p_2})}.$$

Under the assumptions above, by using the inequality (3.4) and similar arguments to those exposed in the first subsection, we are led to state our second stopping rule.

**Theorem 3.2** (Second Stopping Rule). *If  $\sigma(x) = d(x, T^{p_2}x)$  and*

$$N > \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(s) - \ln(C(\lambda, s, p_2)) - \ln(\sigma(x))}{\ln(\lambda)}, \quad (3.5)$$

then  $d(T^N(x), z) < \varepsilon$ .

## References

- [1] T. V. An and N. V. Dung. *Remarks on Frink's metrization technique and applications*, arXiv preprint, arXiv:1507.01724 (2015), 15 p.
- [2] I. A. Bakhtin. *The contraction mapping principle in quasimetric spaces*, Funktsionalnyi Analiz, Ulianovskii Gos. Ped. Inst. **30** (1989), 26–37 (Russian).
- [3] V. Berinde. *Generalized contractions in quasimetric spaces*, Seminar on Fixed Point Theory, 1993, 3-9.
- [4] Lj. B. Ćirić. *On some maps with non-unique fixed points*. Publ. Inst. Math. (Beograd), **13**(31) (1974), 52–58.
- [5] S. Cobzaş. *B-metric spaces, fixed points and Lipschitz functions*, arXiv:1802.02722v2 [math.FA], (2018), 35 pp.
- [6] S. Czerwik. *Contraction mapping in b-metric spaces*. Acta Math. Inform. Univ. Ostrav., **1**(1) (1993), 5–11.
- [7] S. Czerwik. *Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces*. Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena, **46** (1998), 263–276.
- [8] E. Karapinar. *A Short survey on the recent fixed point results on b-metric spaces*, Constructive Mathematical Analysis. **1**(1), (2018), 15–44.
- [9] R. S. Palais. *A simple proof of the Banach contraction principle*, J. Fixed Point Theory Appl., **2**, (2007), 221–223.

# The graph of a base power $b$ , associated to a positive integer number

*El grafo potencia de base  $b$ , asociado a un entero positivo*

Daniel Brito (danieljosb@gmail.com)  
Oscar Castro (oscarecastrop@gmail.com)  
Lope Marín (lmata73@gmail.com)

Department of Mathematics, University of Oriente,  
Cumaná, Bolivarian Republic of Venezuela.

## Abstract

Many concepts of Number Theory were used in Graph Theory and several types of graphs have been introduced. We introduced the graph of a base power  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ , associated to a positive integer number  $n \in \mathbb{Z}^+$ , denoted for  $GP_b(n)$ , with set of vertices  $V = \{x\}_{x=1}^n$  and with set of edges:

$$E = \{\{x, y\} \in 2^V : \exists r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \text{ such that } |y - x| = b^r\},$$

and we study some of its properties, in special for case  $b = 2$ .

**Key words and phrases:** Hamiltonian Cycle; Hamilton-connectivity; Pancyclicity.

## Resumen

Muchos conceptos de la Teoría de Números han sido utilizados en la Teoría de Grafos y distintos tipos de grafos se han introducido. Introducimos el grafo de una potencia de base  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ , asociada a un entero  $n \in \mathbb{Z}^+$ , denotado por  $GP_b(n)$ , con conjunto de vértices  $V = \{x\}_{x=1}^n$  y conjunto de lados

$$E = \{\{x, y\} \in 2^V : \exists r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \text{ tal que } |y - x| = b^r\},$$

y estudiamos algunas de sus propiedades, en especial para el caso  $b = 2$ .

**Palabras y frases clave:** Ciclo Hamiltoniano; Hamilton-conectividad; Panciclicidad.

## 1 Introduction

A *graph*  $G$  consist of a nonempty set  $V(G)$  of elements represented for points, called *vertices* and a set  $E(G)$  of elements represented for lines segments with ends an unique pair of vertices, this lines are called *edges* or *sides* and it is said that the pair of vertices are *adjacent*. A graph

---

Recibido 21/01/2021. Revisado 23/02/2021. Aceptado 30/05/2021.

MSC (2020): Primary 97N70, 05C45.; Secondary 05C38.

Autor de correspondencia: Oscar Castro

without *loops* (there is no an edge with equal ends vertices) and without *multiple edges* (there are no two or more edges with the same ends vertices) is called a *simple graph*. Two graph are *isomorphic* if both graphs have same properties and different graphics representation. Let  $x \in V(G)$ , the *degree* of  $x$ , denoted for  $d_G(x)$ , is the number of times that  $x$  is end of edges in  $G$ . Thus,  $\delta(G)$  and  $\Delta(G)$  denote, respectively, the *minimum degree* and *maximum degree* of  $G$ . A graph  $G$  is *complete* if every two distinct vertices in  $G$  are adjacent. A complete graph with  $n$  vertices is denoted by  $K^n$ . A *path* is a *subgraph*  $P$  of a graph  $G$  (graph with subsets of  $V(G)$  and  $E(G)$ , respectively) formed by an alternating succession of adjacent vertices, furthermore,  $P$  has an initial vertex and final vertex, called *extreme*. A graph  $G$  is called *connected* if there is a path between any two distinct vertices in  $G$ . If there is no repetition of vertices in the path, it is said to be an *elemental path*. Let  $P$  be the path between the vertices  $x$  and  $y$ , also denoted by  $xPy$  or  $yPx$  indistinctly, but if we denoted  $xP^+y$  when  $P$  is traversed from  $x$  to  $y$  then we denoted  $xP^-y$  when  $P$  is traversed from  $y$  to  $x$ . A *Hamiltonian path* of a graph is an elemental path containing all the vertices of the graph. A *cycle* in a graph is an elemental path whose extreme vertices are the same. A *Hamiltonian cycle*, in a graph, is a cycle that visits each vertex of the graph. A *Hamiltonian graph* is a graph that contain a Hamiltonian cycle. A *Hamilton-connected graph* is a graph that contains a Hamiltonian path between each pair of vertices. A *pancyclic graph* is a graph that contains cycles of all the lengths, among 3 and  $n$ . In this paper only we consider simple graphs and we refer the reader to [3] for the definitions not given here.

The motivation of this paper is related with the use of the concepts of Number Theory and Graph Theory, to obtain other types of graphs as in [1] and [6]. We define a *graph associated to a positive integer number  $n$* , denoted by  $G(n)$ , as a graph with set of vertices  $V = \{x_k\}_{k=1}^n$ , such that  $x_k$  is a succession in  $\mathbb{C}^n$  and set of side  $E = \{\{x_i, x_j\} \in 2^V / x_i \Phi x_j \vee i\Psi j\}$ , with  $\Phi, \Psi$  relations between  $x_i$  and  $x_j$  in  $V$  and between  $i, j$  in  $\mathbb{Z}^+$ , respectively, and  $2^V$  the power set of  $V$  [5]. In particular, we introduce the *graph of a base power  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$* , associated to a positive integer number  $n \in \mathbb{Z}^+$ , denoted for  $GP_b(n)$ , with set of vertices  $V = \{x\}_{x=1}^n$  and with set of edges:

$$E = \{\{x, y\} \in 2^V : \exists r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \text{ such that } |y - x| = b^r\},$$

and we characterized the degree for any vertex in  $GP_b(n)$ , the minimum degree and maximum grade of  $GP_b(n)$  in function of  $n$  and  $b$ , moreover, we study the Hamilton-connectivity and the pancyclicity of  $GP_2(n)$  and some other applications of the  $GP_b(n)$  graph for case  $n = 2$ .

## 2 The graph of a power of a given base, associated to a positive integer

Let  $d_{GP_b(n)}(x)$ ,  $\delta(GP_b(n))$  and  $\Delta(GP_b(n))$  be, respectively, the degree of  $x$  in  $GP_b(n)$ , the *minimum degree* and *maximum degree* of  $GP_b(n)$ .

**Lemma 1.** For all  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ , for all  $n \in \mathbb{Z}^+$  and for all  $x \in V(GP_b(n))$ , we have  $d_{GP_b(n)}(x) = 0$ , if  $n = 1$  and for  $n > 1$ :

$$d_{GP_b(n)}(x) = \begin{cases} \lfloor \log_b(x-1) \rfloor + \lfloor \log_b(n-x) \rfloor + 2, & \text{if } 1 < x < n \\ \lfloor \log_b(n-1) \rfloor + 1, & \text{if } x = 1, n \end{cases}.$$

*Proof.* Let  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  and  $n \in \mathbb{Z}^+$ . If  $n = 1$  then  $GP_b(1) = K^1$ , in consequence  $d_{GP_b(1)}(x) = 0$ , for  $x \in V(GP_b(1))$ . If  $n > 1$ , we have  $q_n = \lfloor \log_b(n) \rfloor$ , with  $q_n = \max\{i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} / b^i \leq n\}$



and, moreover, we consider two cases for  $x \in V(GP_b(n))$ ,  $x = 1, n$  or  $x = h, l$ , indistinctly (see Figure 1):

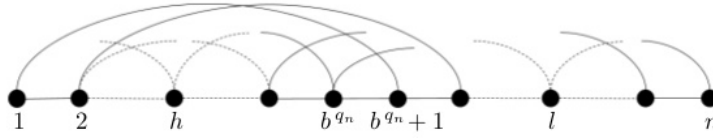


Figure 1:  $GP_b(n)$ , with  $q_n = \max\{i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} / b^i \leq n\}$ .

**Case 1.** If  $x = 1$ , then by definition of  $GP_b(n)$ ,  $x$  is adjacent

$$\underbrace{2, b + 1, b^2 + 1, \dots, b^r + 1}_{r+1}$$

or if  $x = n$ , then by definition of  $GP_b(n)$ ,  $x$  is adjacent to

$$\underbrace{n - 1, n - b, n - b^2, \dots, n - b^r}_{r+1}.$$

Thus, as  $b^r + 1 \leq n$ , we have  $d_{GP_b(n)}(x) = r + 1$ , if

$$r = \begin{cases} q_n, & \text{if } n > b^{q_n} \\ q_n - 1, & \text{if } n = b^{q_n} \end{cases}.$$

But for each  $b, n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ,

$$\lfloor \log_b(n - 1) \rfloor = \begin{cases} q_n, & \text{if } n > b^{q_n} \\ q_n - 1, & \text{if } n = b^{q_n} \end{cases}. \tag{1}$$

Therefore,  $d_{GP_b(n)}(x) = \lfloor \log_b(n - 1) \rfloor + 1$ , for  $x = 1, n$ .

**Case 2.** If  $x = h$  or  $x = l$ , indistinctly, then  $1 < x < n$  (see Figure 1) and by definition of  $GP_b(n)$ ,  $x$  is adjacent to

$$\underbrace{x - b^r, \dots, x - b^2, x - b, x - 1}_{r+1}$$

and to

$$\underbrace{1 + x, b + x, b^2 + x, \dots, b^s + x}_{s+1}.$$

Thus, as  $1 \leq x - b^r$  and  $b^s + x \leq n$ , we have  $d_{GP_b(n)}(x) = r + s + 2$ , if

$$r = \begin{cases} q_x, & \text{if } x > b^{q_x} \\ q_x - 1, & \text{if } x = b^{q_x} \end{cases}$$

and  $s = q_{n-x}$ . But by equation 1, it follows that  $q_x = \max\{i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} / b^i \leq x\}$ , furthermore,  $q_{n-x} = \max\{i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} / b^i \leq n - x\}$ . Therefore, we obtain that  $d_{GP_b(n)}(x) = \lfloor \log_b(x - 1) \rfloor + \lfloor \log_b(n - x) \rfloor + 2$ .  $\square$

**Theorem 1.** For all  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ , for all  $n \in \mathbb{Z}^+$  and for all  $x \in V(GP_b(n))$ , we have:

1.  $d_{GP_b(n)}(x) = d_{GP_b(n)}(n - x + 1)$ .
2.  $\delta(GP_b(n)) = d_{GP_b(n)}(1) = d_{GP_b(n)}(n)$ .
3.  $\Delta(GP_b(n)) \leq \lfloor 2\lceil \log_b(\frac{n-1}{2}) \rceil + 1 \rfloor$ , if  $n \geq 3$ .

*Proof.* (Numeral 1). Follows from Lemma 1.

(Numeral 2). Let  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ . If  $n = 1$  then  $GP_b(1) = K^1$ , in consequence  $d_{GP_b(1)}(x) = 0$ , for  $x \in V(GP_b(1))$ . Thus,  $\delta(GP_b(1)) = \Delta(GP_b(1)) = 0$ . Furthermore, if  $n = 2$  then  $GP_b(2) = K^2$ , therefore  $d_{GP_b(2)}(x) = 1$ , for all  $x \in V(K^2)$ , in consequence  $\delta(GP_b(2)) = \Delta(GP_b(2)) = 1$ . This is,  $\delta(GP_b(1)) = d_{GP_b(1)}(1) = 0$  and  $\delta(GP_b(2)) = d_{GP_b(2)}(1) = d_{GP_b(2)}(2) = 1$ , for all  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ .

If  $n \geq 3$ , by the proof of Numeral 1, is sufficient that  $1 < x \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  for prove that  $d_{GP_b(n)}(1) = d_{GP_b(n)}(n) \leq d_{GP_b(n)}(x)$ , for all  $x \in V(GP_b(n))$ . We consider two cases for  $x \in V(GP_b(n))$ ,  $x = 2$  or  $3 \leq x \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ :

**Case 1.** If  $x = 2$ , by Lemma 1 and the equation 1, we have  $d_{GP_b(n)}(2) = \lfloor \log_b(n-2) \rfloor + 2$  and  $q_n - 1 \leq \lfloor \log_b(n-2) \rfloor \leq \lfloor \log_b(n-1) \rfloor \leq q_n$ . Therefore  $\lfloor \log_b(n-2) \rfloor + 2 \geq \lfloor \log_b(n-1) \rfloor + 1 = d_{GP_b(n)}(1) = d_{GP_b(n)}(n)$ .

**Case 2.** If  $3 \leq x \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  and  $n$  is even, then  $3 \leq x \leq \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , so that  $3 \leq x \leq n - x$  and  $n - 1 \leq (n - x)(x - 1)$  ( $w, z \in \mathbb{Z}$  and  $2 \leq w \leq z \Rightarrow w + z \leq wz$ ), in consequence  $\log_b(n-1) \leq \log_b(n-x) + \log_b(x-1)$ .

If  $3 \leq x \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  and  $n$  is odd, then  $3 \leq x \leq \frac{n}{2} < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2}$ , in consequence we need to prove, only that  $x = \frac{n+1}{2}$  implies  $\log_b(n-1) \leq \log_b(n-x) + \log_b(x-1)$ . Indeed, if  $n = 2k + 1$ , with  $k \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  ( $3 \leq x \leq \frac{n+1}{2}$ ), then  $x = \frac{n+1}{2} = k + 1$  and as  $2k \leq k^2, \forall k \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ , similarity, we obtain that  $n - 1 \leq (n - x)(x - 1)$ . Therefore,  $\log_b(n-1) \leq \log_b(n-x) + \log_b(x-1)$ .

Likewise, as  $\lfloor w \rfloor + \lfloor z \rfloor \leq \lfloor w + z \rfloor \Leftrightarrow \lfloor w + z \rfloor + 1 \leq \lfloor w \rfloor + \lfloor z \rfloor + 2, \forall w, z \in \mathbb{R}$  then we have  $\lfloor \log_b(n-1) \rfloor + 1 \leq \lfloor \log_b(x-1) \rfloor + \lfloor \log_b(n-x) \rfloor + 2$ . This is,  $d_{GP_b(n)}(1) = d_{GP_b(n)}(n) \leq d_{GP_b(n)}(x)$ , if  $3 \leq x \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  (see Lemma 1).

(Numeral 3). If  $n = 3$  we consider that  $\Delta(K^3) = 2 = \lfloor 2\lceil \log_b(\frac{3-1}{2}) \rceil + 1 \rfloor$ , for all  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ . If  $n = 4$  then, by definition of  $GP_b(n)$ ,

$$\Delta(GP_b(4)) = \left\lfloor 2 \left[ \log_b \left( \frac{4-1}{2} \right) + 1 \right] \right\rfloor = \begin{cases} 3, & \text{if } b = 2 \\ 2, & \text{if } b > 2 \end{cases}.$$

If  $n \geq 5$ , we consider that the maximum of the function  $f(x) = \log_b(x-1) + \log_b(n-x) + 2$ , in the interval  $[2, n-1]$ , is  $2\log_b(\frac{n-1}{2}) + 2$  for  $x = \frac{n+1}{2}$ , ( $f(x)$  is continuous and differentiable function in  $]2, n-1[$  and  $[2, n-1]$ , respectively), whereby  $f(x)$  reach the maximum valor (Weierstrass's Extreme Valor Theorem and Critical Value of  $f$  [4]). Furthermore, we consider the proof of Numeral 1 and the Lemma 1. Thus, we have  $\Delta(GP_b(n)) \leq \lfloor 2\lceil \log_b(\frac{n-1}{2}) \rceil + 1 \rfloor$ .  $\square$

We consider other interesting properties. For all  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  and for all  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $GP_b(n) \subseteq GP_b(n+1)$  ( $GP_b(n)$  is subgraph of  $GP_b(n+1)$ ). Furthermore,  $GP_b(n)$  contain a Hamiltonian path, denoted by  $HP$ , such that for  $n > 1$ ,  $E(HP) = \{\{x, x+1\}\}_{x=1}^{n-1}$ . However, some graphs of base power  $b$ , associated to a positive integer number  $n$ , no contain a Hamiltonian cycle, for example  $GP_3(9)$  contain a Hamiltonian path  $HP$ : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 and no contain a Hamiltonian cycle (see Figure 2).

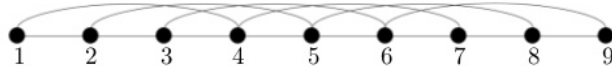


Figure 2:  $GP_3(9)$ .

Otherwise, if  $n = b^s + b^r$ , with  $n \geq 3$ ,  $b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ,  $s, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  and, without loss of generality,  $q_n = r$  (see equation 1) then  $HC : n, HP^-, b^r + 1, 1, HP^+, b^r, n$  is a Hamiltonian cycle in  $GP_b(n)$ . For example  $GP_3(12)$  contain a Hamiltonian cycle  $HC : 12, 11, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12$ , because  $n = 12 = 3 + 3^2$  (see Figure 3).

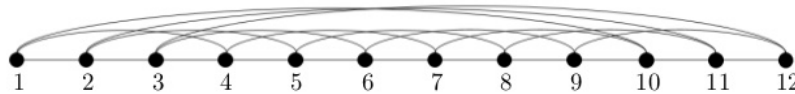


Figure 3:  $GP_3(12)$ .

In consequence, for any  $B = b$  in  $\mathbb{Z}^+$ , if  $A = r = s = 2$  or if  $A = b + 1$ , with  $r = b + 2$  and  $s = b + 1$ , then  $GP_B(AB^A)$  is Hamiltonian. This is, the  $GP_b(2b^2)$  and  $GP_b((b + 1)b^{b+1})$  are Hamiltonian. Thus, there exists an infinite subsuccession, in the  $ABA$  numbers sequence (have the form  $ab^a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$ ), associated to a Hamiltonian graph of a base power  $B$  to a positive integer number  $ABA$ . The  $ABA$  numbers, sequence A171607 in the OEIS (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) [7], is a generalization of the Cullen and Woodall numbers. The *Cullen numbers* are given by the expression  $a2^a + 1$ , (sequence A002064 in the OEIS, [8]) and *Woodall numbers* by  $a2^a - 1, \forall a \in \mathbb{Z}^+$  (sequence A003261, [9]).

Furthermore, for  $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  fixed, if  $b \rightarrow \infty$  then  $GP_b(n) \rightarrow HP^{n-1}$ , this is, if  $b > n$  implies that the graph  $GP_b(n)$  is the Hamiltonian path  $HP$  with length  $n - 1$  (Lemma 1 and the proof of Numeral 1 in the Theorem 1). For example, for  $n = 4$ , see Figure 4.

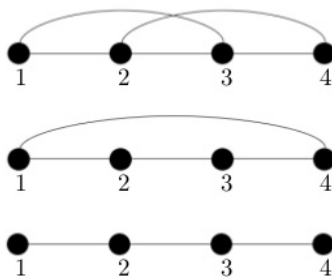


Figure 4:  $b \rightarrow \infty \Rightarrow GP_b(4) \rightarrow HP^3$ .

Also, thanks to the Lemma 1, we can obtain the degree sequence of any  $GP_b(n)$ . A non-decreasing sequence  $q_1, q_2, \dots, q_n$  of non-negative integers is the *degree sequence* or *graphic sequence*, if only if there is a graph  $G$  with  $n$  vertices  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , such that the  $d_G(x_i) = q_i$  for  $i = 1, 2, \dots, n$  [2].

### 3 The graph $GP_2(n)$

In this section, we studied the graphs of base power 2, associated to a positive integer number  $n$ , when are pancyclic, Hamiltonian and Hamilton-connected.

**Theorem 2.** *For all integer  $n \geq 3$ ,  $GP_2(n)$  is pancyclic.*

*Proof.* For  $n = 3$ ,  $GP_2(3) = K^3$ , which is pancyclic (see Figure 5, below).

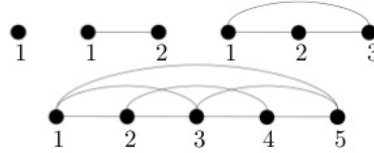


Figure 5:  $GP_2(n)$ , with  $n = 1, 2, 3, 5$ .

Let  $n \geq 4$ . By definition of  $GP_2(n)$ , there is a Hamiltonian path,  $HP$  in  $GP_2(n)$ , with initial vertex 1 and final vertex  $n$ , its vertices set contain a consecutive positives integer succession. Likewise,  $GP_2(n)$  have sides  $\{x_i, x_{i+1}\}$  for  $i = 1, 2, 3, \dots, p_k$  and  $\{y_j, y_{j+1}\}$  for  $j = 1, 2, 3, \dots, q_k$ , with  $x_i = 2i - 1$ ,  $y_j = 2j$ ,  $p_k = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - par(k)$ ,  $q_k = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$ , for  $k = 4, 5, 6, \dots, n$ , and  $par(h) = \frac{1+(-1)^h}{2}$  (parity of  $h \in \mathbb{Z}$ ). Therefore, we consider in  $GP_2(n)$  the  $n - 3$  cycles:

$$C^k : x_1, x_2, \dots, x_{p_k+1}, y_{q_k+1}, \dots, y_2, y_1, x_1,$$

furthermore, we observe that  $V(C^k) = \{x_i\}_{i=1}^{p_k+1} \cup \{y_j\}_{j=1}^{q_k+1}$ ,  $|V(C^k)| = k$  and as  $K^3 = GP_2(3) \subseteq GP_2(n)$ , for all integer  $n \geq 3$ ,  $GP_2(n)$  also contain the cycle  $C^3 : 1, 3, 2, 1$ , thus, we obtain  $GP_2(n)$  is pancyclic.  $\square$

We observe that for  $k = n$ , in the proof of Theorem 2,  $GP_2(n)$  contains a Hamiltonian cycle, therefore, for all  $n \geq 3$ ,  $GP_2(n)$  is a Hamiltonian graph. For example,  $GP_2(4)$  and  $GP_2(5)$  are isomorphic, respectively, to the graphs in Figure 6.

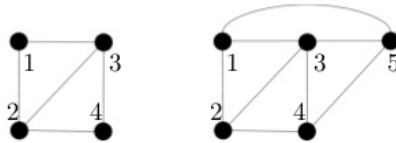


Figure 6: The isomorphic of  $GP_2(n)$ , with  $n = 4, 5$ .

We observe the cycles in  $GP_2(4)$ :

$$C^3: 1,3,2,1 \quad C^4: 1,3,4,2,1.$$

And observe the cycles in  $GP_2(5)$ :

**Theorem 3.** *For all  $n \in \mathbb{Z}^+ - \{4\}$ ,  $GP_2(n)$  is Hamilton-connected.*

$$C^3: 1,3,2,1 \quad C^4: 1,3,4,2,1 \quad C^5: 1,3,5,4,2,1.$$

*Proof.* For  $n = 1, 2, 3$ , follows from the definition of  $GP_2(n)$ , moreover,  $GP_2(1)$ ,  $GP_2(2)$  and  $GP_2(3)$  are isomorphic to the complete graph  $K^1$ ,  $K^2$  and  $K^3$ , respectively (see Figure 5, further behind). Thus, for  $n > 4$  we apply induction over  $n$ .

If  $n = 5$ , we consider the elemental paths in  $GP_2(5)$  (observing Figure 6):

$$\begin{array}{llll} HP^4: 1,2,3,4,5 & 2P^5: 2,1,3,4,5 & 3P^5: 3,1,2,4,5 & 4P^5: 4,3,2,1,5 \\ 1P^4: 1,2,3,5,4 & 2P^4: 2,1,3,5,4 & 3P^4: 3,2,1,5,4 & \\ 1P^3: 1,2,4,5,3 & 2P^3: 2,1,5,4,3 & & \\ 1P^2: 1,3,5,4,2 & & & \end{array}$$

Then,  $GP_2(5)$  is Hamilton-connected.

If  $n = 6$  (see Figure 7), we consider four cases, based in the construction of the Hamiltonian paths in  $GP_2(5)$ :

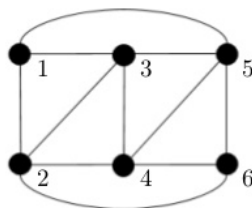


Figure 7:  $GP_2(6)$ .

**Case 1.** The elemental paths in  $GP_2(6)$ , expanding the Hamiltonian paths in  $GP_2(5)$  define previously:

$$\begin{array}{lll} 1P^5: 1,2,3,4,6,5 & 2P^5: 2,1,3,4,6,5 & 3P^5: 3,1,2,4,6,5 \\ 1P^4: 1,2,3,5,6,4 & 2P^4: 2,1,3,5,6,4 & 3P^4: 3,2,1,5,6,4 \\ 1P^3: 1,2,4,6,5,3 & 2P^3: 2,1,5,6,4,3 & \\ 1P^2: 1,3,5,6,4,2 & & \end{array}$$

**Case 2.** For the Hamiltonian paths  $HP^5$ ,  $2P^6$ ,  $3P^6$ ,  $4P^6$  and  $5P^6$  in  $GP_2(6)$ , we extend the Hamiltonian paths in  $GP_2(5)$  to:

$$HP^5: 1,2,3,4,5,6 \quad 2P^6: 2,1,3,4,5,6 \quad 3P^6: 3,1,2,4,5,6 \quad 4P^6: 4,3,2,1,5,6$$

**Case 3.** For the Hamiltonian path  $4P^5$  in  $GP_2(6)$ , we extend the Hamiltonian path  $4P^2$  in  $GP_2(4)$  (see Figure 6), therefore  $4P^5 : 4, 3, 1, 2, 6, 5$ .

**Case 4.** For the Hamiltonian path  $5P^6$  in  $GP_2(6)$ , we extend the Hamiltonian path  $2P^5$  in  $GP_2(5)$  (see Figure 6), therefore  $5P^6 : 5, 4, 3, 1, 2, 6$ .

Thus,  $GP_2(6)$  is Hamilton-connected.

Successively, by construction, from the Hamiltonian paths in  $GP_2(5)$ , suppose that theorem is true for  $6 \leq n = h$  (inductive hypothesis:  $GP_2(h)$  is Hamilton-connected), we will demonstrate that  $GP_2(h + 1)$  is Hamilton-connected:

If we consider  $n = h + 1$ , all elemental paths in  $GP_2(h + 1)$ , with length  $h$ , contain  $h$  vertices of any elemental paths in  $GP_2(h)$  and contain  $h - 1$  vertices of any elemental paths in  $GP_2(h - 1)$  ( $GP_2(h - 1) \subseteq GP_2(h) \subseteq GP_2(h + 1)$ ). Therefore, for  $x, y \in V(GP_2(h + 1))$  different, without loss of generality, suppose  $x < y$ , we chosen the  $vw$ -elemental path in  $GP_2(h)$  (or in  $GP_2(h - 1)$ ), and we consider four cases, for found the  $xy$ -elemental path, with length  $h$ , in  $GP_2(h + 1)$ :

**Case 1.** If, simultaneously,  $v \neq h - 1$ ,  $w \neq h$  and  $x, y \neq h + 1$ , then by construction, from the Hamiltonian paths in  $GP_2(5)$  until  $GP_2(h)$ , in  $GP_2(h)$ , we obtain the elemental paths with length  $h - 1$  :

$$vPw : v, \dots, h - 1, h, \dots, w$$

or

$$vPw : v, \dots, h, h - 1, \dots, w$$

which are expanded, respectively, to the elemental paths in  $GP_2(h + 1)$ , with length  $h$ :

$$xPy : v, \dots, h - 1, \mathbf{h + 1}, h, \dots, w$$

or

$$xPy : v, \dots, h, \mathbf{h + 1}, h - 1, \dots, w.$$

**Case 2.** Let  $v = x$ , if  $w = h$  then  $y = h + 1$ , so that, in  $GP_2(h)$ , we obtain the elemental path, with length  $h - 1$  (inductive hypothesis):

$$vPw : v, \dots, w.$$

which is extended to, the path in  $GP_2(h + 1)$ , with length  $h$ :

$$xPy : v, \dots, w, \mathbf{h + 1}.$$

**Case 3.** If  $x = h - 1$  then  $y = h$ . Thus, we chosen the  $vw$ -Hamiltonian path in  $GP_2(h - 1)$  (for  $5 \leq h - 1 < h$ , we consider the inductive hypothesis), with  $v = h - 1$  and  $w = h + 1 - 2^r$  for  $r > 1$ , and we obtain the elemental path, with length  $h$ :

$$xPy : v, \dots, w, \mathbf{h + 1}, \mathbf{h}.$$

**Case 4.** If  $x = h$  and  $y = h + 1$ , we chosen the  $vw$ - Hamiltonian path in  $GP_2(h)$ , with  $v = h$  and  $w = h + 1 - 2^r$  for  $r > 1$  (inductive hypothesis), we obtain the elemental path, with length  $h$ :

$$xPy : v, \dots, w, \mathbf{h + 1}.$$

Finally, if  $n = 4$ , we observe in the Figure 6 above, that in  $GP_2(4)$  does not exists a Hamiltonian path  $2P3$ , in consequence  $GP_2(n)$  is Hamilton-connected for all  $n \in \mathbb{Z}^+ - \{4\}$ .  $\square$

We observe that the graph  $GP_2(n)$  has interesting properties obtained by construction, without the need for many conditions.

Given Theorem 2 and Theorem 3, for any integer  $n \geq 16$ ,  $GP_2(n)$  are examples of an infinity of Hamiltonian graphs, such that  $\frac{k}{k+1}n \geq \frac{n}{2} > \Delta(GP_2(n))$ , with  $k \in \mathbb{Z}^+$  or  $n > 2\Delta(GP_2(n)) \geq d_{GP_2(n)}(x) + d_{GP_2(n)}(y)$  for any  $x, y \in V(GP_2(n))$ . In all cases, we consider Lemma 1, Theorem 1 and  $\sqrt[4]{2}(n-1) > n$ , for all integer  $n \geq 7$  and  $2^{\frac{n}{2}} > (n-1)^2$ , for all integer  $n \geq 16$ . In consequence, the hypothesis of Seymour's Conjecture, of Dirac's Theorem and of Ore's Theorem (see [3]) are

no necessary for the graph  $GP_2(n)$  with  $n \geq 16$ . Furthermore, by Lemma 1, Theorem 2 and the inequalities shows above, we obtain that the sequence degree of  $GP_2(n)$ , for all integer  $n \geq 16$ , no satisfies the hypothesis of Chvátal's Theorem [2]. In consequence,  $\{GP_2(n)\}_{n=16}^{\infty}$  is a succession of Hamiltonian graphs whose degree sequence is majorized by a graphic sequence which is not forcibly Hamiltonian. A sequence  $q_1, q_2, \dots, q_k$  majorizes a sequence  $d_1, d_2, \dots, d_k$  if and only if  $q_i \geq d_i$ , for all  $i \leq k$ , with  $k \in \mathbb{Z}^+$  and a graphic sequence is *forcibly Hamiltonian*, if and only if every graph with this degree sequence is Hamiltonian [2].

Finally, thanks to  $GP_2(n)$ , we show that any sequence of consecutive positive integers,  $\{n\}_{n=1}^m$ , is associated, simultaneously, to a nontrivial pancyclic (Hamiltonian) and Hamilton-connected graph.

## References

- [1] Abawajy, J., Kelarev, A. and Chowdhury, M., *Power Graphs: A Survey*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications, **1**(2)(2013), 125-147.
- [2] Chvátal, V., *On Hamilton's Ideal*, Journal of Combinatorial Theory, **12**(B)(1972), 163–168.
- [3] Diestel, R., *Graph Theory* (2th ed.), Springer, New York, 2000.
- [4] Leithold, L., *El Cálculo* (7th ed.), Oxford University Press, México, 1998.
- [5] Lipschutz, S., *Teoría de Conjuntos y Temas Afines*, McGraw-Hill/Interamericana de México S. A. de C.V., México, 1994.
- [6] Mukherjee, H., *Hamiltonicity of the Power Graph of Abelian Groups*, in :[https://arxiv.org/pdf/1505.00584\(2017\)](https://arxiv.org/pdf/1505.00584(2017)), consulted 05/07/2017, 01:25 a.m.
- [7] Munafo, R., *Expressible as  $A^*B^A$  in a nontrivial way*, in: [https://oeis.org/A171607\(2009\)](https://oeis.org/A171607(2009)) consulted 20/11/2019, 02:14 a.m.
- [8] Sloane, N., *Cullen numbers:  $n * 2^n + 1$* , in :[https://oeis.org/A002064\(2012\)](https://oeis.org/A002064(2012)), consulted 20/11/2019, 00:14 a.m.
- [9] Sloane, N., *Woodall (or Riesel) numbers:  $n * 2^n - 1$* , in: [https://oeis.org/A003261\(2012\)](https://oeis.org/A003261(2012)), consulted 20/11/2019, 01:05 a.m.

# Influence of physical exercise on the strengthening of immunity. Mathematical model.

*Influencia del ejercicio físico en el fortalecimiento de la inmunidad. Modelo matemático.*

Annia Ruiz Sánchez ([anniaruiz@nauta.cu](mailto:anniaruiz@nauta.cu))

Daniela Sara Rodríguez Salmon ([daniela.rodriquezs@uo.edu.cu](mailto:daniela.rodriquezs@uo.edu.cu))

Sandy Sánchez Domínguez ([sandys@uo.edu.cu](mailto:sandys@uo.edu.cu))

Mathematics Department, Faculty of Natural and Exact Sciences, University of Oriente  
Cuba

Yuri Alcántara Olivero ([yalcantara@uo.edu.cu](mailto:yalcantara@uo.edu.cu))

Department of Computer Science, Faculty of Natural and Exact Sciences, University of Oriente  
Cuba

Adolfo Arsenio Fernández García ([adolfof@uo.edu.cu](mailto:adolfof@uo.edu.cu))

Physics department, Faculty of Natural and Exact Sciences, University of Oriente  
Cuba

Isabel Martén Powell ([isamp@infomed.sld.cu](mailto:isamp@infomed.sld.cu))

University of Medical Sciences of Santiago de Cuba  
Cuba

Antonio Iván Ruiz Chaveco ([iruiz2005@yahoo.es](mailto:iruiz2005@yahoo.es))

University of the State of Amazonas  
Brazil

## Abstract

In the present work we analyze how physical exercises can influence the increase of a person's immunity; a study of the different types of pathogens is carried out, in particular the characteristics of viruses, their manifestations and appearance are investigated; the characteristics of the immune system as well as immunity, either innate or acquired, are studied. The relationship between viruses and a person's immune system is investigated, as well as how the immune system can react to the presence of a virus.

The dynamics of the interaction of the virus vs the immune system is simulated by means of a system of ordinary differential equations, the equilibrium points and the behavior of the trajectories in a neighborhood of the equilibrium points are determined, additionally the critical case of a zero and negative one eigenvalue, giving conclusions about the process in the different cases.

**Key words and phrases:** Mathematical model, epidemic, physical exercises, immunity.

Recibido 08/04/2021. Revisado 30/04/2021. Aceptado 12/07/2021.

MSC (2010): Primary 34Dxx; Secondary 34Cxx.

Autor de correspondencia: Sandy Sánchez Domínguez



### Resumen

En el presente trabajo se analiza cómo los ejercicios físicos pueden influir en el aumento de la inmunidad de una persona; se realiza un estudio de los diferentes tipos de patógenos, en particular se investigan las características de los virus, sus manifestaciones y apariencia; se estudian las características del sistema inmunológico así como la inmunidad, ya sea innata o adquirida. Se investiga la relación entre los virus y el sistema inmunológico de una persona, así como el sistema inmunológico puede reaccionar ante la presencia de un virus.

La dinámica de la interacción del virus vs el sistema inmunológico se simula mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se determinan los puntos de equilibrio y el comportamiento de las trayectorias en una vecindad de las posiciones de equilibrio, adicionalmente se estudia el caso crítico de un autovalor cero y uno negativo, dando conclusiones sobre el proceso en los diferentes casos.

**Palabras y frases clave:** Modelo matemático, epidemia, ejercicios físicos, inmunidad.

## 1 Introduction

The immune system is a set of elements that exist in the human body. These elements interact with each other and are intended to defend the body from diseases, viruses, bacteria, microbes, among others. The human immune system serves as a protection, shield or barrier that protects us from undesirable beings, antigens, that try to invade our body. Therefore, it represents the defense of the human body.

There are confessions of patients who, due to the doctor's suggestions, permanently started to perform physical exercises to strengthen their immune system, in the face of infectious diseases, perceiving a low immunity; gradually obtaining a change in your organism. The fitness coach stated that he was not the only case, as he had others with similar situations. This problem is addressed further in specialized bibliographies (cf. [1, 2, 14]).

When the immune system does not function properly, it decreases its ability to defend our body. Thus, we are more vulnerable to diseases such as tonsillitis or stomatitis, candidiasis, skin infections, ear infections, herpes, colds and flu. To strengthen the immune system and avoid problems with low immunity, special attention is needed with food. Some fruits help increase immunity, such as apples, oranges and kiwis, which are citrus fruits. The intake of omega 3 is also an ally for the immune system.

The immune system is made up of a complex of different cells that receive and emit different signals directed at white blood cells, thus regulating the body's defense mechanisms. The mediators of this interaction are proteins, peptides and other substances that for their activity are called immunomodulators. Biological immunomodulators are made up of a group of molecules with specific properties, many of them chemically and biologically very well characterized and others to be discovered. (cf. [16, 18]).

In the human organism there are own cells and inappropriate cells, among the inappropriate are pathogens; These inappropriate cells can cause changes in the body, which can turn into diseases and even cause the death of the person; pathogens can include viruses, bacteria, fungi, and parasites; these can be intracellular or extracellular.

Viruses are simple structures, they are considered mandatory intracellular parasites, because they depend on cells to multiply. Outside the intracellular environment, viruses are inert. However, once inside the cell, the replication capacity of viruses is surprising: a single virus is capable of multiplying, in a few hours, thousands of new viruses. Viruses are capable of infecting living

beings from all domains. In this way, represent the greatest biological diversity on the planet, being more diverse than bacteria, plants, fungi and animals combined (cf. [17]).

When the human body is attacked by a virus, a reaction from the immune system to the person quickly occurs to prevent this aggression; there are occasions when this reaction is sufficient to free the organism from any infection, but in many cases this is not enough and it is necessary to supply medication and other artificial substances capable of adding immunity such as interferons, among others.

Immunity can be innate or acquired, acquired immunity is adaptive and is made up of lymphocytes; On the other hand, innate immunity is made up of cells and molecules with the great function of defending the body from any aggressor, these have the ability to kill, this is an instantaneous process, this being the first defense of the body.

Interferons are glycoproteins that have several biological actions, including complex antiviral, immunomodulatory and antiproliferative effects. Its production and endogenous release occurs in response to viruses and other inducers, with the exception of bacterial exotoxins, polyanions, some low molecular weight compounds and microorganisms with intracellular growth (cf. [22]).

There are many diseases that are transmitted from person to person directly, and different forms of contagion are used for this purpose, often through speech or breathing or in some other way; but in many other cases this transmission can be carried out by means of a vector being the mosquito the most common. It is said that the cases of maximum risk are adults of the third age and especially those who suffer from some chronic disease; but practice has shown that in the face of this disease, there is no one safe, and it can have a slow evolution that acts in a fulminating way.

Today the most worrying situation is COVID-19, caused by the SARS-CoV-2 coronavirus, a respiratory disease that has claimed so many lives, there are many ideas on how to combat this disease; but the method that most researchers agree with is the method of isolating those infected to avoid possible transmission to other people [19, 20]. In [21] this process of contagion of the coronavirus is simulated by means of a generalization of the logistic method to characterize the process when it grows and when it decreases; indicating the moment of change of concavity of the curve.

One of the treatments that has already given results is interferon alpha-2b, in addition to others already tested in the treatment of other diseases such as AIDS, hepatitis, among others. Interferon alpha-2b, was developed by the Cuban Genetic Engineering and Biotechnology Center and has already been used in different parts of the world with highly reliable results (cf. [5]).

In [3] different real-life problems are dealt with using autonomous differential equations and systems of equations, where examples are developed and other problems and exercises are presented for the reader to develop. The authors of [4] indicate a set of articles that form a collection of several problems that model different processes, using in their study the qualitative and analytical theory of differential equations for both autonomous and non-autonomous cases, in both books the authors address the problem of epidemic development.

In [17], the probabilistic model is used to simulate population growth, which are applied to the development of epidemics. There are multiple works devoted to the study of the causes and the conditions under which an epidemic may develop, among which we can indicate (cf. [12]).

The problem of epidemic modeling has always been of great interest to researchers, such as [6–11, 13] and [15]. In this work we will apply the generalized logistic model, where the case of the growth and decrease of the infected are applied in the same equation; to model the development of epidemics, a model that allows forecasts of future behavior.

## 2 Model formulation

The human body works like a perfect machine, producing enzymes, hormones and substances that will be used, according to the needs; but there are occasions that this is not enough due to the causes of those needs, for example in the case of the appearance of a virus situation in which in general artificial supplies are necessary to achieve an effective coping with the situation.

In order to formulate the model using a system of differential equations, the following variables will be introduced:

$x_1$  is the total concentration of the healthy cells at the moment  $t$

$x_2$  is the total virus concentration at the time  $t$ .

In addition,  $\bar{x}_1$  and  $\bar{x}_2$  the values of the allowable concentrations of the healthy cells and the virus respectively.

In this way the model will be given by the following system of differential equations.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 f(x_1, x_2) \\ x_2' = x_2 g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

The main objective of this work is to determine the equilibrium positions and to study the trajectories of the system in the vicinity of the equilibrium positions. Suppose that the and functions can be expressed by the following development, which is in correspondence with the relationship between the virus and the home immune system, because between them there is a coping relationship, fighting for survival.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_1 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + f_1(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) &= -b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_2 + g_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

**Remark 1.** Here are considering that the initial encounter is favorable to viruses, otherwise there would be no viral process. The signs of the coefficients of the previous development correspond to the characteristics of the problem addressed.

The functions  $f_1(x_1, x_2)$  and  $g_1(x_1, x_2)$  from a physiological point of view represent external influences, in particular the effect of physical exercise, these disturbances from a mathematical point of view are infinitesimal of order superior in a neighborhood of the origin  $(0,0)$ , that is to say in its development only terms of superior degree appear.

Therefore, the system (1) takes the form:

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2 + x_1 f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = -b_1 x_2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2 + x_2 g_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2)$$

If the functions  $f_1(x_1, x_2)$  and  $g_1(x_1, x_2)$  are identically null, then system (2) takes the form,

$$\begin{cases} x_1' = a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^2 \\ x_2' = -b_1 x_2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2 \end{cases} \quad (3)$$

The equilibrium positions of the system (3) are the points,  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2\left(0, \frac{b_1}{b_3}\right)$ ,  $P_3\left(\frac{a_1}{a_3}, 0\right)$  and  $P_4\left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_2 - a_3 b_3}, \frac{a_1 b_2 - a_3 b_1}{a_2 b_2 - a_3 b_3}\right)$ .

### Analysis at point $P_1$

To the point  $P_1$ , if you have that the characteristic equation of the matrix of the linear part of the system has the form,  $\lambda^2 + (b_1 - a_1)\lambda - a_1b_1 = 0$ . Here there is a positive eigenvalue, and therefore the equilibrium position  $P_1$  is unstable.

**Example 1.** *Be the system*

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_1x_2 - 3x_1^2 \\ x'_2 = -x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \end{cases}$$

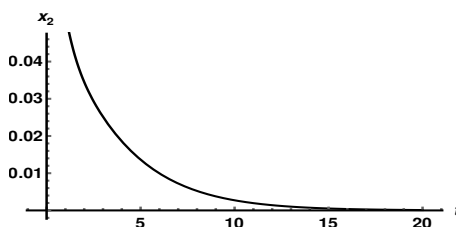
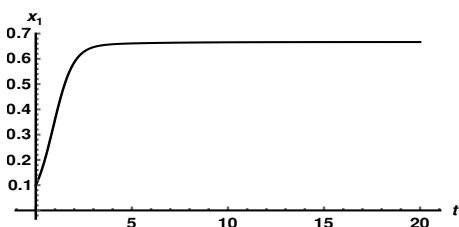


Figure 1: Graph of  $y_1(t)$  in the **Example 1**

Figure 2: Graph of  $y_2(t)$  in the **Example 1**

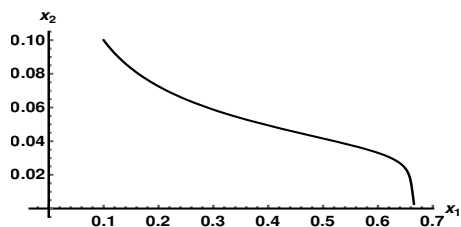


Figure 3: Graph of  $y_1(t)$  vs  $y_2(t)$  in the **Example 1**

Here we see that in spite of the origin of coordinates both the solution in  $x_1(t)$  how in  $x_2(t)$  remain in tune, but this position of equilibrium is unstable as it changes in the graph of  $x_1(t)$  against  $x_2(t)$ . This is in correspondence with the results obtained from the theoretical point of view.

It is not important to study the point  $P_2$  because it is made explicit here that the concentrations of healthy cells would disappear, and therefore the person will die.

### Analysis at point $P_3$

To the point  $P_3$  it is necessary to make a change of variables to analyze the behavior of trajectories in a neighborhood at that point. The transformation of coordinates,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{a_1}{a_3} \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

Reduces the system (3) in the next system,

$$\begin{cases} y_1' = -a_1 y_1 - \frac{a_1 a_2}{a_3} y_2 - a_2 y_1 y_2 - a_3 y_1^2 \\ y_2' = \frac{a_1 b_2 - a_3 b_1}{a_3} y_2 + b_2 y_1 y_2 + b_3 y_2^2 \end{cases} \quad (4)$$

The characteristic equation of the matrix of the linear part of the system (4) has the form,  $\lambda^2 + \frac{a_3(a_1 + b_1) - a_1 b_2}{a_3} \lambda + \frac{a_1 a_3 b_1 - a_1^2 b_2}{a_3} = 0$

**Theorem 1.** *The equilibrium position  $P_3$  it is asymptotically stable if and only if  $a_1 b_2 < a_3 b_1$  is fulfilled.*

*Proof.* Like  $\frac{a_3(a_1 + b_1) - a_1 b_2}{a_3} = \frac{a_1 b_2 - a_3 b_1}{a_3} - a_1$  and  $\frac{a_1 a_3 b_1 - a_1^2 b_2}{a_3} = -a_1 \left( \frac{a_1 b_2 - a_3 b_1}{a_3} \right)$  then,

the eigenvalues associated with the system (4) are  $\lambda_1 = \frac{a_1 b_2 - a_3 b_1}{a_3}$  and  $\lambda_2 = -a_1$ , therefore if the condition  $a_1 b_2 < a_3 b_1$  therefore if the condition,  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are negative and the system (4) is asymptotically stable.  $\square$

**Remark 2.** *It follows that if the condition of Theorem 1 are satisfied, the virus will disappear, with no consequences for the patient whenever the point coordinates correspond to the optimal concentration values, otherwise it will be necessary to take the necessary prophylactic measures to prevent the patient from falling into a coma.*

**Example 2.** *Given the following system that satisfies the conditions of Theorem 1*

$$\begin{cases} y_1' = -0.3 y_1 - 0.12 y_2 - 0.2 y_1 y_2 - 0.5 y_1^2 \\ y_2' = -0.64 y_2 + 0.1 y_1 y_2 + 0.1 y_2^2 \end{cases}$$

Where  $a_1 b_2 = a_3 b_1$ ,  $\lambda_1 = 0$  so the system (4) constitutes a critical case, then the matrix of the linear part of the system (4) to have a zero eigenvalue and a negative one, in this case the second method of Liapunov will be applied once this system is reduced to the quasi-normal form. By means of a non-degenerate transformation  $z = Sy$ , the system (4) can be transformed into the system,

$$\begin{cases} y_1' = Y_1(y_1, y_2) \\ y_2' = \lambda_2 y_2 + Y_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (5)$$

when  $S$  is the matrix  $\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$Y_1(y_1, y_2) = \frac{a_3 b_3 - a_2 b_2}{a_3} y_1^2 + b_2 y_1 y_2 \text{ and}$$

$$Y_2(y_1, y_2) = \frac{a_2(a_3 b_3 - a_2 b_2)}{a_3^2} y_1^2 + \frac{a_2(a_3 + b_2)}{a_3} y_1 y_2 - a_3 y_2^2$$

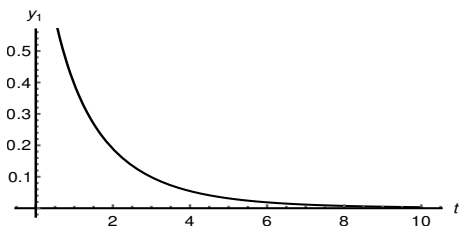


Figure 4: Graph of  $y_1(t)$  in the **Example 2**

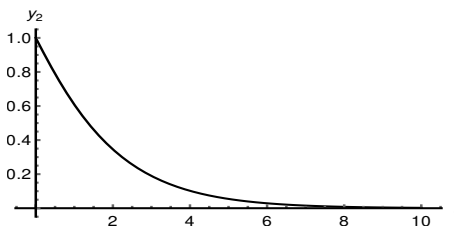


Figure 5: Graph of  $y_2(t)$  in the **Example 2**

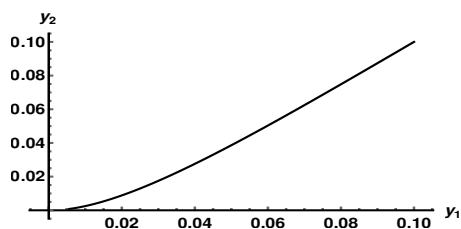


Figure 6: Graph of  $y_1(t)$  vs  $y_2(t)$  in the **Example 2**

**Theorem 2.** *The exchange of variables,*

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + h_1(z_1) + h^0(z_1, z_2) \\ y_2 = z_2 + h_2(z_1) \end{cases} \quad (6)$$

*transforms the system (5) into almost normal form,*

$$\begin{cases} z_1' = Z_1(z_1) \\ z_2' = \lambda_2 z_2 + Z_2(z_1, z_2) \end{cases} \quad (7)$$

Where  $h^0$  and  $Z_2$  cancel each other out  $z_2 = 0$ .

*Proof.* Deriving the transformation (6) along the trajectories of the systems (5) and (7) the system of equations is obtained,

$$\begin{cases} p_2 \lambda_2 h^0 + Z_1(z_1) = Y_1 - \frac{dh_1}{dz_1} Z_1 - \frac{\partial h^0}{\partial z_1} Z_1 - \frac{\partial h^0}{\partial z_2} Z_2 \\ \lambda_2 h_2 + Z_2 = Y_2 - \frac{dh_2}{dz_1} Z_1 \end{cases} \quad (8)$$

To determine the series that intervene in the systems and the transformation, we will separate the coefficients of the powers of degree  $p = (p_1, p_2)$  in the following two cases:

Case I): Doing in the system (9)  $z_2 = 0$ , is to say for the vector  $p = (p_1, 0)$  results the system,

$$\begin{cases} Z_1(z_1) = Y_1(z_1 + h_1, h_2) - \frac{dh_1}{dz_1} Z_1 \\ \lambda_2 h_2 = Y_2(z_1 + h_1, h_2) - \frac{dh_2}{dz_1} Z_1 \end{cases} \quad (9)$$

The system (9) allows determining the series coefficients,  $Z_1$ ,  $h_1$  and  $h_2$ , where for being the resonant case  $h_1 = 0$ , and the remaining series are determined in a unique way.

$$Z_1(z_1) = \frac{a_3 b_3 - a_2 b_2}{a_3} z_1^2 - \frac{a_2 b_2 (a_3 b_3 - a_2 b_2)}{a_1 a_3^2} z_1^3 + \dots$$

$$h_2(z_1) = -\frac{a_2 (a_3 b_3 - a_2 b_2)}{a_1 a_3^2} z_1^2 + \frac{2a_2^2 (a_3 + b_2) (a_3 b_3 - a_2 b_2)^2}{a_1 a_3^2} z_1^3 + \dots$$

Case II): For the case when  $z_2 \neq 0$  of the system (8) it follows that,

$$\begin{cases} p_2 \lambda_2 h^0 = Y_1(z_1 + h_1, z_2 + h_2) - \frac{\partial h^0}{\partial z_1} Z_1 - \frac{\partial h^0}{\partial z_2} Z_2 \\ Z_2 = Y_2(z_1 + h_1, h_2 + z_2) \end{cases} \quad (10)$$

Because the series from system (7) are known expressions, the system (10) allows you to calculate the series  $h^0$  and  $Z_2$ .

$$Z_2(z_1, z_2) = \frac{a_2 (a_3 b_3 - a_2 b_2)}{a_3^2} z_1^2 + \frac{a_2 (a_3 + b_2)}{a_3} z_1 z_2 - a_3 z_2^2 + \dots$$

$$h^0(z_1, z_2) = -\frac{b_2}{a_1^2} z_1 z_2 + \dots$$

This proves the existence of variable exchange.  $\square$

**Theorem 3.** *When  $a_3 b_3 < a_2 b_2$ , the solution of the system (7) is stable, otherwise it is inestable.*

*Proof.* Consider the Lyapunov function defined positive,

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2)$$

The derivative along the trajectories of the system (7) has the following expression,

$$\frac{dV}{dt}(z_1, z_2) = \frac{a_3 b_3 - a_2 b_2}{a_3} z_1^3 - a_1 z_2^2 + R(z_1, z_2).$$

Therefore, taking into account that the point  $P_3$  is in the first quadrant,  $\frac{dv(z_1, z_2)}{dt}$  is negative definite, because in function  $R$  we only have terms of a degree greater than 2 concerning  $z_1$  and higher than the second with respect to  $z_2$ , therefore the system (3) is asymptotically stable.  $\square$

**Remark 3.** *In this case, the total concentration of healthy cells converges to the optimal concentration, however, the total concentration of the virus converges to an acceptable concentration; otherwise, the patient would enter a state of crisis at any time, in which case measures would have to be taken to avoid worse consequences. For the convergence of total concentrations to permissible values, the action of external agents is feasible, where the influence of physical exercise is included.*

**Example 3.** Given the following system that verifies the conditions of the theorem 3

$$\begin{cases} z_1' = -z_1 - z_2 - z_1 z_2 - 2z_1^2 \\ z_2' = 2z_1 z_2 + z_2^2 \end{cases}$$

is obtained:

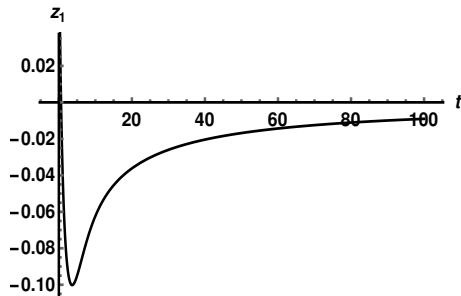


Figure 7: Graph of  $z_1(t)$  in the **Example 3**

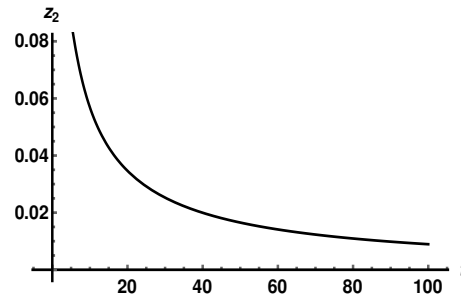


Figure 8: Graph of  $z_2(t)$  in the **Example 3**

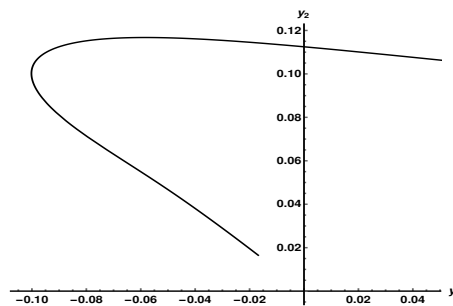


Figure 9: Graph of  $z_1(t)$  vs  $z_2(t)$  in the **Example 3**

As it is perceived in this system, the conditions of the theorems are fulfilled, and the convergence of the total concentrations to the optical concentrations is graphically demonstrated, this allows to see the reality of the theory developed in this paper.

### Analysis at point $P_4$

For biological interest, let's assume the next conditions of existence  $a_2 b_1 > a_1 b_3$ ,  $a_1 b_2 > a_3 b_1$  and  $a_2 b_2 > a_3 b_3$ , which guarantees that  $P_4$  is in the first quadrant. The transformation of coordinates,

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_2 - a_3 b_3} \\ x_2 = u_2 + \frac{a_1 b_2 - a_3 b_1}{a_2 b_2 - a_3 b_3} \end{cases}$$



Reduces the system (3) in the next system,

$$\begin{cases} u_1' = -\frac{a_3(a_2b_1 - a_1b_3)}{a_2b_2 - a_3b_3}u_1 - \frac{a_2(a_2b_1 - a_1b_3)}{a_2b_2 - a_3b_3}u_2 - a_2u_1u_2 - a_3u_1^2 \\ u_2' = \frac{b_2(a_1b_2 - a_3b_1)}{a_2b_2 - a_3b_3}u_1 - \frac{b_3(a_3b_1 - a_1b_2)}{a_2b_2 - a_3b_3}u_2 + b_2u_1u_2 + b_3u_2^2 \end{cases} \quad (11)$$

Whose characteristic equation of the matrix of the linear part of the system (11) has the form,

$$\lambda^2 + \frac{a_3b_1(a_2 + b_3) - a_1b_3(a_3 + b_2)}{a_2b_2 - a_3b_3}\lambda + \frac{(a_1b_2 - a_3b_1)(a_2b_1 - a_1b_3)}{a_2b_2 - a_3b_3} = 0 \quad (12)$$

**Theorem 4.** *The equilibrium position  $P_4$  it is asymptotically stable if and only if the condition  $a_3b_1(a_2 + b_3) > a_1b_3(a_3 + b_2)$  is fulfilled.*

*Proof.* The proof of this theorem is obtained from the conditions of Hurwitz's theorem, by the conditions of existence  $(a_1b_2 - a_3b_1) > 0$ ,  $(a_2b_1 - a_1b_3) > 0$  and  $(a_2b_2 - a_3b_3) > 0$ , therefore  $\frac{(a_1b_2 - a_3b_1)(a_2b_1 - a_1b_3)}{a_2b_2 - a_3b_3} > 0$ , so if  $a_3b_1(a_2 + b_3) > a_1b_3(a_3 + b_2)$  is fulfilled the coefficients of the characteristic equation are positive and the eigenvalues have negative real part.  $\square$

**Example 4.** *Given the following system that verifies the conditions of the theorem 4*

$$\begin{cases} u_1' = -0.0149754u_1 - 2.99507u_2 - 2u_1u_2 - 0.01u_1^2 \\ u_2' = 0.985025u_1 + 0.00492512u_2 + 0u_1u_2 + 0.01u_2^2 \end{cases}$$

is obtained:

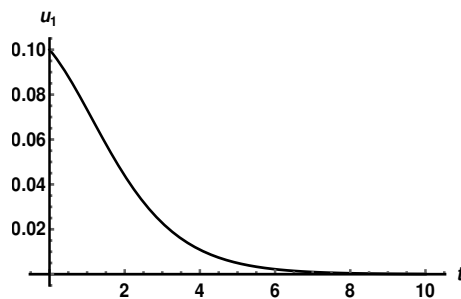


Figure 10: Graph of  $u_1(t)$  in the **Example 3**

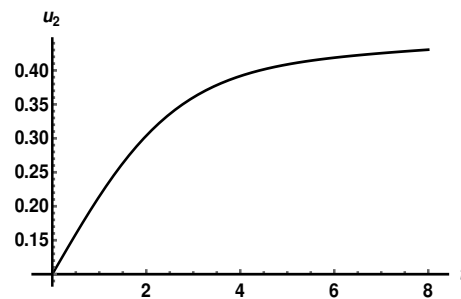


Figure 11: Graph of  $u_2(t)$  in the **Example 3**

**Remark 4.** *It follows that if condition of **Theorem 4** are fulfilled, the concentration values of the virus and the cells will remain in the vicinity of the point  $P_4$ , and if the coordinates of that point are close to the optimal values of the concentrations, there will be no consequences for the patient, so the concentrations of viruses and cells would be close to the values allowed for the human body, so no there will be consequences, otherwise the necessary prophylactic measures must be taken to avoid a fatal outcome.*

## Acknowledgments

The authors appreciate the technical support and invaluable feedback provided by Luis Eugenio Valdés García, Digna de la Caridad Bandera Jiménez, Adriana Rodríguez Valdés, Manuel de Jesús Salvador Álvarez and Hilda Morandeira Padrón. We also thank to Universidad de Oriente, Dirección de DATYS-Santiago de Cuba, Dirección Provincial de Salud Pública and managers of the provincial government of Santiago de Cuba.

## References

- [1] Alak, K., Pilat, Kruger K. *Current Vol. Kanowledge and new chalengesin exercise immunology*, Deutsche Zeitschriftfur Sportmedizin, **70**(10) (2019), 250–260.
- [2] Boch. W, *Immunsistem und Sport - E ine wechselhafte Bziehung*, Deutsche Zeitschriftfur Sportmedizin, **70**(10) (2019), 217–218.
- [3] Ruiz Chaveco, A. I. et al., *Modelagem matemática de problemas diversos*, Curitiba: Appris, Brazil, 2018.
- [4] Ruiz Chaveco, A. I. et al., *Applications of Differential Equations in Mathematical Modeling*, Curitiba: CRV, Brazil, 2016.
- [5] Del Sol G. Y, *The interferon that treats covid-19*, <https://www.granma.cu>, 2020.
- [6] Earn D. J., Rohani P., Bolker B. M., and Grenfell B. T., *A simple model for complex dynamical transitions in epidemics*, Science, **287** (2000), 667–670.
- [7] Esteva L. and Vargas C., *Analysis of a dengue disease transmission model*, Math. Biosci., **150** (1998), 131–151.
- [8] Greenhalgh. D and Das. R, *Some threshold and stability results for epidemic models with a density dependent death rate*, Theoret. Population Biol., **42** (1992), 130–151.
- [9] Gripenberg. G, *On a nonlinear integral equation modelling an epidemic in an age-structured population*, J. Reine Angew. Math., **341** (1983), 147–158.
- [10] Halloran. M. E, Watelet. L and Struchiner. C. J, *Epidemiological effects of vaccines with complex direct effects in an age-structured population*, Math. Biosci., **121** (1994), 193–225.
- [11] Halloran. M. E, Cochi. S. L, Lieu. T. A, Wharton. M, and Fehrs. L, *Theoretical epidemiologic and morbidity effects of routine varicella immunization of preschool children in the United States*, Am. J. Epidemiol., **140** (1994), 81–104.
- [12] Hamer. W. H, *Epidemic disease in England*, Lancet, **1** (1906), 733–739.
- [13] Hethcote. H. W, *A thousand and one epidemic models*, in *Frontiers in Theoretical Biology*, Lecture Notes in Biomath. 100, Springer - Verlag, Berlin, 1994.
- [14] Inkabi. S.E, Richter. P and Attakora. K, *Exercise immunology: involved componentes and varieties in diferente types of physical exercise*, Scientect Journal of Life Sciennces, **1**(1) (2017), 31–35.

- 
- [15] Hethcote. H. W, *Qualitative analysis of communicable disease models*, Math. Biosci., **28** (1976), 335–356.
- [16] Janeway. C.A, Jr., et al., *Immunobiology*, Garland Science, 2005.
- [17] Maitland. H. B and Maitland. M. C, *Cultivation of vaccinia virus without tissue culture*, Lancet., **212** (1928), 596–597. Doi: 10.1016/S0140-6736(00)84169-0
- [18] Mayer. G, *Immunology Chapter Two: Complement. Microbiology and Immunology*, On Line Textbook. USC School of Medicine, 2006.
- [19] Montero. C. A, *Covid 19 with science in China*, On <http://www.cubadebate.cu>, 2020.
- [20] Rodney. C. B. **Mathematical Modeling**, São Paulo, Brazil, 2004.
- [21] Ruiz. A, et al., *Coronavirus, A Challenge For Sciences, Mathematical Modeling*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), **16**(3) (2020), 28–34. Doi:10.9790/5728-1603012834
- [22] Sen. G, *Viruses and interferons*, Annu. Rev. Microbiol. **55** (2001), 294–300.

# A note on some forms of continuity

*Una nota sobre algunas formas de continuidad*

Zanyar A. Ameen (zanyar@uod.ac)

Department of Mathematics, College of Science, University of Duhok  
Duhok, Kurdistan Region, IRAQ.

## Abstract

New connections and characterizations of some classes of continuous functions are obtained. In particular, we characterize quasicontinuity and almost quasicontinuity in terms of weak types of open sets.

**Key words and phrases:** quasicontinuous; almost quasicontinuous; semicontinuous; precontinuous;  $\alpha$ -continuous;  $b$ -continuous;  $\beta$ -continuous; somewhat continuous; somewhat nearly continuous.

## Resumen

Se obtienen nuevas conexiones y caracterizaciones de algunas clases de funciones continuas. En particular, caracterizamos la cuasi continuidad y casi cuasicontinuidad en términos de tipos débiles de conjuntos abiertos.

**Palabras y frases clave:** cuasicontinuo; casi cuasicontinuo; semicontinuo; precontinuo;  $\alpha$ -continuo;  $b$ -continuo;  $\beta$ -continuo; algo continuo; algo casi continuo.

## 1 Introduction

The role of continuity of functions is essential in developing theory in all branches of (pure) mathematics, especially in topology and analysis, for decades. Then various generalizations of continuity have been introduced. In 1932, Kempisty [13] defined the notion of quasicontinuity which has been of interest to many analysts and topologists, and there is a rich literature on these functions, see the survey article [18]. In 1958, Ptak [26] introduced nearly continuous functions to generalize the Banach-Schauder Theorem. Levine [14] defined the concept of semicontinuity, in 1963, in terms of semiopen sets. Ten years later, Neubrunnova [19] showed that quasicontinuity and semicontinuity are similar. A big part of this work is motivated by that result. Gentry [12] has given a weaker class of quasicontinuity called somewhat continuity while studying the invariance of Baire spaces under mappings. Then  $\alpha$ -continuity was given by Njastad [20], which implies both nearly continuity and quasicontinuity. Mashhour et al. [16] have introduced the class of precontinuous functions which is equivalent to the class of nearly continuous functions. Abd-El-Monsef [1] studied  $\beta$ -continuous functions by using the notion of  $\beta$ -openness of sets. In 1990, Borsik [10] introduced an equivalent notion to  $\beta$ -continuity under the name of almost

quasicontinuous functions. Almost quasicontinuity is weaker than both nearly continuity and quasicontinuity. In 1987, Piotrowski [23] defined a weak version of somewhat continuity called somewhat nearly continuity to generalize problems in separate versus joint continuity and in the Closed Graph Theorem. In 2009, Ameen [5] defined a subclass of quasicontinuous functions called *sc*-continuous. He showed that quasicontinuity and *sc*-continuity are identical on  $T_1$ -spaces. All such classes of functions mentioned earlier are weaker than the class of continuous functions except *sc*-continuity which is incomparable. Due to the importance of these classes of continuous functions, we present some more connections between these functions and give further characterizations.

## 2 Preliminaries and Auxiliary Materials

Throughout this paper, the letters  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$  and  $\mathbb{R}$ , respectively, stand for the set of natural, rational and real numbers. The word "space" mean an arbitrary topological space. For a subset  $A$  of a space  $(X, \tau)$ , the closure and interior of  $A$  with respect to  $X$  respectively are denoted by  $\text{Cl}_X(A)$  and  $\text{Int}_X(A)$  (or simply  $\text{Cl}(A)$  and  $\text{Int}(A)$ ).

**Definition 2.1.** A subset  $A$  of a space  $X$  is said to be

- (1) regular open if  $A = \text{Int}(\text{Cl}(A))$ ,
- (2) preopen [16] if  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(A))$ ,
- (3) semiopen [14] if  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(A))$ ,
- (4) *sc*-open [5] if  $A$  is semiopen and union of closed sets,
- (5)  $\alpha$ -open [20] if  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))$ ,
- (6)  $\gamma$ -open [8] if  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(A)) \cup \text{Cl}(\text{Int}(A))$ ,
- (7)  $\beta$ -open [1] or semipreopen [7] if  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(A)))$ ,
- (8) somewhat open (briefly *sw*-open) [23] if  $\text{Int}(A) \neq \emptyset$  or  $A = \emptyset$ ,
- (9) somewhat nearly open (briefly *swn*-open) [23] (for more details, see [4]) if  $\text{Int}(\text{Cl}(A)) \neq \emptyset$  or  $A = \emptyset$ . The class of somewhat nearly open sets (except  $\emptyset$ ) were studied under the name of somewhere dense sets in [2].

The complement of a regular open (resp. preopen, semiopen, *sc*-open,  $\alpha$ -open,  $\beta$ -open,  $\gamma$ -open, *sw*-open, *swn*-open) set is regular closed (resp. preclosed, semi-closed, *sc*-closed,  $\alpha$ -closed,  $\beta$ -closed,  $\gamma$ -closed, *sw*-closed, *swn*-closed).

The intersection of all preclosed (resp. semiclosed,  $\alpha$ -closed,  $\beta$ -closed,  $\gamma$ -closed) sets in  $X$  containing  $A$  is called the preclosure (resp. semi-closure,  $\alpha$ -closure,  $\beta$ -closure,  $\gamma$ -closure) of  $A$ , and is denoted by  $\text{Cl}_p(A)$  (resp.  $\text{Cl}_s(A)$ ,  $\text{Cl}_\alpha(A)$ ,  $\text{Cl}_\beta(A)$ ,  $\text{Cl}_\gamma(A)$ ).

The union of all preopen (resp. semiopen,  $\alpha$ -open,  $\beta$ -open,  $\gamma$ -open) sets in  $X$  contained in  $A$  is called the preinterior (resp. semi-interior,  $\alpha$ -interior,  $\beta$ -interior,  $\gamma$ -interior) of  $A$ , and is denoted by  $\text{Int}_p(A)$  (resp.  $\text{Int}_s(A)$ ,  $\text{Int}_\alpha(A)$ ,  $\text{Int}_\beta(A)$ ,  $\text{Int}_\gamma(A)$ ).

The family of all preopen (resp. semiopen,  $\alpha$ -open,  $\gamma$ -open,  $\beta$ -open) subsets of  $X$  is denoted by  $PO(X)$  (resp.  $SO(X)$ ,  $\alpha O(X)$ ,  $\gamma O(X)$ ,  $\beta O(X)$ ).

*Remark 2.1.* It is well-known that for a space  $X$ ,  $\tau \subseteq \alpha O(X) \subseteq PO(X) \cup SO(X) \subseteq \gamma O(X) \subseteq \beta O(X)$ .

**Definition 2.2.** Let  $X$  be a space and let  $A \subseteq X$ . A point  $x \in X$  is said to be in the preclosure (resp. semi-closure,  $\alpha$ -closure,  $\beta$ -closure,  $\gamma$ -closure) of  $A$  if  $U \cap A \neq \emptyset$  for each preopen (resp. semiopen,  $\alpha$ -open,  $\beta$ -open,  $\gamma$ -open) set  $U$  containing  $x$ .

**Lemma 2.1.** Let  $A$  be a subset of a space  $X$ .

- (i)  $A$  is semiopen if and only if  $\text{Cl}(A) = \text{Cl}(\text{Int}(A))$ .
- (ii)  $A$  is  $\beta$ -open if and only if  $\text{Cl}(A) = \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(A)))$ .

*Proof.* (i) If  $A$  is semiopen, then  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(A))$  and so  $\text{Cl}(A) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(A))$ . For other side of inclusion, we always have  $\text{Int}(A) \subseteq A$ . Therefore  $\text{Cl}(\text{Int}(A)) \subseteq \text{Cl}(A)$ . Thus  $\text{Cl}(A) = \text{Cl}(\text{Int}(A))$ .

Conversely, assume that  $\text{Cl}(A) = \text{Cl}(\text{Int}(A))$ , but  $A \subseteq \text{Cl}(A)$  always, so  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(A))$ . Hence  $A$  is semiopen.

(ii) Theorem 2.4 in [7]. □

**Lemma 2.2.** Let  $A$  be a nonempty subset of a space  $X$ .

- (i) If  $A$  is semiopen, then  $\text{Int}(A) \neq \emptyset$ .
- (ii) If  $A$  is  $\beta$ -open, then  $\text{Int}(\text{Cl}(A)) \neq \emptyset$ .

*Proof.* (i) Suppose otherwise that if  $A$  is a semiopen set such that  $\text{Int}(A) = \emptyset$ , by Lemma 2.1 (i),  $\text{Cl}(A) = \emptyset$  which implies that  $A = \emptyset$ . Contradiction!

(ii) Similar to (i). □

At this place, perhaps a connection among the classes of open sets (defined above excluding  $\gamma$ -open as we have only used in Theorem 4.3) is needed.

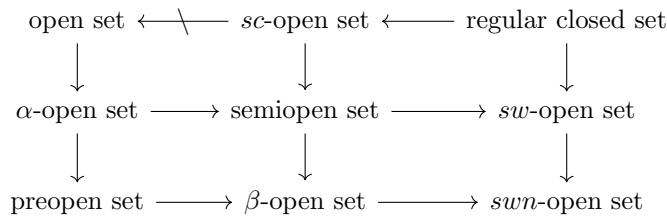


Diagram I

In general, none of these implications can be replaced by equivalence as shown below:

**Example 2.1.** Consider  $\mathbb{R}$  with the usual topology. Let  $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Obviously  $A$  is  $\alpha$ -open but not open. If  $B = [0, 1]$ ,  $B$  is semiopen but not  $\alpha$ -open. If  $C = \mathbb{Q}$ ,  $C$  is preopen but not  $\alpha$ -open. Let  $D = [0, 1] \cup ((1, 2) \cap \mathbb{Q})$ . Then  $D$  is both  $\beta$ -open and sw-open but neither preopen nor semiopen ([8, Example 1]). If  $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ , then  $E$  is swn-open but not sw-open. Let  $F = C \cup [2, 3]$ , where  $C$  is the Cantor set. Then  $F$  is swn-open but not  $\beta$ -open. Let  $G = (0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ . So  $G$  is sc-open but neither open nor regular closed.

**Example 2.2.** [5, Example 2.2.3] Consider  $X = \{a, b, c\}$  with the topology  $\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ . The set  $\{a\}$  is semiopen but not  $sc$ -open.

**Lemma 2.3.** [7, Theorems 3.13, 3.14 & 3.22][8, Proposition 2.6] For a subset  $A$  of a space  $X$ , we have

$$(i) \text{ Cl}(\text{Int}(A)) = \text{Cl}(\text{Int}_s(A)) = \text{Cl}_\alpha(\text{Int}_\alpha(A)) = \text{Cl}(\text{Int}_\alpha(A)) = \text{Cl}_\alpha(\text{Int}(A)),$$

$$(ii) \text{ Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(A))) = \text{Cl}(\text{Int}_p(A)) = \text{Cl}(\text{Int}_\gamma(A)) = \text{Cl}(\text{Int}_\beta(A)),$$

$$(iii) \text{ Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A))) = \text{Cl}_s(\text{Int}(A)) = \text{Cl}_\gamma(\text{Int}(A)) = \text{Cl}_\beta(\text{Int}(A)),$$

**Lemma 2.4.** Let  $A, B$  be subsets of  $X$ . If  $A$  is open and  $B$  is  $\alpha$ -open (resp. preopen, semiopen,  $\beta$ -open), then  $A \cap B$  is  $\alpha$ -open (resp. preopen, semiopen,  $\beta$ -open) in  $X$ .

*Proof.* Proposition 2 in [20] (resp. Lemma 4.1 in [24], Lemma 1 in [21], Theorem 2.7 in [1]).  $\square$

**Lemma 2.5.** Let  $A, B$  be subsets of a space  $X$ .

(i) If  $A$  is semiopen and  $B$  is preopen, then  $A \cap B$  is semiopen in  $B$ , [17, Lemma 1.1].

(ii) If  $A$  is semiopen and  $B$  is preopen, then  $A \cap B$  is preopen in  $A$ , [17, Lemma 2.1].

**Lemma 2.6.** Let  $Y$  be a subspace of a space  $X$  and let  $A \subset Y$ .

(i) If  $Y$  is semiopen in  $X$ , then  $A$  is semiopen in  $Y$  if and only if  $A$  is semiopen in  $X$ .

(ii) If  $Y$  is  $\beta$ -open in  $X$ , then  $A$  is  $\beta$ -open in  $Y$  if and only if  $A$  is  $\beta$ -open in  $X$ .

(iii) If  $Y$  is semiopen in  $X$ , then  $A$  is  $sw$ -open in  $Y$  if and only if it is  $sw$ -open in  $X$ .

*Proof.* (i) [15, Theorem 2.4].

(ii) The first direction is proved in [1, Theorem 2.7]. The converse is can be followed from [14, Theorem 6] and from the fact that  $A$  is  $\beta$ -open if and only if there exist a preopen open  $U$  such that  $U \subseteq A \subseteq \text{Cl}(U)$ .

(iii) [4, Theorem 3.14].  $\square$

**Lemma 2.7.** [20, Proposition 1] Let  $X$  be a space. A subset  $A$  of  $X$  is  $\alpha$ -open if and only if  $A \cap B$  is semiopen for each semiopen subset  $B$  of  $X$ .

In a similar way, we prove the following:

**Lemma 2.8.** Let  $X$  be a space. A subset  $A$  of  $X$  is preopen if and only if  $A \cap B$  is  $\beta$ -open for each semiopen subset  $B$  of  $X$ .

*Proof.* Given subsets  $A, B \subseteq X$  such that  $A$  is preopen and  $B$  is semiopen. Let  $x \in A \cap B$  and let  $U$  be an open set containing  $x$ . Since  $x \in \text{Int}(\text{Cl}(A))$ , then  $U \cap \text{Int}(\text{Cl}(A))$  is also an open set containing  $x$ . Set  $V = U \cap \text{Int}(\text{Cl}(A))$ . But  $x \in \text{Cl}(\text{Int}(B))$ , so

$$U \cap \text{Int}(\text{Cl}(A)) \cap \text{Int}(B) = V \cap \text{Int}(B) \neq \emptyset.$$

This implies that

$$A \cap B \subseteq \text{Cl}[\text{Int}(\text{Cl}(A)) \cap \text{Int}(B)] = \text{Cl}[\text{Int}[\text{Cl}(A) \cap \text{Int}(B)]],$$

and therefore,

$$A \cap B \subseteq \text{Cl}[\text{Int}[\text{Cl}(A) \cap \text{Int}(B)]] \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(A \cap B))).$$

Hence  $A \cap B$  is  $\beta$ -open.

Conversely, assume that  $A \cap B$  is  $\beta$ -open for each semiopen set  $B$  in  $X$ . We need to show that  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(A))$ . Suppose contrary that there exists  $x \in X$  such that  $x \in A$  and  $x \notin \text{Int}(\text{Cl}(A))$ . Then  $x \in \text{Cl}(\text{Int}(A^c))$  and obviously  $\text{Int}(A^c) \cup \{x\}$  is semiopen. By assumption,  $A \cap (\text{Int}(A^c) \cup \{x\})$  is  $\beta$ -open. But  $A \cap (\text{Int}(A^c) \cup \{x\}) = \{x\}$ . By Lemma 2.2 (ii) and [6, Lemma 2.1],  $\{x\}$  is preopen. This implies  $x \in \text{Int}(\text{Cl}(A))$ , which contradicts our assumption. Therefore, if  $x \in A$ , then  $x \in \text{Int}(\text{Cl}(A))$  and so  $A$  is preopen.  $\square$

**Lemma 2.9.** [4, Proposition 3.16] *Let  $X$  be a space. A subset  $A$  of  $X$  is  $\beta$ -open if and only if  $A \cap U$  is  $sw$ -open for each open set  $U$  in  $X$ .*

**Lemma 2.10.** *Let  $X$  be a space. A subset  $A$  of  $X$  is semiopen if and only if  $A \cap U$  is  $sw$ -open for each open set  $U$  in  $X$ .*

*Proof.* Since each semiopen set is  $sw$ -open and the intersection of a semiopen set with an open set is semiopen, by Lemma 2.4, so the first part follows.

Conversely, let  $x \in A$  and assume that  $A \cap U$  is  $sw$ -open for each open set  $U$  in  $X$ . That is  $\text{Int}(A \cap U) \neq \emptyset$ . But  $\emptyset \neq \text{Int}(A \cap U) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(U) = \text{Int}(A) \cap U$ , which implies that  $x \in \text{Cl}(\text{Int}(A))$  and so  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(A))$ . This proves that  $A$  is semiopen.  $\square$

**Lemma 2.11.** *Let  $X$  be a space. A subset  $A$  of  $X$  is  $\alpha$ -open if and only if  $A \cap U$  is  $sw$ -open for each  $\alpha$ -open set  $U$  in  $X$ .*

*Proof.* Since the intersection of two  $\alpha$ -open sets is  $\alpha$ -open and each  $\alpha$ -open set is  $sw$ -open, so the first part is proved.

Conversely, let  $x \in A$  and assume that  $A \cap U$  is  $sw$ -open for each  $\alpha$ -open set  $U$  in  $X$ . That is  $\text{Int}(A \cap U) \neq \emptyset$ . But  $\emptyset \neq \text{Int}(A \cap U) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(U) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(\text{Cl}(U)) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(U)))$ , which implies that  $\text{Int}(A) \cap \text{Cl}_\beta(U) \neq \emptyset$  and therefore  $x \in \text{Cl}_\beta(\text{Int}(A) \cap U) \subseteq \text{Cl}_\beta(\text{Int}(A))$ . By Lemma 2.3 (iii),  $\text{Cl}_\beta(\text{Int}(A)) = \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))$  and so  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))$ . This proves that  $A$  is  $\alpha$ -open.  $\square$

**Lemma 2.12.** *Let  $X$  be a space. The following are equivalent:*

- (i) each preopen subset of  $X$  is  $\alpha$ -open,
- (ii) each  $\beta$ -open subset of  $X$  is semiopen,
- (iii) each preopen subset of  $X$  is semiopen,
- (iv) each dense subset of  $X$  is semiopen,
- (v) each dense subset of  $X$  has an interior dense,
- (vi) each co-dense subset of  $X$  is nowhere dense,
- (vii) each  $sw$ -open subset of  $X$  is  $sw$ -open,
- (viii) each subset of  $X$  has a nowhere dense boundary.



*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Let  $A$  be a  $\beta$ -open set in  $X$ . Then  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(A)))$ . By (i),  $\text{Int}(\text{Cl}(A)) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))$ . Therefore,  $A \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(A))) \subseteq \text{Cl}[\text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))] = \text{Cl}(\text{Int}(A))$ . Hence  $A$  is semiopen.

The implications “(ii)  $\Rightarrow$  (iii)” and “(iii)  $\Rightarrow$  (iv)” are clear as each dense is preopen and each preopen is  $\beta$ -open.

(iv)  $\Rightarrow$  (v): Let  $D$  be a dense subset of  $X$ . By Lemma 2.1 (i),  $X = \text{Cl}(D) = \text{Cl}(\text{Int}(D))$ . Thus  $\text{Int}(D)$  is dense.

(v)  $\Leftrightarrow$  (vi): Let  $A$  be co-dense. Then  $\text{Int}(A) = \emptyset \Leftrightarrow \text{Cl}(X \setminus A) = X$ . By (v),  $\text{Cl}(\text{Int}(X \setminus A)) = X \Leftrightarrow \text{Int}(\text{Cl}(A)) = \emptyset$ . Hence  $A$  is nowhere dense.

(vi)  $\Leftrightarrow$  (vii): Let  $A$  be an *swn*-open set in  $X$ . Suppose  $A$  is not *sw*-open. That is,  $A$  is co-dense. By (vi),  $\text{Int}(\text{Cl}(A)) = \emptyset$ . Contradiction that assumption that  $A$  is *swn*-open. The other way is similar.

(v)  $\Leftrightarrow$  (viii): Let  $A$  be a subset of  $X$ . Then  $X = \text{Cl}(A) \cup (X \setminus \text{Cl}(A)) = \text{Cl}(A) \cup \text{Int}(X \setminus A) \subseteq \text{Cl}[A \cup \text{Int}(X \setminus A)]$ . This implies that  $A \cup \text{Int}(X \setminus A)$  is dense in  $X$ . By the same, we can conclude that  $\text{Int}(A) \cup X \setminus A$  is also dense in  $X$ . By (v), both  $\text{Int}[A \cup \text{Int}(X \setminus A)]$  and  $\text{Int}[\text{Int}(A) \cup X \setminus A]$  are (open) dense. Now,

$$\begin{aligned} \text{Int}[A \cup \text{Int}(X \setminus A)] \cap \text{Int}[\text{Int}(A) \cup (X \setminus A)] &= \text{Int}[A \cup \text{Int}(X \setminus A)] \cap \text{Int}(A) \cup (X \setminus A) \\ &= \text{Int}[\text{Int}(A) \cup \text{Int}(X \setminus A)] \\ &= X \setminus \partial(A), \end{aligned}$$

where  $\partial(A)$  means the topological boundary of  $A$ . Since the intersection of two open dense is dense, so  $X \setminus \partial(A)$  is open dense. Thus  $\partial(A)$  is nowhere dense.

(viii)  $\Leftrightarrow$  (i): Let  $A$  be preopen. That is  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(A))$ . By (viii),  $\emptyset = \text{Int}(\text{Cl}(\partial(A))) = \text{Int}(\partial(A)) = \text{Int}(\text{Cl}(A)) \setminus \text{Cl}(\text{Int}(A))$ . It follows that  $A \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(A)) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(A))$  and so  $\text{Cl}(A) = \text{Cl}(\text{Int}(A))$ . Since  $A \subseteq \text{Int}[\text{Cl}(A)] = \text{Int}[\text{Cl}(\text{Int}(A))]$ . This proves that  $A$  is  $\alpha$ -open.  $\square$

### 3 Relationships and properties

This section is devoted to some properties of the following classes of continuous functions and their relationships.

**Definition 3.1.** A function  $f$  from a space  $X$  to a space  $Y$  is called

- (1) *rc*-continuous [11], if the inverse image of each open set in  $Y$  is regular closed in  $X$ ,
- (2) *sc*-continuous [5], if the inverse image of each open set in  $Y$  is *sc*-open in  $X$ ,
- (3) semicontinuous [14], if the inverse image of each open set in  $Y$  is semiopen in  $X$ ,
- (4) nearly continuous [26], or precontinuous [16], if the inverse image of each open set in  $Y$  is preopen in  $X$ ,
- (5)  $\alpha$ -continuous [20], if the inverse image of each open set in  $Y$  is  $\alpha$ -open in  $X$ ,
- (6)  $\beta$ -continuous [1], if the inverse image of each open set in  $Y$  is  $\beta$ -open in  $X$ ,
- (7) somewhat continuous [12] (briefly *sw*-continuous), if the inverse image of each open set in  $Y$  is *sw*-open in  $X$ ,

- (8) somewhat nearly continuous [23, 4] (briefly *swn*-continuous), if the inverse image of each open set in  $Y$  is *swn*-open in  $X$ ,
- (9) quasicontinuous [13], if for each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ ,
- (10) almost quasicontinuous [10], if for each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ ,  $f^{-1}(G) \cap U$  is not nowhere dense.

*Remark 3.1.* (i) It is proved in [25] that almost quasicontinuity and  $\beta$ -continuity are equivalent (see also [9, Theorem 1]). An easier proof can be followed from the definition of almost quasicontinuity and Lemma 2.9.

(ii) The equivalence of semicontinuity and quasicontinuity is given in [19, Theorem 1.1].

(iii) somewhat nearly continuous functions coincide with surjective SD-continuous in [3].

The following diagram shows the relationship between above functions, which is an enlargement of the Diagram I given in [23]:

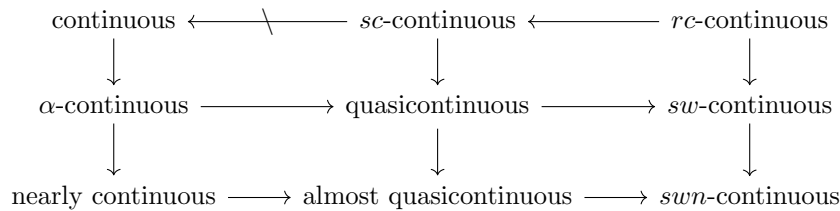


Diagram II

In general, none of the implications is reversible. Examples 5.2-5.3 in [4] show that the existence of *swn*-continuous functions that are not almost quasicontinuous or *sw*-continuous. Counterexamples for other cases are available in the literature.

**Theorem 3.1.** *Let  $X, Y$  be spaces such that  $X$  is  $T_1$ . A function  $f : X \rightarrow Y$  is  $\alpha$ -continuous if and only if it is both *sc*-continuous and nearly continuous.*

*Proof.* Proposition 2.2.10 in [5] and Theorem 3.2 in [22].  $\square$

**Theorem 3.2.** [9, Proposition 1] *Let  $X, Y$  be spaces. A function  $f : X \rightarrow Y$  is almost quasicontinuous if and only if  $f|_U$  is *swn*-continuous for each open subset  $U$  of  $X$ .*

**Theorem 3.3.** [4, Theorem 5.7] *Let  $X, Y$  be spaces. A function  $f : X \rightarrow Y$  is nearly continuous if and only if  $f|_U$  is *swn*-continuous for each  $\alpha$ -open subset  $U$  of  $X$ .*

Similar to the above results, we prove the following:

**Theorem 3.4.** *Let  $X, Y$  be spaces. A function  $f : X \rightarrow Y$  is quasicontinuous if and only if  $f|_U$  is *sw*-continuous for each open subset  $U$  of  $X$ .*

*Proof.* The first part follows from [17, Theorem 1.3], which implies that each quasicontinuous restricted to an open set is again quasicontinuous and hence *sw*-continuous.

Conversely, suppose that  $f|_U$  is *sw*-continuous for each open subset  $U$  of  $X$ . Let  $H$  be an open in  $Y$ . Then  $f^{-1}|_U(H) = f^{-1}(H) \cap U$  is *sw*-open in  $U$ . Since  $U$  is an open subset of  $X$ , clearly,  $f^{-1}(H) \cap U$  is *sw*-open in  $X$  and so, by Lemma 2.10,  $f^{-1}(H)$  is semiopen in  $X$ . Thus  $f$  is quasicontinuous.  $\square$

**Theorem 3.5.** *Let  $X, Y$  be spaces. A function  $f : X \rightarrow Y$  is  $\alpha$ -continuous if and only if  $f|_U$  is *sw*-continuous for each  $\alpha$ -open subset  $U$  of  $X$ .*

*Proof.* Similar steps given in the proof of the above theorem and Lemma 2.11.  $\square$

**Lemma 3.1.** *Let  $A, B$  be subsets of a space  $X$ . If  $A$  is semiopen and  $B$  is  $\alpha$ -open,  $A \cap B$  is  $\alpha$ -open in  $A$ .*

*Proof.* Given the sets  $A, B$ , then

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq A \cap \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(B))) \\ &\subseteq \text{Int}_A[A \cap \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(B)))] \\ &\subseteq \text{Int}_A[\text{Cl}(\text{Int}(A)) \cap \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(B)))] \\ &\subseteq \text{Int}_A[\text{Cl}[\text{Int}(A) \cap \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(B)))] \\ &\subseteq \text{Int}_A(\text{Cl}(\text{Int}(A \cap B))) \\ &\subseteq \text{Int}_A(\text{Cl}(\text{Int}_A(A \cap B))). \end{aligned}$$

Since  $\text{Int}_A(\text{Cl}(\text{Int}_A(A \cap B)))$  is an open set in  $A$ , so  $\text{Int}_A(\text{Cl}(\text{Int}_A(A \cap B))) \cap A = \text{Int}_A(\text{Cl}(\text{Int}_A(A \cap B)) \cap A)$ , and hence  $A \cap B \subseteq \text{Int}_A(\text{Cl}(\text{Int}_A(A \cap B)) \cap A) = \text{Int}_A(\text{Cl}_A(\text{Int}_A(A \cap B)))$ . This shows that  $A \cap B$  is  $\alpha$ -open in  $A$ .  $\square$

**Theorem 3.6.** *Let  $X, Y$  be spaces. A function  $f : X \rightarrow Y$  is  $\alpha$ -continuous if and only if  $f|_U$  is quasicontinuous for each semiopen subset  $U \subseteq X$ .*

*Proof.* Assume that  $f$  is  $\alpha$ -continuous. Let  $H$  be an open subset of  $Y$  and let  $U$  be a semiopen subset of  $X$ . By assumption  $f^{-1}(H)$  is  $\alpha$ -open in  $X$ . By Lemma 3.1,  $f^{-1}(H) \cap U$  is  $\alpha$ -open in  $U$  and thus, by Diagram I,  $f^{-1}(H) \cap U$  is a semiopen subset of  $U$ . Hence,  $f|_U$  is quasicontinuous.

Conversely, suppose that  $f|_U$  is quasicontinuous for each semiopen subset  $U$  of  $X$ . Let  $H$  be an open set in  $Y$ . Then  $f^{-1}|_U(H) = f^{-1}(H) \cap U$  is semiopen in  $U$ . Since  $U$  is semiopen in  $X$ , by Lemma 2.6 (i),  $f^{-1}(H) \cap U$  is semiopen in  $X$  for each semiopen  $U$  and thus, by Lemma 2.7,  $f^{-1}(H)$  is  $\alpha$ -open in  $X$ . Thus  $f$  is  $\alpha$ -continuous.  $\square$

**Theorem 3.7.** *Let  $X, Y$  be spaces. A function  $f : X \rightarrow Y$  is nearly continuous if and only if  $f|_U$  is almost quasicontinuous for each semiopen subset  $U \subseteq X$ .*

*Proof.* Suppose that  $f$  is nearly continuous. Let  $H$  be an open subset of  $Y$  and let  $U$  be a semiopen subset of  $X$ . By hypothesis  $f^{-1}(H)$  is preopen in  $X$ . By Lemma 2.5 (ii),  $f^{-1}(H) \cap U$  is preopen in  $U$  and thus, by Diagram I,  $f^{-1}(H) \cap U$  is  $\beta$ -open in  $U$ . Therefore,  $f|_U$  is almost quasicontinuous.

Conversely, suppose that  $f|_U$  is almost quasicontinuous for each semiopen subset  $U$  of  $X$ . Let  $H$  be an open set in  $Y$ . Then  $f^{-1}|_U(H) = f^{-1}(H) \cap U$  is a  $\beta$ -open subset of  $U$ . Since  $U$  is semiopen in  $X$  and each semiopen is  $\beta$ -open, by Lemma 2.6 (ii),  $f^{-1}(H) \cap U$  is  $\beta$ -open in

$X$  for each semiopen  $U$  and thus, by Lemma 2.8,  $f^{-1}(H)$  is preopen in  $X$ . Thus  $f$  is nearly continuous.  $\square$

**Theorem 3.8.** *For a function  $f : X \rightarrow Y$ , the following are equivalent:*

- (i) *each nearly continuous function is  $\alpha$ -continuous,*
- (ii) *each almost quasicontinuous function is quasicontinuous,*
- (iii) *each nearly continuous function is quasicontinuous,*
- (iv) *each swn-continuous function is sw-continuous.*

*Proof.* Apply Lemma 2.12  $\square$

## 4 Characterizations

**Theorem 4.1.** *Let  $X, Y$  be spaces. For a function  $f : X \rightarrow Y$ , the following are equivalent:*

- (1)  *$f$  is quasicontinuous;*
- (2) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ ,  $f^{-1}(G) \cap U$  is sw-open;*
- (3) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each  $\alpha$ -open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ ;*
- (4) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each  $\alpha$ -open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty  $\alpha$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ ;*
- (5) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty  $\alpha$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ ;*
- (6) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty semiopen set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ .*

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): Let  $G$  be an open set containing  $f(x)$  and let  $U$  be any open containing  $x$ . By (1), there is a nonempty open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ . Therefore  $V \subseteq f^{-1}(G)$  and so  $V \subseteq \text{Int}(f^{-1}(G))$ . Thus  $\emptyset \neq V = V \cap U \subseteq \text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U = \text{Int}(f^{-1}(G) \cap U)$ , which implies that  $f^{-1}(G) \cap U$  is sw-open.

(2) $\Rightarrow$ (3): Let  $G$  be an open set in  $Y$  containing  $f(x)$  and let  $U$  be an  $\alpha$ -open set in  $X$  containing  $x$ . Since each  $\alpha$ -open set is semiopen, by Lemma 2.2 (i),  $\text{Int}(U)$  is a nonempty open set. By (2)  $\text{Int}(f^{-1}(G) \cap \text{Int}(U)) = \text{Int}(f^{-1}(G)) \cap \text{Int}(U) \neq \emptyset$ . Set  $V = \text{Int}(f^{-1}(G)) \cap \text{Int}(U)$ . Clearly,  $V$  is a nonempty open set  $U$  and

$$f(V) \subseteq f(\text{Int}(f^{-1}(G)) \cap \text{Int}(U)) \subseteq f(f^{-1}(G)) \subseteq G.$$

This proves (3).

The implications “(3) $\Rightarrow$ (4)”, “(4) $\Rightarrow$ (5)” and “(5) $\Rightarrow$ (6)” are clear from the Diagram I.

(6) $\Rightarrow$ (1): Let  $G$  be an open set containing  $f(x)$ . By (6), for each open set  $U$  containing  $x$ , there is a nonempty semiopen set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ . Therefore  $V \subseteq f^{-1}(G)$  and so  $V \subseteq \text{Int}_s(f^{-1}(G))$ . Thus  $\emptyset \neq V = V \cap U \subseteq \text{Int}_s(f^{-1}(G)) \cap U$ , which implies that  $\text{Int}_s(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$  for each open  $U$  containing  $x$ . Hence  $x \in \text{Cl}(\text{Int}_s(f^{-1}(G)))$ . By Lemma 2.3 (i),  $x \in f^{-1}(G) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(f^{-1}(G)))$ . As  $x$  was taken arbitrarily, so  $f$  is quasicontinuous.  $\square$

The proofs of the following theorems are quite similar to the proof of Theorem 4.1. But for the sake of completeness, we provide them.

**Theorem 4.2.** *Let  $X, Y$  be spaces. For a function  $f : X \rightarrow Y$ , the following are equivalent:*

- (1)  $f$  is  $\alpha$ -continuous;
- (2) For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each semiopen  $U$  containing  $x$ , there exist a nonempty open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ .

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): Let  $G$  be an open set containing  $f(x)$  and let  $U$  be a semiopen containing  $x$ . By (1) and Lemma 2.3 (iii),  $x \in f^{-1}(G) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(f^{-1}(G)))) = \text{Cl}_s(\text{Int}(f^{-1}(G)))$ . This implies that  $\text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$  for each semiopen  $U$  containing  $x$  and so  $\text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$ . If  $W = \text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U$ , by Lemma 2.4,  $W$  is a nonempty semiopen set. Set  $V = \text{Int}(W)$ . By Lemma 2.2 (i),  $V$  is nonempty open and

$$f(V) \subseteq f(\text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U) \subseteq f(f^{-1}(G)) \subseteq G.$$

This completes the proof of (2).

(2) $\Rightarrow$ (1): Let  $x \in X$  and let  $G$  be an open set containing  $f(x)$ . By (2), for each semiopen set  $U$  containing  $x$ , there is a nonempty open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ . Then  $V \subseteq f^{-1}(G)$  and so  $V \subseteq \text{Int}(f^{-1}(G))$ . Thus  $\emptyset \neq V = V \cap U \subseteq \text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U$ , which implies that  $\text{Int}(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$  for each semiopen  $U$  containing  $x$ . Therefore  $x \in \text{Cl}_s(\text{Int}(f^{-1}(G)))$ . By Lemma 2.3 (iii),  $x \in f^{-1}(G) \subseteq \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(f^{-1}(G))))$ . Hence  $f$  is  $\alpha$ -continuous.  $\square$

**Theorem 4.3.** *Let  $X, Y$  be topological spaces. For a function  $f : X \rightarrow Y$ , the following are equivalent:*

- (1)  $f$  is almost quasicontinuous;
- (2) For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exist a nonempty preopen set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ ;
- (3) For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exist a nonempty  $\gamma$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ ;
- (4) For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exist a nonempty  $\beta$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ .

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2): Let  $G$  be an open set containing  $f(x)$  and let  $U$  be an open set containing  $x$ . By (1) and Lemma 2.3 (ii),  $x \in f^{-1}(G) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(f^{-1}(G)))) = \text{Cl}(\text{Int}_p(f^{-1}(G)))$ . This implies that  $\text{Int}_p(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$  for each open  $U$  containing  $x$  and so  $\text{Int}_p(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$ . Set  $V = \text{Int}_p(f^{-1}(G)) \cap U$ . By Lemma 2.4,  $V$  is a nonempty preopen set with  $V \subseteq U$  and

$$f(V) \subseteq f(\text{Int}_p(f^{-1}(G)) \cap U) \subseteq f(f^{-1}(G)) \subseteq G.$$

This proves (2).

The implications “(2) $\Rightarrow$ (3)” and “(3) $\Rightarrow$ (4)” are follow from Remark 2.1.

(4) $\Rightarrow$ (1): Let  $x$  be any point in  $X$  and let  $G$  be an open set containing  $f(x)$ . By (4), for each open set  $U$  containing  $x$ , there is a nonempty  $\beta$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $f(V) \subseteq G$ . Then  $V \subseteq f^{-1}(G)$  and so  $V \subseteq \text{Int}_\beta(f^{-1}(G))$ . Thus  $\emptyset \neq V = V \cap U \subseteq \text{Int}_\beta(f^{-1}(G)) \cap U$ , which implies that  $\text{Int}_\beta(f^{-1}(G)) \cap U \neq \emptyset$  for each open  $U$  containing  $x$ . Therefore  $x \in \text{Cl}(\text{Int}_\beta(f^{-1}(G)))$ . By Lemma 2.3 (ii),  $x \in f^{-1}(G) \subseteq \text{Cl}(\text{Int}_\beta(f^{-1}(G))) = \text{Cl}(\text{Int}(\text{Cl}(f^{-1}(G))))$ . This prove that  $f$  is almost quasicontinuous.  $\square$

**Corollary 4.1.** *Let  $X, Y$  be topological spaces. For a function  $f : X \rightarrow Y$ , the following are equivalent:*

- (1)  *$f$  is almost quasicontinuous;*
- (2) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ ,  $f^{-1}(G) \cap U$  is  $\text{swn}$ -open;*
- (3) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each  $\alpha$ -open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $V \subseteq \text{Cl}(f^{-1}(G))$ ;*
- (4) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each  $\alpha$ -open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty  $\alpha$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $V \subseteq \text{Cl}(f^{-1}(G))$ ;*
- (5) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty  $\alpha$ -open set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $V \subseteq \text{Cl}(f^{-1}(G))$ ;*
- (6) *For each  $x \in X$ , each open set  $G$  containing  $f(x)$  and each open  $U$  containing  $x$ , there exists a nonempty semiopen set  $V$  with  $V \subseteq U$  such that  $V \subseteq \text{Cl}(f^{-1}(G))$ .*

*Proof.* Follows from Theorem 4.1 and Lemma 2.9. □

## References

- [1] Abd-El-Monsef, M. E., EL-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A.  *$\beta$ -open and  $\beta$ -continuous mappings*, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ, **12** (1983), 77–90.
- [2] Al-Shami, T. *Somewhere dense sets and  $ST1$ -spaces*, Journal of Mathematics, Punjab University, **49**(2) (2017), 101–111.
- [3] Al-shami, T. and Noiri, T. *More notions and mappings via somewhere dense sets*, Afrika Matematika, **30**(7-8) (2019), 1011–1024.
- [4] Ameen, Z. A. *On somewhat near continuity and some applications*, Submitted.
- [5] Ameen, Z. A. *A new class of semi-open sets in topological spaces*, MSc, Dohuk University, 2009.
- [6] Ameen, Z. A. *On types of generalized closed sets*, Journal of Taibah University for Science, **12**(3) (2018), 290–293.
- [7] Andrijević, D. *Semi-preopen sets*, Matematički Vesnik, **38**(93) (1986), 24–32.
- [8] Andrijević, D. *On  $b$ -open sets*, Matematički Vesnik, **48** (1996), 59–64.
- [9] Borsik, J. *On almost quasicontinuous functions*, Mathematica Bohemica, **118**(3) (1993), 241–248.
- [10] Borsik, J. and Doboš, J. *On decompositions of quasicontinuity*, Real Analysis Exchange, **16**(1) (1990), 292–305.
- [11] Dontchev, J. and Noiri, T. *Contra-semicontinuous functions*, Math. Pannon., **10**(2) (1999), 159–168.

- [12] Gentry, K. R., and Hoyle, H. B. *Somewhat continuous functions*, Czechoslovak Mathematical Journal, **21**(1) (1971), 5–12.
- [13] Kempisty, S. *Sur les fonctions quasicontinues*, Fundamenta Mathematicae, **19**(1) (1932), 184–197.
- [14] Levine, N. *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, The American Mathematical Monthly, **70**(1) (1963), 36–41.
- [15] Maheshwari, S. *Some new separations axioms*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I., **89** (1975), 395–402.
- [16] Mashhour, A., Abd-El-Monsef, M. and El-Deep, S. *On precontinuous and weak precontinuous mappings*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt., **53** (1982), 47–53.
- [17] Mashhour, A., Hasanian, S. and El-Deeb, I. *A note on semi-continuity and precontinuity*, Indian J. pure Appl. Math., **13**(10) (1982), 1119–1123.
- [18] Neubrunn, T. *Quasi-continuity*, Real Analysis Exchange, **14**(2) (1988), 259–306.
- [19] Neubrunnová, A. *On certain generalizations of the notion of continuity*, Matematický časopis, **23**(4) (1973), 374–380.
- [20] Njastad, O. *On some classes of nearly open sets*, Pacific journal of mathematics, **15**(3) (1965), 961–970.
- [21] Noiri, T. *On semi-continuous mappings*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, **54**(2) (1973), 210–214.
- [22] Noiri, T. *On  $\alpha$ -continuous functions*, Časopis pro pěstování matematiky, **109**(2) (1984), 118–126.
- [23] Piotrowski, Z. *A survey of results concerning generalized continuity on topological spaces*, Acta Math. Univ. Comenian, **52**(53) (1987), 91–110.
- [24] Popa, V. and Noiri, T. *Almost weakly continuous functions*, Demonstratio Mathematica, **25**(1-2) (1992), 241–252.
- [25] Popa, V. and Noiri, T. *On  $\beta$ -continuous functions*, Real Analysis Exchange, **18**(2) (1992), 544–548.
- [26] Pták, V. *Completeness and the open mapping theorem*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **86** (1958), 41–74.

# Un breve recorrido histórico por el álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones a la economía

*A short tour along the history of linear algebra and some of its applications to  
economics*

Ana M. Martín-Caraballo (ammarcar@upo.es)

Concepción Paralera-Morales (cparmor@upo.es)

Ángel F. Tenorio (aftenvil@upo.es)

Depto. de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica  
Universidad Pablo de Olavide  
Sevilla - España

## Resumen

En el presente artículo trataremos diversos tópicos del álgebra lineal (y más concretamente del álgebra matricial) tanto desde una perspectiva histórica en la que se mostrará la evolución de diversos conceptos como desde su aplicación a la resolución de problemas económicos. En relación al recorrido histórico del álgebra lineal, expondremos los inicios de la misma y los principales hitos alcanzados en relación al estudio de las matrices, aunque no seremos exhaustivos por motivo de extensión. Con respecto al uso del álgebra lineal para resolver cuestiones económicas, mostraremos algunas de las aplicaciones más habituales y tradicionales a este respecto, haciendo especial énfasis en el análisis input-output y la teoría de juegos para la toma de decisiones.

**Palabras y frases clave:** álgebra matricial; aplicaciones a la economía; análisis input-output; teoría de juegos; introducción histórica.

## Abstract

This article deals with several topics in the field of Linear Algebra (and more concretely Matrix Algebra), by considering both its application to solving economic problems and a historic approach showing the evolution of such concepts. Regarding the historic tour of Linear Algebra, we explain the first steps and the main milestones in the classical research on matrices, although we are not being exhaustive due to reasons of length. With respect to the use of Linear Algebra to solve economic questions, we show some of the most traditional and usual applications, emphasizing Input-Output Analysis and Game Theory, the latter for Decision Making, as its most characteristic examples.

**Key words and phrases:** matrix algebra; applications to economics; input-output analysis; game theory; historic introduction.



## 1 Introducción

Al adentrarnos en el ámbito de la aplicación de las matemáticas a otras ciencias, podemos encontrarnos con situaciones cuya modelización consiste en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado o lineales. Es entonces cuando el álgebra lineal se convierte en una herramienta que facilita y permite dar respuesta al problema matemático asociado a la situación del mundo real. La validez del álgebra lineal para tratar estas cuestiones se basa en que los sistemas de ecuaciones lineales son expresables matricialmente y, gracias a esta conversión, pueden aplicarse posteriormente múltiples procedimientos. En consecuencia, el tratamiento y resolución de sistemas lineales, matrices y determinantes (que se obtienen de ellos) se convierte en pieza clave para la resolución de problemas (por ejemplo, aquellos de tipo numérico o relativos a ecuaciones diferenciales) que modelizan situaciones del mundo real que nos rodea.

En el presente artículo, mostraremos cómo el interés y (nos atreveríamos a decir) la necesidad de resolver problemas algebraicos basados en ecuaciones lineales aparece ya en los albores de nuestra historia, pudiéndose encontrar múltiples ejemplos de su uso en los textos matemáticos más antiguos existentes. Como indican Kline [44] y Joseph [42], las tablillas cuneiformes de la Antigua Babilonia (que datan del año 3000 a.C.), los papiros Rhind y moscovita (entre el año 2000 y el 1500 a.C.) o los *Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas* (hacia el s. X a.C.) contienen múltiples ejemplos de resolución de problemas prácticos de álgebra lineal para resolver cuestiones que interesaban en esta cultura, especialmente cuestiones con un fuerte componente económico.

A este respecto, Fedriani et al. [23] realizaron un estudio sobre cómo los sistemas de numeración habían ido apareciendo a lo largo de la historia en base a las necesidades económicas existentes en cada civilización y cómo dichas necesidades generaron diferencias significativas en sus respectivos sistemas como pueden ser la aparición de diferentes conceptos numéricos y de distintos niveles de representación numérica entre otras.

Pero el álgebra lineal no solo permite modelizar situaciones de índole económico, sino que muchísimas situaciones de otras ramas del conocimiento pueden ser modelizadas y tratadas mediante los objetos y resultados propios de este campo. Sin remontarnos al pasado y tocando temas de mayor actualidad, como son las cuestiones relacionadas con la informática, cualquier lenguaje de programación trata los datos como ‘arrays’ o, lo que es lo mismo, como tablas con un determinado número de filas y columnas; y que, por tanto, son modelizables matemáticamente por medio de vectores o matrices (según tengan más de una fila y una columna). Del mismo modo, cualquier matriz puede verse como una transformación que permite codificar y decodificar la información que se envía por un canal de comunicación. Estaríamos hablando de la teoría de códigos lineales, en la que incluso se podrían detectar y corregir los errores que se cometen al transmitir la información anterior por dicho canal por medio de unas matrices especiales llamadas de Hadamard. La detección y corrección de errores en la información transmitida es esencial para la transmisión de imágenes y documentos por Internet.

Un tercer ejemplo más geométrico (y con múltiples aplicaciones tanto al tratamiento de imagen por ordenador como a la robótica) se basa en el hecho que todos los movimientos en el espacio  $n$ -dimensional pueden representarse (y por tanto traducirse) como matrices cuadradas invertibles.

Ya que el álgebra lineal es una disciplina matemática que abarca un considerable número de nociones y resultados, el presente artículo va a centrarse en la parcela correspondiente al álgebra matricial. Más concretamente, comenzaremos exponiendo cómo se origina el concepto de matriz y cómo van apareciendo sus operaciones esenciales; para continuar, en una segunda etapa, con el estudio de sus aplicaciones a diversos problemas de índole económica. Por tanto, nuestro objetivo

es doble: por un lado, recorrer la evolución histórica del álgebra matricial desde sus orígenes; y por el otro, explicar algunos de los tópicos económicos que pueden tratarse con el álgebra matricial. Finalizaremos el artículo indicando algunas conclusiones sobre la aplicación del álgebra matricial al estudio de problemas económicos tanto desde un punto de vista investigador como docente.

## 2 Evolución histórica

En esta sección expondremos cómo fueron surgiendo las distintas nociones pertenecientes al álgebra matricial en su correspondiente contexto histórico. Más concretamente, primero veremos su aparición en base al tratamiento matemático que se venía realizando en algunas de las culturas clásicas antiguas (como por ejemplo la Antigua India o China) y, hecho esto, comentaremos cómo se trabajaron y formalizaron dichos conceptos en las denominadas matemáticas modernas, procurando mostrar que dicha formalización requirió de un trayecto que duró varios siglos hasta su culminación a finales del s. XIX.

### 2.1 Matemáticas antiguas

El uso de las matrices (aunque sin usar esa terminología que aparecerá a mediados del s. XIX) en diversas civilizaciones clásicas de la antigüedad puede encontrarse en la resolución y tratamiento de algunos de los problemas clásicos que se exponían en los documentos de esa época. No obstante, debe tenerse en cuenta que en ninguno de ellos se hace un desarrollo matemático formal de las nociones tratadas, sino que se exponían procedimientos aplicados a un problema concreto como guía para resolver problemas similares. Debe tenerse en cuenta que la primera aproximación a un cuerpo matemático cerrado con axiomas, definiciones y proposiciones no tendrá lugar hasta que Euclides elabore su *Elementos* hacia el año 300 a.C., aunque no aparecen ni conceptos ni resultados relativos al álgebra lineal, sino geométricos o pertenecientes a la teoría de números.

#### 2.1.1 India

El matemático árabe Halayudha realizó un comentario en el siglo X en relación a la obra de otro matemático indio llamado Pingala, que vivió en la zona que actualmente conforma el estado de Kerala. Aunque se ha situado a Pingala en el siglo VII a.C., la tradición hindú afirmaba que él era el hermano menor del gran gramático indio Panini que vivió en el s. V a.C., siendo este el siglo en el que finalmente se le ubicó.

Pingala fue quién formuló la primera descripción conocida de un sistema de numeración binario, describiendo este sistema en base a la lista de métricas védicas y las sílabas cortas y largas. En su obra también pueden encontrarse las ideas básicas del *mātrā-meru* (que posteriormente se denominará sucesión de Fibonacci) y el *meru-prāsthāra* (el conocidísimo triángulo de Pascal o de Tartaglia). Pero eso no es todo, ya que como puede verse en Joseph [42], daría una descripción de cómo formar una matriz.

Debe tenerse en cuenta que, para la Antigua India, el álgebra consistía en las actividades aritméticas y computacionales, no en la detección de patrones deductivos o procedimientos técnicos. En relación al álgebra lineal, se disponían de reglas para resolver las ecuaciones lineales y cuadráticas y los sistemas de las primeras. Solo se denominaba **incógnita** a la primera en la ecuación, recibiendo las restantes nombres de colores (negro, azul, amarillo, etc.) y usándose iniciales de palabras como símbolos. Esto llevaba a disponer de una simbología poco extensa pero muy clarificadora. Aunque los problemas y sus resoluciones se expresaban usando un estilo

quasi-simbólico e indicando los pasos que se iban realizando, hay que indicar que se carecía de cualquier tipo de justificación sobre la validez de los métodos de resolución empleados.

En el año 628, Brahmagupta (598–665) escribió el *Brahma-sphuta-siddhanta* (que traducido vendría a ser *La ciencia perfeccionada de Brahma*). El decimotavo libro de esta obra estaba dedicado al Álgebra y a la resolución de ecuaciones indeterminadas. Posteriormente Bhaskara (1114–1185) escribiría un libro titulado *Siddhānta Shiromani* (que podría traducirse como *Corona* o *Joya de los Tratados*) cuya segunda parte se denominaba *Bijaganita* (cuya traducción sería *Matemáticas por medio de semillas* o *algoritmos*) y estaba centrado en la aplicación de algoritmos de resolución para ecuaciones lineales y cuadráticas y de sus sistemas.

### 2.1.2 China

En esta civilización tampoco aparecería el nombre de matriz, pero sí su concepto tal y como atestiguaría la aparición de un cuadrado mágico  $3 \times 3$  hacia el año 650 a.C.

La obra clave de las matemáticas en la Antigua China es el *Jiu Zhang Suan Shu* (o los *Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas*). Era un texto que recopilaba todo el conocimiento matemático existente en China entre los siglos X y I a.C., aunque la primera versión conservada del texto data del año 179 d.C. Desafortunadamente, ni su autoría ni su fecha de composición son conocidas, existiendo teorías que los sitúan en la última dinastía Chin o en la primera dinastía Han (s. I a.C.). El libro se estructuraba como sigue: tras plantearse el enunciado de un problema, se enunciaba la solución del mismo seguida de una explicación sobre el método de resolución empleado. Dicho método podría ir desde una regla general hasta una secuencia de operaciones sin justificación alguna. En el año 263 d.C., el matemático y filósofo Liu Hui (circa 220–circa 280) realizó una serie de comentarios a las explicaciones que se recogían en el libro y que tienen tanto valor como la obra original comentada. En los 246 problemas que se recogen en los nueve capítulos de los que se compone la obra, se recoge todo el conocimiento matemático chino de la época, incluidos los relativos a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Concretamente, el capítulo octavo, titulado *Fang Cheng* (que puede traducirse como *Método de las Tablas*), contiene 18 problemas de resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas con dos o tres incógnitas e incluye el primer texto en el que se hace uso de las matrices para resolver sistemas lineales.

El método mostrado para resolver sistemas de ecuaciones lineales es esencialmente el que Gauss desarrollaría mil quinientos años después y que nosotros utilizamos actualmente. Usando la notación matricial del sistema  $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ , se realizaban transformaciones por columnas para obtener otro equivalente  $D \cdot \underline{x} = \underline{b}$ , con  $D$  una matriz triangular superior. Hay que destacar que el uso de estas transformaciones obligaron a la introducción del concepto de número negativo y de la regla cheng-fu (más-menos) para operar con ellos.

El capítulo séptimo, titulado *Ying Buzu* (que vendría a significar *demasiado y no suficiente*), consiste en 19 problemas cuya resolución resulta ser un caso especial de la regla de Cramer para dos ecuaciones con dos incógnitas. Es decir, la cultura china introdujo el concepto de determinante en la historia y lo hizo unos dos mil años antes de su descubrimiento por el matemático japonés Seki Kowa (circa 1639–1708) en su obra *Kai Fukudai no Hô* (cuya traducción sería *Método de resolución de problemas disimulados*) de 1683. No sería hasta diez años después, en 1693, que el matemático y filósofo alemán Gottfried Willhelm Leibniz (1646–1716) llegara también a definir el concepto de determinante en la matemática europea y se le atribuyese históricamente su descubrimiento.

Volviendo a las matemáticas chinas y avanzando hasta la Edad Media, Zhu Shijie (circa 1260–circa 1320) introdujo una serie de métodos algebraicos generales y perfeccionó la simbología

empleada, usando la exclusión sucesiva de incógnitas en su obra *Siyuan Yujian* (que significa *El espejo de jade para los cuatro elementos*) fechada en 1303. En su obra, las incógnitas se simbolizaban mediante los cuatro elementos de la cultura china: cielo, tierra, hombre y objeto. Su método se basaba en el uso del *tian yuan* (o *método de la incógnita celeste*), que simplemente consistía en la Regla de Ruffini para resolver ecuaciones; regla que sería introducida por Horner (1786–1837) en las matemáticas europeas medio siglo después de la obra antes referida.

## 2.2 Matemáticas modernas

Durante los siglos XVIII y XIX, buena parte de los principales matemáticos europeos tomaron parte en el desarrollo y formalización de los determinantes y sus propiedades. En el contexto de las matemáticas modernas, se considera mayoritariamente que la teoría de los determinantes se originó con el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), que utilizó los determinantes (aunque llamándolos resultantes) en 1693 [51] para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Como se indicó anteriormente, el matemático japonés Seki Kowa había introducido en el *wasan* (nombre de las matemáticas en Japón durante el periodo Tokugawa) gracias a su obra de 1683, no solo métodos basados en tablas como en la matemática china que ya hemos comentado, sino que también introdujo el concepto y los métodos generales de cálculo de la noción de ‘determinante’. Concretamente, trabajó con determinantes de orden menor o igual que 5 y los utilizó para la resolución de ecuaciones, aunque no para sistemas de ecuaciones lineales.

Sería en 1748 cuando un matemático escocés, discípulo de Newton, llamado Colin Maclaurin (1698–1746) publicaría su libro *Treatise of Algebra* [55] y, en el capítulo XI, aparecería la resolución habitual de las ecuaciones lineales simultáneas mediante el método de eliminación de incógnitas. En esta misma obra, pero en su capítulo XII, Maclaurin describiría la solución alternativa de estos sistemas mediante determinantes y que consiste en la denominada Regla de Cramer, a quien Maclaurin atribuyó la regla que reproducía en su libro y de la que posiblemente se tendría conocimiento desde 1730. Maclaurin solo probó en su obra la regla de Cramer para sistemas lineales de orden  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$ , dejando indicado cómo habría que proceder en orden  $4 \times 4$ . Sería dos años después, en 1750, cuando el propio Gabriel Cramer (1704–1752) publicaría este método de resolución para sistemas lineales de orden  $n \times n$  en el apéndice de su tratado de geometría titulado *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* [20], aunque sin incluir prueba alguna del resultado. Con las obras de Maclaurin y Cramer, tiene lugar históricamente el pistoletazo de salida para la publicación de trabajos sobre determinantes de manera regular y continuada.

Como curiosidad hay que indicar que en la obra *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (más conocida como *Ars Magna* [11]) del humanista italiano Gerolamo Cardano (1501–1576), publicada en 1545, aparece una regla para la resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Esta regla, que denominó ‘*regula de modo*’, coincide en lo esencial con los cálculos correspondientes a la regla de Cramer de la que hemos hablado anteriormente y que aparece unos dos siglos después. Sin embargo, Cardano no daría una definición formal de determinante ni introduciría un método de cálculo u objeto que se pueda identificar con dicha noción.

En 1764 [3], el matemático francés Étienne Bézout (1730–1783) introduciría métodos para el cálculo de determinantes al igual que haría el matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) en su obra *Mémoire sur l'élimination*, fechada en 1772 [79]. No obstante, el famoso determinante que le debe su nombre solo aparecería explícitamente en *Mémoire sur la résolution des équations* de 1771 [78]. También en 1772, el matemático, astrónomo y físico francés Pierre-Simon Laplace (1749–1827) generalizaría los trabajos de Bézout, Vandermonde y Cramer,

llegando a afirmar que los métodos introducidos por Cramer y Bézout eran impracticables. La obra en cuestión en la que llevaría a cabo esta tarea se denominó *Recherches sur le calcul integral et sur le système du monde* [50], en la que (además de estudiar las órbitas de los planetas interiores) discutió la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de determinantes (a los que también denominó resultantes tal y como había hecho Leibniz previamente, pero desconocedor de su trabajo), aunque sin llegar a realizar los cálculos. En esa misma obra, Laplace también introdujo el desarrollo general por una fila o columna de un determinante por medio de la suma ponderada alternada de menores del determinante de partida y que hoy denominamos desarrollo de Laplace.

Un año después, en 1773 [49], el matemático y astrónomo francés Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813) desarrolló la teoría de las matrices de orden  $3 \times 3$ , demostrando muchas de las propiedades de estas matrices. También en esta obra se interpretó por primera vez un determinante como el volumen de un tetraedro (concretamente el formado por el origen de coordenadas y otros tres puntos). Hay que tener en cuenta que Lagrange realizó su estudio de manera independiente y que nunca llegó a establecer relación entre su investigación y la de Laplace y el resto de los matemáticos franceses que fueron coetáneos suyos y que trabajaron con determinantes y matrices.

Hemos de entrar en el siglo XIX para encontrarnos por primera vez con el término ‘determinante’, que sería introducido por el matemático y físico alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) en sus *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en 1801 [30]. No obstante, el objeto al que originalmente llamó determinante no coincide con el que disfruta hoy día de ese nombre, sino que se usaba para una expresión del discriminante de una forma cuadrática expresada en relación a un cierto módulo y lo denominaba de este modo porque ese objeto ‘determinaba’ las propiedades de la forma cuadrática en cuestión. Más aún, Gauss también expresó en esta obra los coeficientes de sus formas cuadráticas mediante ‘arrays’ rectangulares (i.e. matrices) y describió cómo se multiplicaban matrices y se calculaba la inversa de una matriz en el contexto de los ‘arrays’ de coeficientes de formas cuadráticas.

Debe tenerse en cuenta que con el término ‘array’ que hemos empleado, queremos referirnos a una distribución en formato tabular de datos expresados en filas y columnas. Este término es empleado como sinónimo del término ‘matriz’ en Computación e Informática, pero eliminando las connotaciones matemáticas que el segundo término tiene en relación a tener definida una estructura algebraica (de espacio vectorial en general y de anillo en el caso de matrices cuadradas de un determinado orden). Este era además el sentido en el que usaba Gauss las matrices ya que no llegó a tener conciencia de la noción de álgebra matricial, puesto que para él, el producto de matrices era simplemente un cálculo para obtener la composición de formas cuadráticas.

Ya hemos indicado que Gauss empleó el término determinante por primera vez en la matemática europea, pero refiriéndose a otro objeto matemático distinto al que hoy en día asociamos a ese término. Para usar el término ‘determinante’ en su sentido actual habría que esperar a que el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857) leyera su *Essai sur les fonctions symétriques en la Académie des Sciences del Institute de France* y que publicaría bajo el título *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu’elles renferment* en 1815 [12]. Esta obra convertiría a Cauchy en el autor más prolífico de su época en relación a la teoría de determinantes y sería la obra más completa de su tiempo. De hecho, en ella aparecen las demostraciones de todos los resultados obtenidos hasta la fecha (ya que Cauchy no consideraba correctas algunas de las pruebas ya existentes) y un considerable número de resultados nuevos sobre menores y adjuntos, destacando el teorema de multiplicación de determinantes. Este teorema permite expresar el determinante de un producto como producto de determinantes y es comúnmente conocido co-

mo la fórmula de Cauchy-Binet para dos matrices rectangulares de órdenes transpuestos. Como curiosidad, indicar que el matemático y físico francés Jacques-Philippe-Marie Binet (1786–1856) llegó de manera independiente al mismo resultado en su *Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur applications à des considérations géométriques* [4], que presentó a la *Académie des Sciences* en la misma sesión que Cauchy en 1812.

Posteriormente, saldría a la luz la obra *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* en 1829 [13], también escrita por Cauchy. En ella se emplearía por primera vez el término ‘tableau’ al referirse a la matriz de coeficientes asociada a una forma cuadrática en  $n$  variables. En esa obra, se calculaban los autovalores de dicha matriz (cuadrada y definida) y aparecían los primeros resultados sobre diagonalización de matrices al expresar una forma cuadrática como suma de cuadrados. También se incluía en esta obra la noción de matrices similares, aunque sin dar nombre a dicha relación de equivalencia y demostrando el resultado principal para matrices similares en relación a la diagonalización de matrices y cálculo de autovalores: dos matrices similares tienen la misma ecuación característica, los mismos autovalores con la misma multiplicidad y, por ende, una es diagonalizable si y solo si lo es la otra. Otra propiedad básica de la diagonalización de matrices incluida en el trabajo comentado era la de que toda matriz simétrica real es diagonalizable.

El siguiente autor del que hablaremos en relación a los determinantes es el matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), quien publicaría tres trabajos sobre determinantes en el *Crelle's Journal* durante el año 1841 [37, 38, 39]. En ellos, dio la primera formalización algorítmica de la definición de determinante, admitiendo que los términos de un determinante pudiesen ser números o funciones. El trabajo de Jacobi fue esencial para la noción de determinante ya que dotaron al concepto de tal relevancia que se hizo ampliamente conocido. Ese mismo año, el matemático inglés Arthur Cayley (1821–1895) publicaría su artículo sobre la geometría de la posición [14] y ésta sería la primera aportación de la matemática inglesa a la teoría de determinantes. La importancia de esta publicación reside en que este trabajo introdujo la notación empleada en la actualidad para los determinantes: la estructura tabular o ‘array’ de datos delimitada por una línea vertical a cada lado del ‘array’.

Nótese que hemos hablado de la aparición del término ‘determinante’ pero no del término ‘matriz’, el cual aparecería casi cuatro décadas después de que Cauchy usase por primera vez el término ‘determinante’. No obstante, antes de que se llegase a darle el nombre de ‘matriz’ al objeto que hoy conocemos como tal, muchos matemáticos europeos estuvieron trabajando con este objeto de forma directa o indirecta (esto último al resolver sistemas de ecuaciones lineales). Al hablar de la evolución histórica del ‘determinante’ ya hemos comentado algunos de estos casos, pero no podemos pasar por alto en este trabajo uno de los tópicos principales al hablar de matrices: la denominada eliminación gaussiana.

Cuando expusimos en su momento la matemática china, ya hicimos referencia a cómo se dispuso de esta técnica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero no hemos indicado cómo apareció en la matemática europea y lo erróneo de su nombre. Un magnífico estudio sobre esta cuestión se debe a Grcar [33, 34]. A este respecto, el matemático y físico inglés Isaac Newton (1642–1727), cuando estaba revisando entre 1669 y 1670 una versión de un manual sobre álgebra que el impresor John Collins quería editar, insertó una anotación al margen indicando su preocupación sobre la carencia en todos los manuales de la época de un apartado explicando la resolución de sistemas de ecuaciones y su interés en completar esa laguna del conocimiento incluyendo un capítulo a la obra que se iba a editar. Sin embargo, al no llevarse a cabo la edición de este manual, Newton optó por comenzar a escribir un manuscrito que revisó repetidas veces y que quedó inconcluso, datando la última versión de 1684. Esta obra, que iba

a titularse *Arithmeticae Universalis*, no llegó a publicarse y Newton hizo entrega de sus notas de clase sobre álgebra a la Universidad de Cambridge, en la que había impartido la cátedra lucasiana de matemáticas hasta 1702 y que se basaron en los borradores de sus manuscritos. Su sucesor en la cátedra, William Whiston (1667–1752), editó las notas de Newton en latín bajo el título de su obra inconclusa en 1707 [62] tras dejar su vida académica y en la que aparecían sus explicaciones sobre cómo resolver los sistemas de ecuaciones tratando las ecuaciones dos a dos. No solo se exponía la regla correspondiente al método de eliminación o reducción (al que él llamó de ‘exterminación’) que es el que nos ocupa en relación a la evolución histórica de los conceptos de ‘matriz’ y ‘determinante’ que estamos considerando en el presente trabajo, sino que también incluía las reglas correspondientes a los métodos de igualación y sustitución. Todos estos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones estaban presentados para aplicar a sistemas de dos o más ecuaciones sin que éstas necesariamente tuvieran que ser lineales.

Aunque el trabajo de Newton es el primer texto de álgebra en las matemáticas europeas que abordó la explicitación de unas reglas para la resolución de sistemas de ecuaciones, las múltiples revisiones de Newton y su reticencia a que se publicasen sus notas (las primeras versiones de su *Arithmeticae Universalis* aparecieron sin autoría) llevaron a que se publicase previamente, en 1690, el *Traité d’Algebre* [70] del matemático francés Michel Rolle (1652–1719). En esta obra aparecería la primera descripción de la eliminación gaussiana bajo el nombre de método de sustitución y formulado específicamente para sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, los textos de álgebra que surgieron con posterioridad a los de Newton y Rolle tomaron como referencia el desarrollo hecho por Newton para la resolución de sistemas. De estas obras, caben destacar dos: el *A Treatise of Algebra* [71] del matemático inglés Thomas Simpson (1710–1761), que fue publicada en 1745 y que introdujo la regla de adición y sustracción de ecuaciones (i.e. combinaciones lineales de ecuaciones); y la del matemático francés Sylvestre François Lacroix (1765–1843) de 1804 [48], en la que por primera vez se usa el término ‘eliminación’ para referirse a este método.

En vista de lo anterior, cabría preguntarse cuál fue la aportación de Gauss al respecto del método de eliminación que lleva su nombre y cuyos orígenes en las matemáticas modernas se remontan a Newton y Rolle tal y como acabamos de exponer. Concretamente, la contribución de Gauss al método de eliminación (que él denominó como ‘*eliminationem vulgarem*’ en su obra de 1809 [31]) consistió en su uso para la resolución de las ecuaciones normales que llevan a soluciones aproximadas por mínimos cuadrados de sistemas lineales de ecuaciones y en la introducción de una notación y un procedimiento algorítmico para la eliminación simétrica que permitía una sistematización, simplificación y mayor velocidad en la realización de los cálculos (como puede verse en [32]), lo cual conllevó a su uso extendido por parte de todos los calculistas profesionales en el s. XIX y a la obtención de diferentes variantes algorítmicas del método de eliminación para la simplificación y aumento de velocidad en los cálculos. El más conocido de estas variantes es el denominado método de Gauss-Jordan que idearon de manera independiente el geodesta alemán Wilhelm Jordan (1842–1899) y el matemático luxemburgués Bernard-Isidore Clasen (1829–1902) en 1888 ([41] y [17], respectivamente).

Hecho este inciso en relación a la resolución de sistemas de ecuaciones (lineales), volvemos a la cuestión que nos ocupaba en relación al surgimiento y desarrollo de la noción de ‘matriz’, ya que la aparición de la noción de matriz y del álgebra de matrices permitió traducir toda la notación y procedimientos algorítmicos para la resolución de sistemas de ecuaciones, simplificando y automatizando aún más los procedimientos y cálculos involucrados.

Concretamente, hubo que esperar a 1850 [72] para que el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814–1897) acuñase finalmente el término ‘matriz’, que definió como una estructura tabular rectangular de términos de la que se puede obtener diversos determinantes como estruc-

turas tabulares cuadradas almacenadas en su interior. Cayley comprendería casi de inmediato la relevancia y significado del concepto de matriz que había introducido su amigo Sylvester, por lo que trabajó en esta noción publicando el artículo titulado *Remarques sur la notations de fonctions algébriques* en 1855 [15]. Esta nota introducía el concepto de inversa de una matriz y el de producto de dos matrices, relacionando la estructura matricial con una forma cuadrática y bilineal. Simultáneamente, en 1853, el matemático y físico irlandés William Rowan Hamilton (1805–1865) escribió sus *Lectures on Quaternions* [35], en la que haría uso del cálculo matricial para estudiar los cuaterniones y obtener para estos objetos varios resultados que serían formalizados para las matrices por Cayley en su memoria de 1858 [16].

Esta memoria se tituló *Memoir on the theory of matrices* y en ella no solo aparece la primera definición abstracta de matriz (mostrando cómo los ‘arrays’ que se habían estado utilizando hasta ese momento en matemáticas eran casos particulares de su concepto), sino que también incluye el primer tratamiento formal de las operaciones con matrices y sus principales resultados. Así, Cayley dio la definición algebraica de las siguientes operaciones: suma, resta y producto de matrices, producto de matriz por escalar e inversión de matrices. En el caso de la inversa de una matriz, la construyó explícitamente en términos de determinantes. Más aún, introdujo la notación matricial para escribir un sistema de ecuaciones lineales, representando las ecuaciones como filas y las incógnitas como columnas. En la obra comentada, Cayley demostró que dada una matriz de orden  $2 \times 2$ , dicha matriz anula a su polinomio característico. Aunque dejó indicada también la prueba para matrices  $3 \times 3$ , afirmó que no disponía de los requisitos necesarios para demostrar la propiedad considerando una matriz arbitraria de orden arbitrario  $n \times n$ . Este resultado se conoce como Teorema de Cayley-Hamilton porque, previamente al estudio de Cayley, Hamilton [35] describió una demostración de este resultado para orden  $4 \times 4$ . No obstante y como veremos en breve, habría que esperar al matemático alemán Ferdinand Georg Fröbenius (1849–1917) para disponer del resultado general para matrices de orden  $n \times n$ .

Aproximadamente una década más tarde, en 1870, el matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) escribe su *Traité des substitutions et des équations algébriques* [40], en el que aparece descrita por primera vez la forma canónica que lleva su nombre al trabajar con las sustituciones lineales sobre un cuerpo finito de orden primo.

En 1878, Fröbenius escribe su obra *Über lineare substitutionen und bilineare formen* [40], sin tener conocimiento del trabajo llevado a cabo por Cayley y que hemos comentado anteriormente. Esta obra se convertiría en uno de los principales referentes sobre la teoría de matrices. Aunque sin emplear el término ‘matriz’, Fröbenius trabajó con coeficientes de formas cuadráticas. También incluyó demostraciones de resultados fundamentales sobre matrices canónicas como representaciones de clases de equivalencia de matrices. A este respecto, mencionó explícitamente los trabajos previos de los matemáticos alemanes Leopold Krönecker (1823–1891) y Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) publicados en 1874 [46] y 1868 [82] respectivamente, pero indicando que eran casos particulares de los resultados que él había obtenido. Pero esta obra de Fröbenius no se limitó solo a las cuestiones ya indicadas, sino que incluía la demostración general del Teorema de Cayley-Hamilton, que solo había sido demostrada hasta orden  $4 \times 4$ . Además, este trabajo contenía la primera definición formal del rango de una matriz (usada cuando trabajaba con formas canónicas) y de matriz ortogonal.

No es hasta 1896 que Fröbenius tuvo conocimiento de la obra de Cayley en [16] sobre la teoría de matrices y es entonces que Fröbenius comenzó a emplear el término ‘matriz’. De este modo, su artículo de 1896 [26] incluía nuevamente una demostración general del Teorema de Cayley-Hamilton para matrices cuadradas de cualquier orden; atribuyendo el mérito de dicha demostración al propio Cayley, que como ya indicamos antes no había sido capaz de conseguirla.



Fröbenius también fue primordial en el estudio de las matrices positivas, puesto que sus artículos de 1908 [27] y 1909 [28] sobre este tipo de matrices contienen los resultados esenciales y fundamentales sobre éstas, incluso a día de hoy. Es más, la teoría sobre matrices positivas y matrices no negativas recibe el nombre de Teoría de Perron-Fröbenius ya que los dos artículos anteriores junto con el de 1912 [29] y el previo del matemático alemán Oskar Perron (1880–1975) publicado en 1907 [66], crean el cuerpo teórico de los resultados relativos a estos dos tipos de matrices, siendo el resultado principal el denominado Teorema de Perron-Fröbenius. La demostración para las matrices cuadradas reales de términos positivos se debe a Perron [66] que probó la existencia de un único autovalor real positivo (llamado raíz de Perron) que es mayor que el módulo de cualquier otro autovalor (incluidos los autovalores complejos) de la matriz y la existencia de un autovector asociado a este autovalor con todas sus coordenadas positivas. Posteriormente en 1912, Fröbenius [29] extendería el resultado de manera no trivial a cierto tipo de matrices no negativas: las matrices no negativas irreducibles, concepto que introdujo en ese trabajo. Debe tenerse en cuenta que los cuatro artículos indicados en el presente párrafo se consideran igualmente claves para el origen y estudio de los métodos iterativos de las ecuaciones lineales reales (véase Rheinboldt y Vandergraft [69]).

Otro concepto importante dentro del álgebra lineal es el de nulidad de una matriz de orden  $m \times n$ , que hoy en día podemos identificar con la dimensión del núcleo o espacio nulo de dicha matriz, pero que Sylvester introdujo y definió formalmente en 1884 [73] como un valor  $k$  tal que todos los menores de orden  $n - k + 1$  de la matriz se anulaban. Este concepto surge al estudiar propiedades invariantes en las matrices bajo ciertas transformaciones, esencialmente de tipo lineal. Una de las propiedades demostrada en ese trabajo era la ley de nulidad de Sylvester, según la cual la nulidad de una matriz está acotada superiormente por la nulidad del producto de esa matriz por cualquier otra por la que se pueda multiplicar y esta segunda nulidad está a su vez acotada superiormente por la suma de las nulidades de las dos matrices multiplicadas.

Con el comienzo del siglo XX debemos volver a tratar la noción de determinante. Aunque existe constancia de la existencia de una definición formal y rigurosa de la noción de determinante por parte de Weierstrass y de Krönecker desde mediados de la década de 1860 y de su uso en sus respectivas lecciones, la comunidad matemática en general tendría que esperar a 1903 para que dichas definiciones aparecieran en sus obras póstumas. En el caso de Weierstrass, el determinante se definía como función homogénea, lineal y normada tal y como aparecería en su *Zur Determinantentheorie* [84]. Por su parte, la definición de Krönecker sería publicada en *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* [47], como parte de las lecciones que impartía sobre determinantes, los cuales evaluaba usando la función delta de Krönecker que el creó y que resulta ser el primer tensor utilizado en las matemáticas. Con las dos publicaciones mencionadas, se da por lo general como completamente desarrollada la teoría moderna de determinantes. Sin embargo, la teoría de matrices requeriría de algo más de tiempo para disponer de una teoría completamente aceptada por la comunidad matemática (todo ello pese a que solemos definir los determinantes a partir de las matrices). En cualquier caso, los trabajos de matemáticos como Cayley, Fröbenius, Weierstrass y Krönecker fueron claves y esenciales para que los términos ‘matriz’ y ‘determinante’ fuesen de uso y práctica común en el campo de las matemáticas.

No queremos concluir el presente apartado sin hacer algunas indicaciones a las obras que entendemos sustentarían la teoría de matrices en las matemáticas actuales y la han convertido en una de las herramientas esenciales para la inmensa totalidad de ramas de las matemáticas. En primer lugar, habría que tener en cuenta la obra *Introduction to Higher Algebra* del matemático americano Maxime Bôcher (1867–1918) fechada en 1907 [5]. Posteriormente, aparecerían los tres textos más influyentes sobre álgebra matricial en la década de 1930, dos de ellos escritos por el

matemático inglés Herbert Westren Turnbull (1885–1961) en 1928 [75] y 1932 [76] y el tercero por el matemático neozelandés Alexander Craig Aitken (1895–1967) en 1939 [1]. Estas obras llevarían al punto culmen de la teoría de matrices: la publicación de *An Introduction to Linear Algebra* por el matemático ruso Leonid Mirsky (1918–1983) en 1955 [56]. Esta obra mostraría la importancia de la teoría de matrices dentro de las matemáticas y la posicionó como uno de los tópicos matemáticos esenciales para estudiantes universitarios de matemáticas.

### 2.3 Una visión de los “nombres” a lo largo del tiempo

En las Figuras 1 a 3 se pretende dar un rápido y breve repaso visual a la evolución histórica de los conceptos citados en el apartado anterior. Además, dicho gráfico permite observar cómo el auge en el estudio de las matrices y determinantes tuvo lugar durante los siglos XVIII y XIX.

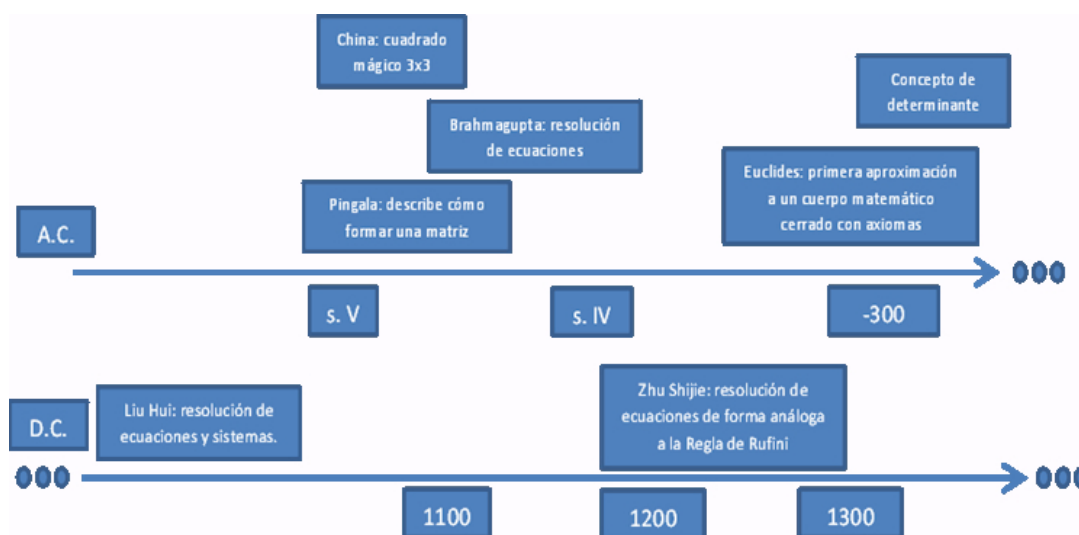


Figura 1: “Visión” de los “nombres” hasta 1400.

## 3 Algunos conceptos económicos que utilizan matrices

En la presente sección, nos centraremos en posibles aplicaciones de las matrices en el ámbito de la modelización de problemas económicos. Partiendo del hecho de que dichas aplicaciones pueden ser múltiples y variadas, nuestro objetivo solo es mostrar su utilidad en este campo sin llegar a ser exhaustivos. En este sentido y a modo de visión general previa, debe tenerse en cuenta, como ya se comentó en la introducción, que el álgebra matricial y la teoría de matrices pueden utilizarse en la resolución numérica tanto de sistemas de ecuaciones lineales como de ecuaciones diferenciales (ordinarias y en derivadas parciales). Además, las matrices surgen de forma natural y de manera directa o indirecta en múltiples campos de las ciencias experimentales, técnicas y sociales. En la presente sección expondremos cómo la teoría de matrices resulta una herramienta de gran utilidad para estudiar fenómenos económicos.

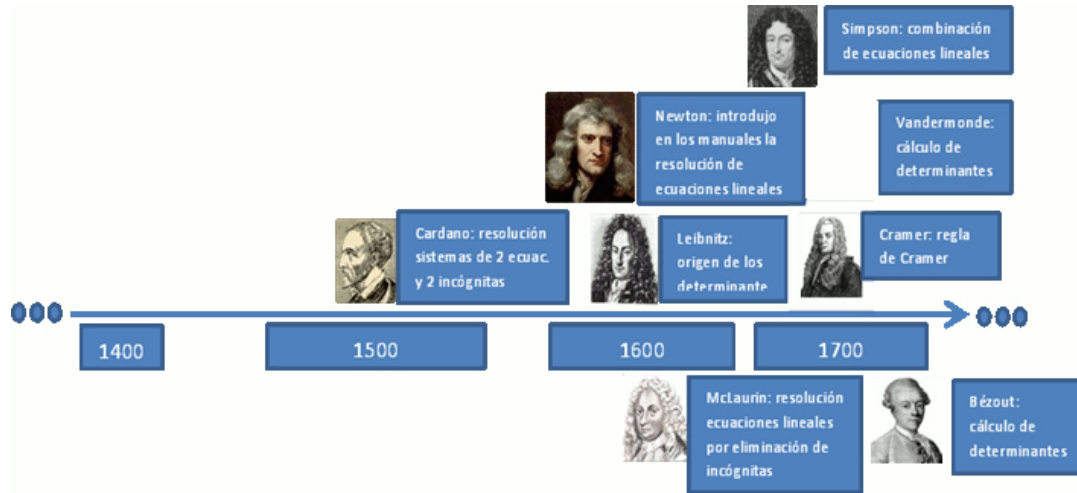


Figura 2: “Visión” de los “nombres” desde 1400 hasta 1800.

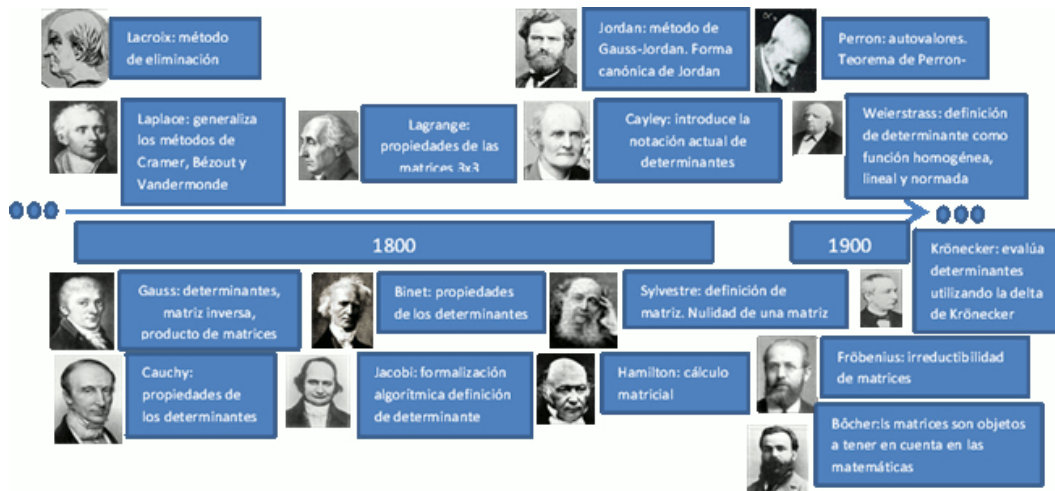


Figura 3: “Visión” de los “nombres” en 1800 y principios de 1900.

### 3.1 Análisis Input-Output

El economista ruso-americano Wassily Wassilyevich Leontief (1906–1999) introdujo y desarrolló los fundamentos del Análisis Input-Output en tres artículos claves que datan de 1936 [52], 1941 [53] y 1966 [54]. Llevó a cabo el desarrollo de esta herramienta para el estudio de las interrelaciones existentes entre los diferentes sectores económicos (o actividades económicas) en una economía moderna y para ello se valió del algebra matricial para medir la estructura de la misma. Tal fue la relevancia de la herramienta desarrollada y de su aplicación a problemas económicos que fue galardonado con el Premio Nobel en Ciencias Económicas en 1973.

Sin embargo y aunque Leontief es considerado como el padre del Análisis Input-Output, ha de tenerse en cuenta la existencia de otros autores anteriores que pueden considerarse como precursores de los trabajos de Leontief, ya que éstos habían expuesto parte de la infraestructura técnica que sustenta el Análisis Input-Output. En este sentido, la estructura básica de las tablas (matrices o ‘arrays’) input-output fue establecida por el economista francés François Quesnay (1694–1774) en su *Tableau Economique* en 1758 [67] y 1766 [68]. En esta obra se representaba, por primera vez, la relación entre las compras y las ventas de las industrias de una economía concreta. Dicha representación gráfica se llevaba a cabo mediante un ‘array’ en el que se representaban los valores numéricos de las compras y ventas realizadas y que se considera el germen de las matrices input-output (o matrices de transacciones) que son la herramienta básica de trabajo en el Análisis Input-Output.

No obstante, Quesnay solo mostraría la representación mediante una tabla y no daría una formulación teórica concisa. Precisamente esa fue la aportación del también economista francés Léon Walras (1834–1930), uno de los pioneros en la matemática económica y del desarrollo de la teoría del equilibrio general, en la que se engloba el Análisis Input-Output. En 1874, Walras [83] adaptó la obra de Quesnay e introdujo en el modelo las compras de los consumidores finales, además de dar la primera representación económica de una tecnología. Para ello, Walras usó un conjunto de coeficientes productivos para relacionar las cantidades necesarias del producto de cada sector para obtener una unidad de un producto concreto a niveles de producción total de dicho producto. Estos coeficientes coinciden, en lo esencial, con los coeficientes técnicos (o tecnológicos) que se usan en la actualidad en la matriz de coeficientes técnicos o matriz tecnológica.

El valor añadido que tuvo el trabajo de Leontief consistió en que su modelo simplificaba la formulación teórica del modelo de Walras por medio de dos hipótesis: considerar que el comportamiento de la tecnología y del mercado se mantiene constante en el tiempo. En base a estas hipótesis, los datos disponibles de un período temporal anterior podrían usarse para prever el comportamiento futuro de la economía y del mercado. Más concretamente, el comportamiento futuro de la economía se reducía a un producto de la matriz técnica de la economía y, por tanto, simplemente consistía en operaciones matriciales.

Los modelos input-output combinan las compras intermedias (entre sectores industriales) y las finales (a consumidores finales y gobierno), además de insertar las correspondientes ventas intermedias y finales. Precisamente, el Análisis Input-Output resulta ser uno de los modelos intersectoriales más populares en la actualidad. En este sentido, las agencias nacionales de estadísticas elaboran las tablas input-output de las economías nacionales y regionales en determinados períodos de años (actualmente cada lustro), usando un número limitado de sectores en función del nivel de agregación de los mismos. Más aún, la Organización de Naciones Unidas ha fomentado el uso del Análisis Input-Output como una herramienta útil y esencial para la planificación de la economía de países en vía de desarrollo, auspiciando un sistema estándar para las contabilidades económicas nacionales usando un modelo input-output (véase [63, 64, 65]).

Por todo lo anterior, el Análisis Input-Output tiene una amplia aceptación y uso en gran número de las ramas de las que consta la Economía. No obstante, su aceptación general no tuvo lugar hasta la década de 1950 con los adelantos en el software y equipos informáticos de modo que se pudiera empezar a manejar el volumen de datos almacenados en las tablas input-output y realizar de manera automática y rápida las operaciones con las mismas. A modo de ejemplo, queremos indicar algunos de los distintos ámbitos que emplean esta técnica matricial: sistemas de cuentas nacionales, elaboración de tablas input-output, economía medioambiental, análisis regional y multirregional, análisis input-output estocástico (donde los términos de la matriz input-output son variables estadísticas), equilibrio general aplicado, matrices de contabilidad social (SAM), política económica o análisis de la productividad, innovación y empleo.

El modelo básico del Análisis Input-Output se caracteriza por el estudio de los datos económicos de los sectores productivos existentes en una determinada región geográfica. Cada sector en la economía produce una serie de bienes a la vez que consume tanto sus productos como los producidos por otros sectores. En consecuencia, cada sector productivo es considerado tanto productor (y los bienes se denominan entonces ‘outputs’) como consumidor (denominándose ‘inputs’ los bienes). Estos flujos intersectoriales de compra y venta entre sectores productivos de una economía se miden en unidades monetarias en un período determinado de tiempo (que suele ser de un año). Estas mediciones pueden resumirse distribuyendo estos valores en una matriz, que se denomina tabla de flujos intersectoriales o matriz input-output de la economía. Esta matriz almacena toda esta información y resulta ser la herramienta esencial en el Análisis Input-Output. Con ella se puede generar toda la información necesaria de la economía, permitiendo prever el comportamiento de la misma en el futuro.

La construcción de la matriz de flujos intersectoriales de una economía con  $n$  sectores productivos se basa en situar las ventas del sector  $i$  al sector  $j$  en el término  $(i, j)$  de dicha matriz. En consecuencia, la fila  $i$  de la matriz viene a representar la distribución de las ventas realizadas por el sector  $i$  a los sectores (incluido él mismo) de la economía bajo estudio. Análogamente, si llevamos una interpretación por columnas de la matriz, la columna  $j$  representará las compras (consumo de producción) realizadas por el sector  $j$  a todos los sectores (incluido el consumo de su propia producción) de la economía. A los datos relativos a los flujos de producción entre los sectores productivos, podemos añadir los datos relativos de consumo de la producción de cada sector llevada a cabo por los consumidores finales (que vienen a ser los usuarios de los productos, el gobierno e incluso las exportaciones). Estos datos requieren la inclusión de columnas adicionales al modelo matricial que permitan registrar las ventas del sector en cuestión a cada uno de los tres colectivos indicados. Debe tenerse en cuenta que solo se añaden columnas y no filas, ya que los consumidores finales no son sectores productivos y por tanto no producen un producto final que puedan vender y que sea consumido por otros sectores o alguno de los colectivos considerados como consumidores finales. De este modo, pasamos de una matriz cuadrada que representa las transacciones entre sectores productivos (la matriz de flujos intersectoriales) a una segunda matriz rectangular en la que aparecen los consumidores finales de los productos realizados por los sectores productivos. Los consumidores finales suelen representarse conjuntamente en una única columna, denominada de demanda final (aunque podría desagregarse la información en columnas independientes llegado el caso). La matriz rectangular obtenida al considerar la columna de demanda final se denomina matriz de transacciones.

Si definimos la matriz de flujos intersectoriales como  $Z = [Z_1 | \dots | Z_n]$  por sus columnas  $Z_i$  y denotamos respectivamente por  $Y$  y por  $X$  al vector de demanda final y al vector de producción total de la economía, entonces los términos  $X_i$  e  $Y_i$  son respectivamente la producción total y demanda final del sector  $i$ . En consecuencia, el modelo input-output puede expresarse haciendo

uso del Álgebra Lineal por medio de la siguiente ecuación vectorial:

$$X = Z_1 + \cdots + Z_n + Y. \quad (1)$$

Desafortunadamente, la matriz de transacciones se limita a describir el comportamiento actual de la economía como si de una foto fija se tratase. Para prever los posibles cambios en la producción final de cada sector productivo (es decir, el vector  $X$ ) en función de los cambios que tengan lugar sobre la demanda final (el vector  $Y$ ), debemos considerar una matriz cuadrada  $A$  en la que intervengan todos estos datos. Esto se consigue relativizando la matriz de flujos intersectoriales y obteniendo la denominada matriz tecnológica o de coeficientes técnicos. En esta matriz, el término  $(i, j)$  representa el valor del bien comprado al sector  $i$  por el sector  $j$ , pero relativizado por unidad monetaria respecto de la producción final del sector  $j$ . Por tanto, las columnas de la matriz  $A$  se obtienen con una simple reescala de las columnas de la matriz  $Z$ :

$$A_j = \frac{1}{X_j} \cdot Z_j$$

Como consecuencia, la matriz  $A$  nos proporciona información sobre la estructura interna de la economía y podemos usarla tanto para comparar distintos períodos temporales de una economía concreta como para comparar distintas economías entre sí. Haciendo uso de la matriz  $A$  de coeficientes técnicos, el modelo input-output puede representarse mediante la siguiente ecuación matricial (o equivalentemente sistema de ecuaciones lineales):

$$A \cdot X + Y = X$$

reflejando las relaciones existentes entre el vector  $X$  de producción total y el vector  $Y$  de demanda final:

$$Y = (A - Id) \cdot X \quad \text{y} \quad X = (A - Id)^{-1} \cdot Y,$$

donde  $Id$  es la matriz identidad de orden  $n$  y la potencia  $-1$  representa la inversa matricial. Desde un punto de vista puramente económico, las matrices tecnológicas  $A$  para las cuales existe la inversa  $(A - Id)^{-1}$  son de gran interés y reciben el nombre de matrices productivas. El interés de dichas matrices radica en que una economía con tal matriz tecnológica puede producir una producción total por parte de los sectores productivos que satisfaga cualquier demanda final por parte de los consumidores finales. Una propiedad tan relevante como esta en el ámbito del Análisis Input-Output puede ser traducida y tratada como un simple problema de álgebra matricial con las técnicas propias del Álgebra Lineal.

### 3.2 Teoría de Juegos

Como disciplina tanto matemática como económica, la Teoría de Juegos se ocupa de la modelización y análisis de situaciones de conflicto y cooperación entre decisores racionales e inteligentes (véase [58]). Más concretamente, estudia el comportamiento racional en la toma de decisiones de dos o más agentes (denominados jugadores) a la hora de afrontar una situación de interacción (que se denomina juego), teniendo en cuenta que tanto las decisiones propias como las del resto de jugadores afectan en la toma de decisión.

En un juego, cada jugador busca la estrategia óptima para alcanzar sus objetivos y tomar las decisiones en base a dicha estrategia que también dependerá del comportamiento previsto de los otros jugadores y del que está observando durante el propio juego con las correspondientes

adaptaciones a la estrategia de partida. Para ello, el jugador debe ponderar tanto el nivel de coincidencia como de enfrentamiento de sus objetivos con respecto a los de los demás jugadores; una vez realizada esta ponderación y en base a la misma, el jugador tendrá que decidir si le interesa cooperar o enfrentarse con todos o solo con algunos de los jugadores.

El objetivo de un juego es buscar una solución óptima del mismo por medio de una descripción de las decisiones que debería tomar cada jugador en base a las acciones de todos los jugadores y determinando cuál sería el resultado teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles en la toma de decisión.

Por tanto, un juego viene definido simplemente por un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (llamados estrategias) para esos jugadores y una especificación de recompensas para las posibles combinaciones de estrategias.

La ventaja de la Teoría de Juegos como herramienta de análisis en la toma de decisiones reside en que existen muchas situaciones basadas en la interacción entre agentes que, a priori, pueden no tener relación alguna y habría que resolver específicamente; sin embargo, cuando se modeliza como un juego resulta que comparten una misma estructura que basta analizar una única vez para llevar a cabo la toma de decisiones independientemente del problema real que modeliza y que, tras resolverlo teóricamente, puede trasladarse la solución a la situación concreta para dar respuesta a nuestro problema del mundo real.

Dentro de la Teoría de Juegos, surge una división de manera natural que los diferencia entre los no cooperativos y los que sí lo son. Desde la perspectiva más clásica, los juegos cooperativos son aquellos que permiten la posibilidad de llegar a acuerdos vinculantes entre jugadores mediante mecanismos preestablecidos (véase [36]). Sin embargo, en los juegos no cooperativos, cada jugador debe centrarse única y exclusivamente en su beneficio personal, estando habilitadas todas las posibilidades de cooperación entre jugadores (véase [77]).

Desde sus comienzos, la Teoría de Juegos se plantea como herramienta para comprender cómo funcionan los fenómenos sociales y económicos. Como muestra de esta afirmación, indicaremos algunos de los trabajos aparecidos con anterioridad al s. XX y que pueden considerarse precursores de la Teoría de Juegos. En este sentido, el matemático francés Pierre-Rémond de Montmort (1678–1619) publicaría en 1713 [57] un ensayo en el que aparecen por primera vez el concepto de estrategia mixta y la regla minimax en el contexto de los juegos de azar.

En 1785 [18], el político y matemático francés Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet (1743–1794), publicó su principal obra sobre sistemas electorales, en el que introduce el Teorema del Jurado y la Paradoja de Condorcet, según las cuales el criterio de preferencia de la mayoría no permite obtener un vencedor claro. De hecho, también se incluye en la obra el denominado método de Condorcet para seleccionar al candidato que ganaría por mayoría en cualquier emparejamiento contra otro candidato, si existe tal candidato. Esta técnica es esencial en Teoría de Juegos cuando se quieren establecer preferencias para seleccionar candidatos. De manera paralela, en 1770, el matemático y político francés Jean-Charles de Borda (1733–1799) expone su método de elección de un único candidato vencedor mediante ordenación de los candidatos por cada votante según sus preferencias y que se conoce como recuento de Borda [6].

En el campo de la Economía, la Teoría de Juegos aparece con el tratamiento matemático de los problemas de duopolios y oligopolios. En este sentido, la primera referencia habitualmente referida se debe al matemático francés Antoine Augustin Cournot (1801–1877), quien desarrolló en 1838 [19] un modelo en competición imperfecta entre dos empresas (duopolio) que buscan un equilibrio con sus decisiones. Posteriormente se iría complicando el modelo con el estudio realizado por autores posteriores para corregir las problemáticas que iban surgiendo a partir de dicho modelo y sus modificaciones. Ejemplo de ello son las obras de los economistas y matemáticos Joseph-

Louis-François Bertrand (1822–1900) y Francis Ysidro Edgeworth (1845–1926). Precisamente este último publicó en 1881 la obra *Mathematical Psychics* [22], en la que se hacía un estudio de los equilibrios competitivos en base a un principio de incertidumbre que iba reduciéndose a media que aumentaba el número de jugadores. Este tratado es el más relevante del s. XIX sobre Teoría de Juegos, llegando a ser la primera aparición de muchas de las nociones y procedimientos que posteriormente en el s. XX se volverán esenciales en dicho campo.

Con el inicio del s. XX comenzarán las primeras aportaciones en publicaciones matemáticas de la Teoría de Juegos, estableciéndose resultados formales y buscando el formalismo de los conceptos y procedimientos. Será el matemático y lógico alemán Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953) quien tenga el honor de inaugurar este período con su artículo de 1913 [85] sobre el juego del ajedrez para el estudio de las posiciones ganadoras en dicho juego y de la correcta definición de estas posiciones desde la perspectiva de la matemática formal. Pese a contextualizar el artículo con el caso del ajedrez, en verdad, la formulación y demostraciones que se presentan eran válidas para cualquier juego con dos jugadores sin movimientos de oportunidad y con intereses completamente enfrentados, permitiendo realizar infinitos movimientos, aunque en una cantidad finita de posiciones.

Posteriormente, los matemáticos húngaros Dénes König (1884–1944) y László Kalmár (1905–1976) complementarían dicho trabajo. El primero [45] generaliza el estudio permitiendo infinitas posiciones en el juego, pero solo pudiendo alcanzar una cantidad finita de posiciones desde cada posición. El segundo [43] da un paso más e incluye la posibilidad de no solo tener infinitas posiciones, sino que también se puede alcanzar un número infinito de posiciones desde cada posición.

Entre 1921 y 1927, el matemático y político francés Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956) establece los fundamentos de la teoría de juegos psicológicos [7, 8, 9, 10], dando la primera formulación matemática moderna de estrategia mixta, de estrategia pura y de búsqueda de la solución minimax para juegos simétricos de dos jugadores con intereses completamente contrapuestos y con 3 o 5 estrategias para cada jugador. Posteriormente, en 1928 [80], el matemático austrohúngaro (nacionalizado estadounidense) John von Neumann (1903–1957) demuestra el teorema minimax independientemente del número de estrategias para cada jugador (que sí ha de ser una cantidad finita). Este trabajo incluye la definición formal de estrategia usada actualmente e introduce la forma extensiva de un juego como árbol lógico enraizado (lo que permitirá el tratamiento matricial del juego con las matrices de adyacencia e incidencia del árbol).

La siguiente aportación será la que se acepta como la obra clave y referencia básica de la Teoría de Juegos: el libro *Theory of Games and Economic Behavior* que von Neumann publica en 1944 [81] conjuntamente con el economista alemán Oskar Morgenstern (1902–1977). Esta obra aportó el primer tratamiento riguroso y exhaustivo de los conceptos de juego, estrategia y resolución del mismo, así como de la forma en que las preferencias de los jugadores podían ser representadas. Además de los juegos donde los jugadores tienen intereses completamente contrapuestos (i.e. juegos no cooperativos de suma nula), la obra también consideraba los juegos en los que la ganancia de un jugador no conlleva necesariamente pérdida para el otro (i.e. los juegos cooperativos de suma nula con recompensa transferible). Es más, la Teoría de Juegos permitió que la obra desarrollara una teoría axiomática de la utilidad.

Debido al impacto de esta obra entre matemáticos y economistas, las décadas de 1950 y 1960 fueron un período de investigación intensa y exhaustiva en Teoría de Juegos, con la aparición de numerosos artículos teóricos y aplicados (estos últimos sobre todo a cuestiones económicas). En este sentido, destaca la obra del matemático estadounidense John Forbes Nash Jr. (1928–2015) con el estudio de juegos no cooperativos comenzado en su tesis doctoral [59] en 1950, en la que se



introdujo la noción de punto de equilibrio (ahora llamado equilibrio de Nash) probando su existencia, y la reducción del estudio de los juegos cooperativos mediante los juegos no cooperativos [60, 61]. También destaca el modelo teórico desarrollado por el matemático polaco-estadounidense Melvin Dresher (1911–1992) y el matemático estadounidense Merrill Meeks Flood (1908–1991) en 1950 para el juego de cooperación y conflicto conocido como el “Dilema del Prisionero” (véase [24, 21]), cuyo formato actual y nombre lo recibió del matemático estadounidense Albert William Tucker (1905–1995) en 1950 [74].

Es más, la Teoría de Juegos fue clave durante la Guerra Fría, conllevando una amplia investigación que hoy en día es fundamental y referencia básica, como por ejemplo el desarrollo de los juegos repetidos o iterados desarrollados en el seno de la Agencia de Desarme y Control de Armas de los Estados Unidos para las negociaciones de control armamentístico (véase [2]).

Hoy en día el reconocimiento de la Teoría de Juegos se ha visto recompensado con la concesión del Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel a investigaciones en el campo del Análisis Económico que se basaban en el uso de la Teoría de Juegos. Así, en 1994, fueron premiados el economista húngaro John Charles Harsanyi (1920–2000), el ya mencionado John F. Nash y el economista alemán Reinhard Justus Reginald Selten (1930–2016) por sus aplicaciones de la Teoría de Juegos al estudio de los equilibrios generales de tipo Nash y sus usos en Economía. Posteriormente, en 2005, los premiados serían el economista estadounidense Thomas Crombie Schelling (1921–2016) y el matemático israelí Robert John Aumann (n. 1930): el primero por su estudio de modelos dinámicos para analizar la cooperación y conflicto, dando lugar a la Teoría de Juegos evolutiva; y el segundo por sus aportaciones al estudio de los equilibrios. Dos años después, en 2007, los matemáticos y economistas estadounidenses Leonid Hurwicz (1917–2008) y Roger Bruce Myerson (n. 1951) recibieron el galardón, junto con el economista estadounidense Eric Stark Maskin (n. 1950), por establecer los fundamentos de la teoría de diseño de mecanismos, una rama de la Teoría de Juegos que en ocasiones ha sido denominada Teoría de Juegos Inversa, pues busca establecer las reglas de un posible juego que sea compatible con las interacciones entre jugadores y las soluciones que se desean. Fue en 2012 cuando nuevamente la Teoría de Juegos fue premiada en las personas de los matemáticos y economistas estadounidenses Lloyd Stowell Shapley (1923–2016) y Alvin Elliot Roth (n. 1951) debido a sus contribuciones en la teoría de localizaciones estables y la práctica de diseño de mercados, basada en el uso de herramientas de juegos cooperativos y no cooperativos. En 2014, el economista francés Jean Tirole (n. 1953) recibió el Nobel por su análisis del poder de mercado de los oligopolios y cómo éstos debieran ser regulados, utilizando para ello la Teoría de Juegos, cuyo uso introdujo en la organización industrial. Nuevamente la Teoría de Juegos resultó premiada cuando el galardón fue concedido a los matemáticos y economistas Oliver Hart (n. 1948) y Bengt Holmström (n. 1949), estadounidense el primero y sueco el segundo, por sus aportaciones a la teoría de los contratos (Hart por sus aportes esenciales en la teoría de contratos incompletos, que permiten determinar cuál de los actores en el contrato ha de tomar la decisión en cada circunstancia acontecida estableciendo herramientas teóricas para ello y Holmström por establecer cómo diseñar un contrato óptimo para afrontar el problema del agente-principal y evitar que un agente realice acciones en contra de su jerarca). También en 2017, los trabajos del galardonado, el economista estadounidense Richard H. Thaler (n. 1945), se centraban en el campo de la teoría de juegos conductual, incorporando hipótesis psicológicas realistas para analizar la toma de decisiones en economía y mostrar el modo en que una serie de rasgos humanos afectan sistemáticamente tanto a las decisiones individuales como a los rendimientos del mercado. Los últimos galardonados con este premio en el ámbito de la teoría de juegos han sido el economista estadounidense Robert B. Wilson (n. 1937) y el matemático y economista estadounidense Paul R. Milgrom (n. 1948),

ambos especialistas de esta disciplina y que fueron premiados por sus aplicaciones a la teoría de subastas (una subdisciplina de la teoría de juegos) y diseñar matemáticamente nuevos formatos de subasta.

En un juego, los jugadores deben hacer uso de estrategias, las cuales no son más que planes de acción para tomar decisiones en el futuro. Cada posible combinación de estrategias en el juego tiene asociado un peso indicando la recompensa (que se mide en beneficios o pérdidas) para los jugadores. La expresión tradicional de estas recompensas correspondía al uso de una matriz, denominada *matriz de pagos* o *de recompensas*, en las que se recogen todas las posibles estrategias que puede emplear un jugador con sus correspondientes recompensas. Esta forma, denominada *forma normal* o *estratégica* del juego, facilita la identificación tanto de las estrategias estrictamente dominadas (las que pierden siempre) como de los equilibrios de Nash en dichos juegos. Para usar este tipo de representación, se parte del hecho que los jugadores actúan en simultáneo desconociendo las elecciones que van a tomar los otros jugadores. De hecho, la formulación para  $N$  jugadores parte del hecho que cada combinación de estrategias de los  $N$  jugadores viene dada por una  $N$ -tupla en la que la recompensa del jugador  $i$ -ésimo aparece en la coordenada  $i$ -ésima de la tupla. En concreto, cuando tenemos dos jugadores, aparece una distribución matricial en el sentido habitual en el que las filas registran las estrategias del jugador 1 y las columnas, las del jugador 2; tal y como ilustra la Tabla 1.

Cuadro 1: Ejemplo de juego en forma normal (matricial) para dos jugadores.

Jugador 1 / Jugador 2	Estrategia A de Jugador 2	Estrategia B de Jugador 2
Estrategia A de Jugador 1	(4,4)	(2,3)
Estrategia B de Jugador 1	(3,2)	(1,1)

Si el juego considera más de dos jugadores, podemos volver a obtener una expresión normal (matricial) en la que las filas representan las estrategias de un jugador fijado y las columnas registran todas las combinaciones de estrategias que pueden realizar el resto de jugadores, tal y como puede observarse en la Tabla 2.

Cuadro 2: Matriz de un juego en forma normal desde la perspectiva de un jugador.

Jugador 1 / Resto Jugadores	Combinación A resto jugadores	Combinación B resto jugadores	Combinación C resto jugadores
Estrategia A de Jugador 1	(4,4,4)	(2,3,2)	(1,2,1)
Estrategia B de Jugador 1	(3,2,3)	(2,1,1)	(1,1,1)

Ejemplo de los juegos que pueden expresarse en forma normal es el caso de los juegos bipersonales finitos de suma nula: dos jugadores que disponen de un número finito de estrategias y tal que las coordenadas de toda 2-tupla en la matriz de pago suman 0. En estos juegos, solo un jugador puede salir beneficiado, obteniendo su beneficio a expensas del otro jugador. Ese es el caso del ajedrez, las damas, el go o el juego “piedra–papel–tijeras”. En este último juego existen tres estrategias posibles para cada jugador, siendo su expresión matricial la que aparece en la

Tabla 3.

Cuadro 3: Matriz de pagos para el juego “piedra–papel–tijeras”.

Jugador 1 / Jugador 2	Jugador 2 saca PIEDRA	Jugador 2 saca TIJERAS	Jugador 2 saca PAPEL
Jugador 1 saca PIEDRA	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
Jugador 1 saca TIJERAS	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
Jugador 1 saca PAPEL	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Este juego no tiene ningún equilibrio de estrategia pura de Nash ya que no existe estrategia que asegure minimizar las pérdidas, puesto que cualquier estrategia de este juego vence a una segunda estrategia y es vencida por una tercera. Esto puede observarse directamente en la matriz porque, para cada fila (resp. columna), la primera coordenada (resp. la segunda) de los pagos no es siempre mayor o igual que la segunda (resp. la primera). Por lo tanto, el jugador no puede elegir una estrategia que le asegure ganar o, al menos, que sus posibles ganancias sean mayores que sus posibles pérdidas.

Para disponer de equilibrios del tipo antes mencionado en un juego de las características ya vistas, sería necesario bien disponer de filas (y/o columnas) con una mayor cantidad de 1 que de -1 en la coordenada de ese jugador o bien tener pesos cuyas coordenadas no se limiten a valores de  $\mathbb{Z}_3$ ; en este último caso, se podría ver si una estrategia es más o menos beneficiosa según le dé al jugador mayores o menores posibilidades de ganancias. Así, un ejemplo de estos últimos sería un juego cuya forma normal viniese dada por la Tabla 4.

Cuadro 4: Juego con pesos tomando valores enteros.

Jugador 1 / Jugador 2	Estrategia <i>A</i> de Jugador 2	Estrategia <i>B</i> de Jugador 2	Estrategia <i>C</i> de Jugador 2
Estrategia 1 de Jugador 1	(30,-30)	(-10,10)	(20,-20)
Estrategia 2 de Jugador 1	(10,-10)	(20,-20)	(-20,20)

En el caso de la estrategia 1 del jugador 1, tiene la opción de ganar 30 frente a la de perder 20; mientras que en la estrategia 2, ha de comparar una ganancia de 20 frente a una pérdida también de 20. En consecuencia, la estrategia 1 parece la más aconsejable, puesto que además presenta mismas posibilidades de ganar que de perder (2 a 1) y tiene mayor margen de ganancias. Sin embargo, el jugador 2 debería elegir la estrategia *C*, puesto que la opción *B* conlleva un menor margen de ganancias con el mismo margen de pérdidas y la opción *A* siempre le causa pérdidas. Por tanto, el punto de equilibrio usando estrategia pura vendría dado por la elección de la estrategia 1 por el jugador 1 y de la estrategia *C* por el jugador 2.

El ejemplo clásico para explicar los equilibrios puros en los juegos consiste en el “Dilema del Prisionero”. En este juego, los jugadores son dos personas detenidas que están aisladas una de la otra y se les ofrece a cada una denunciar a la otra para reducir su condena, ya que sus testimonios son necesarios para sustentar las pruebas disponibles. Los dos detenidos podrían cooperar, con lo que sus condenas serían menores por ausencia de pruebas para el delito principal. La matriz de pagos de este juego sería la dada en la Tabla 5.

Cuadro 5: Forma normal del “Dilema del Prisionero”, considerando la coordenada  $i$  como el número de años de condena que le corresponderían al jugador  $i$ .

Persona 1 / Persona 2	Persona 2 coopera	Persona 2 denuncia
Persona 1 coopera	(1,1)	(3,0)
Persona 1 denuncia	(0,3)	(2,2)

Ante esta situación, cada detenido tiene como opción callarse (y cooperar con su compañero) o denunciarlo. Si coopera, el detenido tendrá que ir a la cárcel entre 1 y 3 años, dependiendo respectivamente de que su compañero también se calle o de que, por el contrario, lo denuncie. Sin embargo, si el detenido denuncia, entonces podría quedar libre y toda la condena iría al otro detenido. Por tanto, la mejor opción para cualquiera de los dos detenidos es la denuncia, ya que: a) si el otro coopera, él se irá libre; y b) si el otro también denuncia, entonces verá reducida su condena de 3 años a solo 2. Es decir, el punto de equilibrio se tiene en la denuncia mutua.

## 4 Conclusiones

En este trabajo hemos hecho un recorrido por los principales eventos e hitos en la aparición y formalización de los conceptos de matriz y determinante, mostrando las dificultades que han acarreado la formalización y correcto uso de estos conceptos, mostrando además su aparición desde mucho tiempo atrás en varias civilizaciones antiguas y desde una perspectiva más aplicada y basada en la búsqueda de un procedimiento que les permitiese resolver ciertos problemas de índole económico. En este sentido, hemos visto que la aplicación de matrices (aunque no recibieran ese nombre) para la resolución de problemas económicos ya se llevaba a cabo en civilizaciones como las existentes en la Antigua India y China; aunque siempre usando dichas nociones de manera implícita. De este modo, hemos expuesto cómo una necesidad práctica conllevaba la aparición de un procedimiento matemático para su resolución basado en herramientas teóricas potentes y actuales; aunque sin formalizar su fundamentación. Hecho esto hemos revisado las distintas etapas históricas que han tenido lugar para el surgimiento de las nociones de determinante y matriz. Con ello, se ha podido constatar la consolidación de las matemáticas occidentales europeas desde la perspectiva del álgebra matricial y, por extensión, lineal, convirtiéndose en herramienta esencial para el conocimiento matemático (tanto teórico como aplicado) de los siglos XX y XXI.

Siguiendo a la exposición histórica del Álgebra Lineal, hemos descrito varios problemas económicos que pueden modelizarse por medio de la teoría de matrices y sus operaciones. En este sentido, hemos tratado tanto el Análisis input-output como la Teoría de Juegos para ejemplificar problemas económicos cuyo tratamiento estuviese fuertemente basado en el uso de matrices.

En vista de todo lo comentado, creemos que hemos mostrado la fuerte vinculación existente entre el álgebra matricial (y lineal) y un buen número de problemas económicos, resultando una herramienta esencial para el tratamiento de problemas en las Ciencias Económicas, en particular, y en las Sociales, en general.

## Referencias

- [1] Aitken, A.C. *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1939. MR0000217.

- [2] Aumann, R.J.; Maschler, M.B.; Stearns, R.E. *Repeated games with incomplete information*, MIT Press, Cambridge, 1995. MR1342074.
- [3] Bézout, E. *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1764** (1764), 288–338.
- [4] Binet, J.P.M. *Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur applications à des considérations géométriques*, J. Éc. Polytech. **9** (1813), 280–302.
- [5] Bôcher, M. *Introduction to Higher Algebra*, Macmillan, Nueva York, 1907.
- [6] Borda, J.C. *Mémoire sur les élections au scrutin*, Hist. Acad. Roy. Sci. **1781** (1784), 657–664.
- [7] Borel, E. *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, Compt. Rend. Hebd. Séances Acad. Sci. **173** (1921), 1304–1308.
- [8] Borel, E. *Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs*, en: E. Borel, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, 3e édition, Librairie Scientifique J. Hermann, Paris, 1924, pp. 204–224.
- [9] Borel, E. *Un théorème sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche*, C. R. Acad. Sci. **183** (1926), 925–927, 996.
- [10] Borel, E. *Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu*, Compt. Rend. Hebd. Séances Acad. Sci. **184** (1927), 52–54.
- [11] Cardano, G. *Artis magna, sive de regulis algebraicis*, Johannes Petreius, Nuremberg, 1545.
- [12] Cauchy, A.L. *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, J. Éc. Polytech. **10** (1815), 29–112.
- [13] Cauchy, A.L. *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exer. Math. **4** (1829), 140–160.
- [14] Cayley, A. *A theorem in the geometry of position*, Cambridge Mathematical Journal **II** (1841), 267–271.
- [15] Cayley, A. *Remarques sur la notations de fonctions algébriques*, Crelle's J. **50** (1855), 282–285. Doi: 10.1515/cr11.1855.50.282. MR1578946.
- [16] Cayley, A. *A memoir on the theory of matrices*, Philos. Trans. Roy. Soc. London **148** (1858), 17–37, Doi: 10.1098/rstl.1858.0002.
- [17] Clasen, B.I. *Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **12** (1888), 251–281.
- [18] De Condorcet, M. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprinta Real, Paris, 1785.

- [19] Cournot, A. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, L. Hachette, París, 1838.
- [20] Cramer, G. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Frères Cramer, Ginebra, 1750.
- [21] Dresher, M. *The mathematics of games of strategy: Theory and applications*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1961. MR0671740.
- [22] Edgeworth, F.Y. *Mathematical Psychics*. Kegan Paul & Co., Londres, 1881.
- [23] Fedriani, E.M.; Martín, A.M.; Tenorio, A.F. *Bases económicas en la constitución de los sistemas de numeración y sus operaciones*, en: V. Guirao & V.J. Cano (eds.), *Anales de Economía Aplicada*, Vol. XX, Delta Publicaciones, La Laguna, 2006, 25 pp.
- [24] Flood, M.M. *Some experimental games*, *Management Sci.* **5** (1958), 5–26, Doi: 10.1287/mnsc.5.1.5. MR0097986. Previamente publicado como memorandum en M.M. Flood, *Some experimental games*. Research Memorandum RM-789, RAND Corporation, Santa Mónica, 1952.
- [25] Fröbenius, G. *Über lineare substitutionen und bilineare formen*, *Crelle's J.* **84** (1878), 1–63, Doi: 10.1515/crelle-1878-18788403.
- [26] Fröbenius, G. *Über vertauschbare matrizen*, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **1896** (1896), 601–614.
- [27] Fröbenius, G. *Über Matrizen aus positiven Elementen, 1*, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **1908** (1908), 471–476.
- [28] Fröbenius, G. *Über Matrizen aus positiven Elementen, 2*, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **1909** (1909), 514–519.
- [29] Fröbenius, G. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **1912** (1912), 456–477.
- [30] Gauss, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae*, Apud G. Fleischer, Leipzig, 1801.
- [31] Gauss, C.F. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Perthes et Besser, Hamburgo, 1809.
- [32] Gauss, C.F. *Disquisitio de elementis ellipticis palladis*, *Commentat. Soc. Regiae Sci. Gott. Recent.* **1** (1811), 3–26.
- [33] Grcar, J.F. *How ordinary elimination became Gaussian elimination*, *Historia Math.* **38** (2011), 163–218, Doi: 10.1016/j.hm.2010.06.003. MR2775854.
- [34] Grcar, J.F. *Mathematicians of Gaussian elimination*, *Notices Amer. Math. Soc.* **58** (2011), 782–792. MR2839923.
- [35] Hamilton, W.R. *Lectures on quaternions*, Hodge and Smith editors, Dublín, 1853.
- [36] Harsanyi, J.C.; Selten, R. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press, Cambridge, 1988. MR0956053.

- [37] Jacobi, C.G.J. *De Formatione et Proprietatibus Determinantium*, Crelle's J. **22** (1841), 285–318, Doi: 10.1515/crll.1841.22.285.
- [38] Jacobi, C.G.J. *De Determinantibus functionalibus*, Crelle's J. **22** (1841), 319–359, Doi: 10.1515/crll.1841.22.319.
- [39] Jacobi, C.G.J. *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum*, Crelle's J. **22** (1841), 360–371, Doi: 10.1515/crll.1841.22.360.
- [40] Jordan, C. *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, París, 1870. MR1188877.
- [41] Jordan, W. *Handbuch der Vermessungskunde*, J.B. Metzler, Stuttgart, 1888.
- [42] Joseph, G.G. *La Cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas*, Editorial Pirámide, Madrid, 1996.
- [43] Kalmár, L. *Zur Theorie der abstrakten Spiele*, Acta Sci. Math. (Szeged) **4** (1928–1929), 65–85.
- [44] Kline, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.
- [45] König, D. *Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche*, Acta Sci. Math. (Szeged) **3** (1927), 121–130.
- [46] Krönecker, L. *Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1874** (1874), 59–76.
- [47] Krönecker, L. *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten*, Teubner, Leipzig, 1903.
- [48] Lacroix, S.F. *Complément des Éléments d'algèbre, a l'usage de l'École centrale des quaternations*, Courcier, París, 1804.
- [49] Lagrange, J.L. *Sur l'attraction des spheroides elliptiques*, Mém. Acad. Roy. Sci. Berlin **1773** (1773), 121–148.
- [50] Laplace, P.S. *Recherches sur le calcul integral et sur le systeme du monde*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1772**, 2e partie (1772), 267–376.
- [51] Leibniz, G.W. *Letter to L'Hopital, VI, Hannover, 28 April 1693*, en: G.I. Gerhardt (ed.), Leibnizens mathematische Schriften, Part I, Volume 2, Berlin, 1850, pp. 238–241.
- [52] Leontief, W.W. *Quantitative input-output relations in the economic system of the United States*, Rev. Econ. Statistics **18** (1936), 105–125, Doi: 10.2307/1927837.
- [53] Leontief, W.W. *The Structure of the American Economy, 1919-1929*, Harvard University Press, Cambridge, 1941.
- [54] Leontief, W.W. *Input-Output Economics*, Oxford University Press, Nueva York, 1966.
- [55] Maclaurin, C. *Treatise of Algebra*, Millar & Nourse, Londres, 1748.

- [56] Mirsky, L. *An Introduction to Linear Algebra*, Oxford University Press, Oxford, 1955. MR0074364.
- [57] Montmort, P.R. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 2da. edición. Jacque Quillau, París, 1713.
- [58] Myerson, R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, 1991. MR1107301.
- [59] Nash, J.F. *Non-cooperative games*, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1950. MR2938064.
- [60] Nash, J.F. *Equilibrium points in  $n$ -person games*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950), 48–49, Doi: 10.1073/pnas.36.1.48. MR0031701.
- [61] Nash, J.F. *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics **54** (1951), 286–295, Doi: 10.2307/1969529. MR0043432.
- [62] Newton, I. *Arithmeticae Universalis*, Universidad de Cambridge, Cambridge, 1707.
- [63] Organización de Naciones Unidas, *A system of national accounts*, Studies in Methods Series F, n° 2, Naciones Unidas, Nueva York, 1993.
- [64] Organización de Naciones Unidas, *Handbook of input-output table compilation and analysis*, Studies in Methods Series F, n° 74, Naciones Unidas, Nueva York, 1999.
- [65] Organización de Naciones Unidas, *Handbook of integrated environmental and economic accounting*, Studies in Methods Series F, n° 61, Naciones Unidas, Nueva York, 2003.
- [66] Perron, O. *Zur Theorie der Matrizen*, Math. Ann. **64** (1907), 248–263, Doi: 10.1007/BF01449896. MR1511438.
- [67] Quesnay, F. *Le tableau économique*, 1758. Reimpreso en F. Quesnay, The Economical Table, University Press of the Pacific, Honolulu, 2004.
- [68] Quesnay, F. *Analyse de la formule arithmétique du tableau économique de la distribution des dépenses annuelles d'une Nation agricole*, Journal de l'agriculture, du commerce et des finances **II**, 3ème partie (1766), 11–41.
- [69] Rheinboldt, W.C.; Vandergraft, J.S. *A Simple Approach to the Perron-Frobenius Theory for Positive Operators on General Partially-Ordered Finite-Dimensional Linear Spaces*, Math. Comp. **27** (1973), 139–145, Doi: 10.1090/S0025-5718-1973-0325650-4. MR0325650.
- [70] Rolle, M. *Traité d'Algebre*, Estienne Michallet, París, 1690.
- [71] Simpson, T. *A Treatise of Algebra*, John Nourse, Londres, 1745.
- [72] Sylvester, J.J. *Additions to the articles: 'On a new class of theorems' and 'On Pascal's theorem'*, Phil. Mag. **37** (1859), 363–370.
- [73] Sylvester, J.J. *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems*, John Hopkins University Circulars **3** (1884), 34–35.
- [74] Tucker, A.W. *On Jargon: The Prisoner's Dilemma. A Two Person Dilemma*, UAMP Journal **1** (1980), 101.



- [75] Turnbull, H. *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Blackie and Sons Ltd., Londres, 1928.
- [76] Turnbull, H.; Aitken, A. *Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie & Sons Ltd., Londres, 1932.
- [77] Van Dammem, E.; Furth, D. *Game theory and the market*, en: P.Borm & H. Peters (eds.), *Chapters in Game Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, pp. 51–81. MR2026212.
- [78] Vandermonde, A.T. *Mémoire sur la résolution des équations*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1771** (1771), 365–416.
- [79] Vandermonde, A.T. *Mémoire sur l'élimination*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1772**, 2e partie (1772), 516–525.
- [80] Von Neumann, J. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann. **100** (1928), 295–320, Doi: 10.1007/BF01448847. MR1512486.
- [81] Von Neumann, J.; Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944. MR0011937.
- [82] Weierstrass, K. *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1868** (1868), 311–338.
- [83] Walras, L. *Éléments d'économie politique pure*, Corbaz & Cie., Lausana, 1874.
- [84] Weierstrass, K. *Zur Determinantentheorie*, notas basadas en las lecturas impartidas en 1886/1887 y publicadas póstumamente, en J. Knoblauch (ed.), *Mathematische Werke*, Vol. III, Mayer & Müller, Berlin, 1903, pp. 271–286.
- [85] Zermelo, E. *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, en E.W. Hobson, A.E.H. Love (eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians*, Vol. II, Cambridge University Press, Cambridge, 1913, pp. 501–504. MR0403902.

# A proof of a version of Hensel's lemma

*Una prueba de una versión del lema de Hensel*

Dinamérico P. Pombo Jr. (dpombojr@gmail.com)

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal Fluminense  
Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/nº  
Bloco G, Campus do Gragoatá  
24210-201 Niteri, RJ Brasil

## Abstract

By using a few basic facts, a proof of a known version of Hensel's lemma in the context of local rings is presented.

**Key words and phrases:** local rings, discrete valuation rings, Hensel's lemma.

## Resumen

Usando algunos pocos hechos básicos, se presenta una demostración de una versión del lema de Hensel en el contexto de los anillos locales.

**Palabras y frases clave:** anillos locales, anillos de valoración discretos, lema de Hensel.

## 1 Introduction

A classical and fundamental result, known as Hensel's lemma, is discussed in [1], [3], [5], [6] and [7], for instance. A quite general form of Hensel's lemma may be found in Chapter III of [2], although special cases of it may also be very important, as the one valid in the framework of local rings and presented in Chapter II of [6]. The main purpose of this note is to offer an elementary proof of the last-mentioned form of Hensel's lemma, as well as to derive a few consequences of it.

## 2 A proof of a version of Hensel's lemma

**Definition 2.1** (cf. [2, p. 80]). A commutative ring  $R$  with an identity element  $1 \neq 0$  is said to be a *local ring* if it contains a unique maximal ideal  $I_1$ , namely, the set of non-invertible elements of  $R$ . If  $K$  is the quotient ring  $R/I_1$ , which is a field,

$$\lambda \in R \mapsto \bar{\lambda} \in K$$

will denote the canonical surjection. For  $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in R[X]$ , we will write  $\bar{f}(X) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \cdots + \bar{a}_n X^n \in K[X]$ .

Received 29/06/2021. Revised 30/06/2021. Accepted 26/07/2021.

MSC (2010): Primary 12J25, 13F30; Secondary 13H99, 13J10, 13B25.

Corresponding author: Dinamérico P. Pombo Jr.

**Example 2.1** (cf. [6]). Let  $R$  be a discrete valuation ring and  $I_1$  the maximal ideal of  $R$ , which may be written as  $I_1 = \pi R$ . We have that

$$I_1 = \pi R \supset I_2 = \pi^2 R \supset \cdots \supset I_n = \pi^n R \supset I_{n+1} = \pi^{n+1} R \supset \dots$$

is a decreasing sequence of ideals of  $R$  such that  $I_n I_1 \subset I_{n+1}$  for each integer  $n \geq 1$  and  $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{0\}$ .

**Example 2.2** (cf. [3]). Let  $\mathbb{K}$  be a field endowed with a non-trivial discrete valuation  $|\cdot|$ ,  $R = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq 1\}$  the ring of integers of  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  and  $I_1 = \{\lambda \in R; |\lambda| < 1\}$  the maximal ideal of  $R$ . Let  $\mu \in I_1$  be such that  $|\mu| = \sup\{|\lambda|; \lambda \in I_1\}$ . Then

$$I_1 = \mu R \supset I_2 = \mu^2 R \supset \cdots \supset I_n = \mu^n R \supset I_{n+1} = \mu^{n+1} R \supset \dots$$

is a decreasing sequence of ideals of  $R$  such that  $I_n I_1 \subset I_{n+1}$  for each integer  $n \geq 1$  and  $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{0\}$ .

It may be seen that every discrete valuation ring may be regarded as the ring of integers of a field endowed with a non-trivial discrete valuation.

Let us recall that, if  $X$  is a non-empty set, a mapping

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

is an *ultrametric* on  $X$  if the following conditions hold for all  $x, y, z \in X$ :

- (a)  $d(x, y) = 0$  if and only if  $x = y$ ;
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (c)  $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ .

By induction,

$$d(x_1, x_n) \leq \max\{d(x_1, x_2), \dots, d(x_{n-1}, x_n)\}$$

for  $n = 2, 3, \dots$  and  $x_1, \dots, x_n \in X$ . And, since  $\max\{d(x, z), d(z, y)\} \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $d$  is a metric on  $X$ .

We shall present an elementary proof of the following form of Hensel's lemma [6, p. 43]:

**Proposition 2.1.** Let  $R$  be a local ring and  $I_1$  its maximal ideal, and assume the existence of a decreasing sequence  $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$  of ideals of  $R$  such that  $I_n I_1 \subset I_{n+1}$  for each integer  $n \geq 1$  and  $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{0\}$ . Then there exists a translation-invariant ultrametric  $d$  on

$R$  such that  $I_n = \{\lambda \in R; d(\lambda, 0) \leq \frac{1}{2^n}\}$  for each integer  $n \geq 1$  (thus  $(I_n)_{n \geq 1}$  is a fundamental system of neighborhoods of 0 in  $R$  with respect to the topology defined by  $d$ ) and the mappings

$$(\lambda, \mu) \in R \times R \longmapsto \lambda + \mu \in R \quad \text{and} \quad (\lambda, \mu) \in R \times R \longmapsto \lambda\mu \in R$$

are continuous. Moreover, if the metric space  $(R, d)$  is complete and if  $f(X) \in R[X]$  is such that  $\bar{f}(X)$  admits a simple root  $\theta$  in  $K$ , then there exists a unique root  $\lambda$  of  $f(X)$  in  $R$  such that  $\bar{\lambda} = \theta$ .

In order to prove Proposition 2.1 we shall need an auxiliary result:

**Lemma 2.1.** *Let  $(G, +)$  be a commutative group and  $H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_n \supset H_{n+1} \supset \cdots$  a decreasing sequence of subgroups of  $G$  such that  $\bigcap_{n \geq 1} H_n = \{0\}$ . Then there exists a translation-invariant ultrametric  $d$  on  $G$  such that  $H_n = \{x \in G; d(x, 0) \leq \frac{1}{2^n}\}$  for each integer  $n \geq 1$  (thus  $(H_n)_{n \geq 1}$  is a fundamental system of neighborhoods of 0 in  $G$  with respect to the topology defined by  $d$ ) and the mapping*

$$(x, y) \in G \times G \mapsto x + y \in G$$

is continuous.

**Proof of Lemma 2.1.** We shall use a classical argument. Put  $H_0 = G$  and let  $g: G \rightarrow \mathbb{R}_+$  be the mapping given by  $g(0) = 0$  and  $g(x) = \frac{1}{2^n}$  if  $x \in H_n \setminus H_{n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Obviously,  $g(x) > 0$  if  $g \in G \setminus \{0\}$ ,  $g(-x) = g(x)$  if  $x \in G$  and

$$H_n = \left\{ x \in G; g(x) \leq \frac{1}{2^n} \right\}$$

for  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Moreover,  $g(x+y) \leq \max\{g(x), g(y)\}$  for all  $x, y \in G$ , which is clear if  $x = 0$  or  $y = 0$ . Indeed, if  $x, y \in G \setminus \{0\}$ ,  $x \in H_k \setminus H_{k+1}$ ,  $y \in H_\ell \setminus H_{\ell+1}$ , with  $\ell \geq k \geq 0$ , then  $g(x) = \frac{1}{2^k}$  and  $g(y) = \frac{1}{2^\ell} \leq \frac{1}{2^k}$ . But, since  $H_\ell \subset H_k$ ,  $x + y \in H_k$ , and hence  $g(x + y) \leq \frac{1}{2^k} = \max\{g(x), g(y)\}$ .

Therefore the mapping

$$d: G \times G \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

defined by  $d(x, y) = g(x - y)$ , is a translation-invariant ultrametric on  $G$  such that

$$H_n = \left\{ t \in G; d(t, 0) \leq \frac{1}{2^n} \right\}$$

for each integer  $n \geq 0$ . Consequently,

$$x + H_n = \left\{ t \in G; d(t, x) \leq \frac{1}{2^n} \right\}$$

if  $x \in G$  and  $n = 0, 1, 2, \dots$  are arbitrary.

Finally, if  $x_0, y_0 \in G$  and  $n = 0, 1, 2, \dots$  are arbitrary,

$$(x_0 + H_n) + (y_0 + H_n) \subset (x_0 + y_0) + H_n,$$

proving the continuity of the mapping

$$(x, y) \in G \times G \mapsto x + y \in G$$

at  $(x_0, y_0)$ . □

Now, let us turn to the

**Proof of Proposition 2.1.** By Lemma 2.1 there is a translation-invariant ultrametric  $d$  on  $R$  such that

$$I_n = \left\{ \lambda \in R; d(\lambda, 0) \leq \frac{1}{2^n} \right\}$$

for each integer  $n \geq 1$ , and the operation of addition in  $R$  is continuous. Moreover, if  $(\lambda_0, \mu_0) \in R \times R$  and  $n = 1, 2, \dots$  are arbitrary, the relations  $\lambda \in \lambda_0 + I_n, \mu \in \mu_0 + I_n$  imply

$$\lambda\mu - \lambda_0\mu_0 = \lambda\mu - \lambda_0\mu + \lambda_0\mu - \lambda_0\mu_0 = \mu(\lambda - \lambda_0) + \lambda_0(\mu - \mu_0) \in I_n + I_n \subset I_n,$$

proving the continuity of the mapping

$$(\lambda, \mu) \in R \times R \longmapsto \lambda\mu \in R$$

at  $(\lambda_0, \mu_0)$ .

Now, assume that  $(R, d)$  is complete and let  $f(X), \bar{f}(X), \lambda, \theta$  be as in the statement of the proposition. In order to conclude the proof we shall apply Newton's approximation method, as in p. 44 of [6]. Let us first observe that, if  $h(X) \in R[X]$  and  $\gamma \in R$ , then  $\overline{h(\gamma)} = \bar{h}(\bar{\gamma})$ .

To prove the uniqueness, assume the existence of a  $\mu \in R$  so that  $\bar{\mu} = \theta$  and  $f(\mu) = 0$ . Since  $\bar{\lambda} = \theta$  is a simple root of  $\bar{f}(X)$ , there is a  $g(X) \in R[X]$  such that  $f(X) = (X - \lambda)g(X)$  and  $\bar{g}(\theta) \neq 0$ ; thus

$$0 = f(\mu) = (\mu - \lambda)g(\mu).$$

Therefore, since  $\overline{g(\mu)} = \bar{g}(\theta) \neq 0$ , we conclude that  $g(\mu)$  is an invertible element of  $R$ ; hence  $\lambda = \mu$ .

To prove the existence, we claim that there is a sequence  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  in  $R$  so that  $\bar{\lambda}_n = \theta, \bar{f}(\lambda_n) \in I_n$  and  $\overline{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \in I_n$  for each integer  $n \geq 1$ . Indeed, let  $\lambda_1 \in R$  be such that  $\bar{\lambda}_1 = \theta$ . Then  $\bar{f}(\lambda_1) = \bar{f}(\theta) = 0$ , that is,  $f(\lambda_1) \in I_1$ . Now, let  $n \geq 1$  be arbitrary, and suppose the existence of a  $\lambda_n \in R$  such that  $\bar{\lambda}_n = \theta$  and  $f(\lambda_n) \in I_n$ . Then, for every  $h \in I_n, (\lambda_n + h) - \lambda_n \in I_n$  and  $\overline{(\lambda_n + h)} = \bar{\lambda}_n + \bar{h} = \theta$ . We shall show the existence of an  $h \in I_n$  with  $f(\lambda_n + h) \in I_{n+1}$ . In fact, by Taylor's formula [4, p. 387], there is a  $\xi \in R$  so that

$$f(\lambda_n + h) = f(\lambda_n) + hf'(\lambda_n) + h^2\xi.$$

And, by hypothesis,  $h^2\xi = h(h\xi) \in I_n I_n \subset I_n I_1 \subset I_{n+1}$ . But, since  $\theta$  is a simple root of  $\bar{f}(X), \bar{f}'(\bar{\lambda}_n) = \bar{f}'(\theta) \neq 0$ , that is,  $f'(\lambda_n)$  is an invertible element of  $R$ . Thus, by taking  $h = -f(\lambda_n)(f'(\lambda_n))^{-1} \in I_n$  and  $\lambda_{n+1} = \lambda_n + h$ , we arrive at  $\bar{\lambda}_{n+1} = \theta, f(\lambda_{n+1}) \in I_{n+1}$  and  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \in I_n$ , as desired.

Finally,  $(f(\lambda_n))_{n \geq 1}$  converges to 0 in  $R$ , because  $d(f(\lambda_n), 0) \leq \frac{1}{2^n}$  for  $n = 1, 2, \dots$ . On the other hand, for  $n, \ell = 1, 2, \dots,$

$$d(\lambda_{n+\ell}, \lambda_n) \leq \max\{d(\lambda_{n+\ell}, \lambda_{n+\ell-1}), \dots, d(\lambda_{n+1}, \lambda_n)\} \leq \max\left\{\frac{1}{2^{n+\ell-1}}, \dots, \frac{1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2^n},$$

and hence  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  is a Cauchy sequence in  $(R, d)$ . By the completeness of  $(R, d)$ , there is a  $\lambda \in R$  for which  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  converges. Consequently, in view of the continuity of the mappings

$$(\alpha, \beta) \in R \times R \longmapsto \alpha + \beta \in R \quad \text{and} \quad (\alpha, \beta) \in R \times R \longmapsto \alpha\beta \in R,$$

$(f(\lambda_n))_{n \geq 1}$  converges to  $f(\lambda)$ ; thus  $f(\lambda) = 0$ .

Now, let us consider  $K = R/I_1$  endowed with the discrete ultrametric  $d'$ , given by  $d'(s, s) = 0$  and  $d'(s, t) = 1$  if  $s \neq t$  ( $s, t \in K$ ). Since the canonical surjection

$$\lambda \in (R, d) \mapsto \bar{\lambda} \in (K, d')$$

is continuous ( $\bar{I}_1 = \{0\}$ ) and  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  converges to  $\lambda$ ,  $(\bar{\lambda}_n)_{n \geq 1}$  converges to  $\bar{\lambda}$ . Therefore  $\bar{\lambda} = \theta$ . □

**Corollary 2.1.** *Let  $R$  be a discrete valuation ring which is complete under the ultrametric  $d$  given in Proposition 2.1. Let  $f(X) \in R[X]$  be such that  $\bar{f}(X) \in K[X]$  admits a simple root  $\theta$ . Then there exists a unique root  $\lambda$  of  $f(X)$  such that  $\bar{\lambda} = \theta$ .*

*Proof.* Follows immediately from Proposition 2.1, by recalling Example 2.1. □

**Remark 2.1.** *Let  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  and  $I_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) be as in Example 2.2. Then  $\tilde{d}(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$  is an ultrametric on  $\mathbb{K}$ , and hence its restriction to  $R \times R$  is an ultrametric on  $R$  (which we shall also denote by  $\tilde{d}$ ). Since, for  $n = 1, 2, \dots$ ,*

$$\left\{ \lambda \in R; \tilde{d}(\lambda, 0) = |\lambda| \leq \frac{1}{2^n} \right\} = I_n = \left\{ \lambda \in R; d(\lambda, 0) \leq \frac{1}{2^n} \right\},$$

*d* being as in Proposition 2.1, it follows that  $\tilde{d}$  and  $d$  are equivalent.

**Corollary 2.2.** *Let  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  and  $\mu$  be as in Example 2.2, and assume that  $(\mathbb{K}, \tilde{d})$  is complete. If  $f(X) \in R[X]$  and  $\bar{f}(X) \in K[X]$  admits a simple root  $\theta$ , then there is a unique root  $\lambda$  of  $f(X)$  so that  $|\lambda - \xi| \leq |\mu|$  (where  $\xi \in R$  and  $\bar{\xi} = \theta$ ).*

*Proof.* Follows immediately from Remark 2.1 and Proposition 2.1. □

**Corollary 2.3** (cf. [5, p. 16]). *Let  $p$  be a prime number,  $\mathbb{Z}_p = \{\lambda \in \mathbb{Q}_p; |\lambda|_p \leq 1\}$  the ring of  $p$ -adic integers and  $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ . If there is an  $a_0 \in \mathbb{Z}_p$  such that  $|f(a_0)|_p < 1$  and  $|f'(a_0)|_p = 1$ , then there is a unique  $a \in \mathbb{Z}_p$  such that  $f(a) = 0$  and  $|a - a_0|_p \leq \frac{1}{p}$ .*

*Proof.* Since the condition “ $|f(a_0)| < 1$ ” is equivalent to the condition “ $\bar{f}(\bar{a}_0) = \overline{f(a_0)} = 0$ ”, and the condition “ $|f'(a_0)|_p = 1$ ” is equivalent to the condition “ $(\bar{f})'(\bar{a}_0) = \overline{f'(a_0)} \neq 0$ ”, Theorem 6, p. 391 of [4] guarantees that  $\bar{a}_0$  is a simple root of  $\bar{f}(X)$ . Therefore the result follows from Corollary 2.2. □

**Example 2.3** (cf. [3, p. 52]). *Let  $p$  be a prime number,  $p \neq 2$ , and let  $b \in \mathbb{Z}_p$  with  $|b|_p = 1$ . If there is an  $a_0 \in \mathbb{Z}_p$  such that  $|a_0^2 - b|_p < 1$ , then  $b = a^2$  for a unique  $a \in \mathbb{Z}_p$  such that  $|a - a_0|_p \leq \frac{1}{p}$ .*

*Indeed, put  $f(X) = X^2 - b \in \mathbb{Z}_p[X]$ . Then  $|f(a_0)|_p = |a_0^2 - b|_p < 1$  and  $|f'(a_0)|_p = |2a_0|_p = |2|_p |a_0|_p = |a_0|_p = 1$  (the relation  $|a_0^2 - b|_p < 1 = |b|_p = 1$  implies  $(|a_0|_p)^2 = |(a_0^2 - b) + b|_p = |b|_p = 1$ ). Thus the result follows from Corollary 2.9.*

*In the same vein one shows that if  $p$  is a prime number,  $p \neq 3$ ,  $c \in \mathbb{Z}_p$ ,  $|c|_p = 1$ , and there is an  $f_0 \in \mathbb{Z}_p$  such that  $|f_0^3 - c|_p < 1$ , then  $c = f^3$  for a unique  $f \in \mathbb{Z}_p$  such that  $|f - f_0|_p \leq \frac{1}{p}$ .*

## References

- [1] E. Artin. *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [2] N. Bourbaki. *Commutative Algebra*, Hermann and Addison-Wesley, Paris and Reading, Massachusetts, 1972.
- [3] J.W. Cassels. *Local Fields*, London Mathematical Society Student Texts 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [4] R. Godement. *Cours d'algèbre*, Troisième édition, Enseignement des Sciences, Hermann, Paris, 1966.
- [5] N. Koblitz. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 1984.
- [6] J. P. Serre. *Corps Locaux*, Quatrième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1296, Hermann, Paris, 1968.
- [7] J. P. Serre. *A Course in Arithmetic*, Third printing, Graduate Texts in Mathematics 7, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 1985.

# Problemas y Soluciones

## *Problems and Solutions*

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)  
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias  
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en  $\text{\LaTeX}$ ). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

*Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a  $\text{\LaTeX}$  source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.*

## 1 Problemas propuestos

Los tres problemas propuestos a continuación se plantearon en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe 2020, organizada por Panamá y realizada de manera virtual.

148. Se tienen monedas idénticas distribuidas en varias pilas con una o más monedas en cada pila. Una *operación* consiste en tomar dos pilas, con una cantidad total de monedas par entre ellas, y repartir sus monedas entre las dos pilas de modo que ambas terminen con la misma cantidad. Una distribución es *nivelable* si es posible, mediante 0 o más operaciones, lograr que todos los pilas queden con el mismo número de monedas. Determine todos los enteros positivos  $n$  tales que, para todo entero positivo  $k$ , cualquier distribución de  $nk$  monedas en  $n$  pilas es nivelable.
149. Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea  $k$  un entero positivo y sean  $x_1, x_2, \dots, x_k$  números reales positivos tales que  $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$ . Demuestre que

$$P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \geq kP(1).$$

150. Se dice que un entero positivo  $N$  es *interoceánico* si su factorización prima

$$N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

satisface que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

Encuentre todos los números interoceánicos menores que 2020.



## 2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 54, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–147. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

59. [10(1) (2002) p. 86.] Hallar el máximo valor del número real  $m$ , tal que sea cierta la siguiente afirmación:

Si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números enteros positivos tales que,

$$\begin{aligned} c &> d \\ a + b &= c + d \\ ab &= 2cd \end{aligned}$$

entonces  $c/d > m$ .

*Solución del editor:* El máximo es  $3 + \sqrt{8}$ . Supongamos que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  cumplen las condiciones y pongamos  $x = c - a = b - d$ . Entonces  $(c - x)(d + x) = ab = 2cd$ , de donde  $x^2 - (c - d)x + cd = 0$  y  $(c - d)^2 - 4cd \geq 0$ , o sea  $c^2 - 6cd + d^2 \geq 0$ ,  $(c - 3d)^2 - 8d^2 \geq 0$ ,  $(c/d - 3)^2 \geq 8$ ,  $|c/d - 3| \geq \sqrt{8}$ , y como  $c > d$  debe ser  $c/d > 3 + \sqrt{8}$ . Para ver que  $3 + \sqrt{8}$  es el valor mínimo consideremos su desarrollo en fracción continua simple, a saber  $[5, 1, 4, 1, 4, \dots]$ , y sean  $c_n/d_n$  los convergentes. Entonces  $c_1 = 5$ ,  $d_1 = 1$ ,  $c_2 = 6$ ,  $d_2 = 1$  y se tienen las recurrencias  $c_{2k} = c_{2k-1} + c_{2k-2}$ ,  $d_{2k} = d_{2k-1} + d_{2k-2}$ ,  $c_{2k+1} = 4c_{2k} + c_{2k-1}$ ,  $d_{2k+1} = 4d_{2k} + d_{2k-1}$ . De aquí se deduce fácilmente que  $d_{2k} = c_{2k-2}$  y que  $c_{2k} = 6c_{2k-2} + c_{2k-4}$ . Como  $c_2 = 6$ ,  $c_3 = 4 \cdot 6 + 5 = 29$  y  $c_4 = 6 + 29 = 35$ , vemos que  $c_2$  es par,  $c_4$  es impar y de la recurrencia  $c_{2k} = 6c_{2k-2} + c_{2k-4}$  se sigue que los  $c_{2k}$  son alternadamente pares e impares. Luego  $a_{2k} = (c_{2k} + c_{2k-2} + 1)/2$  y  $b_{2k} = (c_{2k} + c_{2k-2} - 1)/2$  son enteros positivos y  $a_{2k} + b_{2k} = c_{2k} + c_{2k-2} = c_{2k} + d_{2k}$ . La condición  $a_{2k}b_{2k} = 2c_{2k}d_{2k}$  equivale a

$$(c_{2k} + c_{2k-2} + 1)(c_{2k} + c_{2k-2} - 1) = 8c_{2k}c_{2k-2},$$

o sea

$$(c_{2k} + c_{2k-2})^2 - 1 - 8c_{2k}c_{2k-2} = 0,$$

que para  $k = 2$  se verifica. Asumiendo que se cumple para  $k$ , para  $k + 1$  se tiene

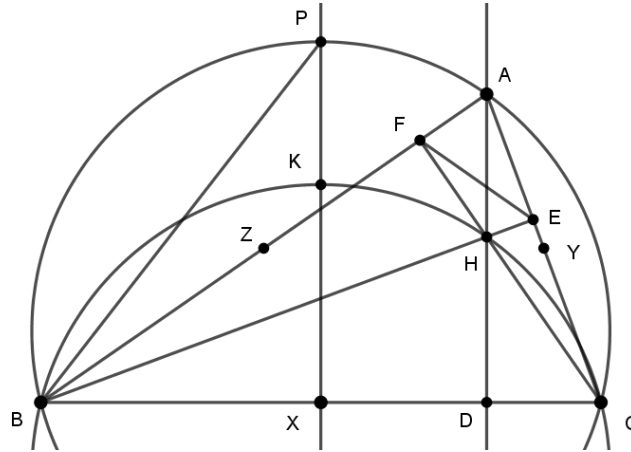
$$\begin{aligned} (c_{2k+2} + c_{2k})^2 - 1 - 8c_{2k+2}c_{2k} &= (7c_{2k} - c_{2k-2})^2 - 1 - 8(6c_{2k} - c_{2k-2})c_{2k} \\ &= 49c_{2k}^2 - 14c_{2k}c_{2k-2} + c_{2k-2}^2 - 1 - 48c_{2k}^2 + 8c_{2k-2}c_{2k} \\ &= c_{2k}^2 - 6c_{2k}c_{2k-2} + c_{2k-2}^2 - 1 \\ &= (c_{2k}^2 + c_{2k-2})^2 - 8c_{2k}c_{2k-2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que hay una sucesión infinita de números  $c_{2k}$ ,  $d_{2k}$ ,  $a_{2k}$ ,  $b_{2k}$  que cumplen las condiciones y tales que  $c_{2k}/d_{2k} \rightarrow 3 + \sqrt{8}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

69. [11(1) (2003) p. 84.] Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo. Sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  los pies de las alturas y  $X$ ,  $Y$ , y  $Z$  los puntos medios de los lados  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Sea  $H$  el punto de intersección de las alturas. Supóngase que  $H$  no se encuentra en el interior del

triángulo  $XYZ$ . Demostrar que por lo menos el área de uno de los triángulos  $AEF$ ,  $BDF$ ,  $CDE$  es menor o igual que  $1/9$  del área del triángulo  $ABC$ .

*Solución del editor:*  $H$  debe encontrarse en el semiplano limitado por  $YZ$  que contiene a  $A$ , o en el limitado por  $XZ$  que contiene a  $B$ , o en el limitado por  $XY$  que contiene a  $C$ . Supongamos que se da el primer caso (los otros son similares). Consideremos el triángulo isósceles  $BAPC$  con  $\angle BPC = \angle BAC = \alpha$  y sea  $K$  el ortocentro de  $BPC$ . Es fácil ver que  $PK = AH \leq HD \leq KX$ .



Como  $\angle BPX = \alpha/2$  y  $\angle BKKX = 90^\circ - \alpha/2$  se tiene

$$\cot \alpha/2 = \frac{XP}{XB} \leq 2 \frac{XQ}{XB} = 2 \cot(90^\circ - \alpha/2) = 2 \tan \alpha/2,$$

de donde  $\tan^2 \alpha/2 \geq 1/2$ . Luego

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = -1 + \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \leq -1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Finalmente

$$[AEF] = \frac{1}{2} AE \cdot AF \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cos \alpha \cdot AB \cos \alpha \sin \alpha = [ABC] \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{9} [ABC].$$

# Guía para los Autores

**Divulgaciones Matemáticas** es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Además, el autor debe suministrar los datos (nombre, correo, institución donde laboran) de tres especialistas en el área del trabajo sometido. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

**Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

**Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

**Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

# Guide for Authors

**Divulgaciones Matemáticas** is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. In addition, the author must provide the data (name, email, institution where they work) of three specialists in the area of the submitted work. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

**Identification.** This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

**Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

**Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 22, No. 1  
Se terminó de editar en Julio del 2021  
en el Departamento de Matemática (DEMAT)  
Maracaibo - Venezuela.

# La Universidad del Zulia

## AUTORIDADES

Judith Aular de Durán  
**Rector**

Clotilde Navarro  
**Vicerrectora Académica**

Marlene Primera Galué  
**Vicerrector Administrativa**

Ixora Gómez  
**Secretaria de LUZ**

## Facultad Experimental de Ciencias

Beatríz González  
**Decana (E)**

Tobías Rosas Soto  
**Director (E) del Departamento de Matemática**

# Divulgaciones Matemáticas

## Vol. 22, No. 1, 2021

### Contenido (Contents):

#### Artículos de Investigación (Research papers)

- Caputo and Caputo-Fabrizio fractional differential masks for images enhancement.**  
Máscaras diferenciales fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio para la mejora de imágenes.  
*Gustavo Mboro, Leandro Lau, Ana Morales* 1-21
- A note on the Banach contraction principle in b-metric spaces.**  
Una nota sobre el principio de contracción de Banach en b-espacios métricos.  
*Mohamed Akkouchi* 22-30
- The graph of a base power b, associated to a positive integer number.**  
El grafo potencia de base b, asociado a un entero positivo.  
*Daniel Brito, Oscar Castro, Lope Marín* 31-39
- Influence of physical exercise on the strengthening of immunity. Mathematical model.**  
Influencia del ejercicio físico en el fortalecimiento de la inmunidad. Modelo matemático.  
*Annia Ruiz, Daniela Rodríguez, Sandy Sánchez, Yuri Alcántara, Adolfo Arsenio, Isabel Martén, Antonio Ruiz* 40-51
- A note on some forms of continuity.**  
Una nota sobre algunas formas de continuidad.  
*Zanyar Ameen* 52-63

#### Artículos de Divulgación e Históricos (Expository and Historical)

- Un breve recorrido histórico por el álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones a la economía.**  
A short tour along the history of linear algebra and some of its applications to economics.  
*Ana Martín, Concepción Paralera, Ángel Tenorio* 64-89
- A proof of a version of Hensel's lemma.**  
Una prueba de una versión del lema de Hensel.  
*Dinamrico Pombo* 90-95

#### Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

- José H. Nieto S. (Editor).* 96-98