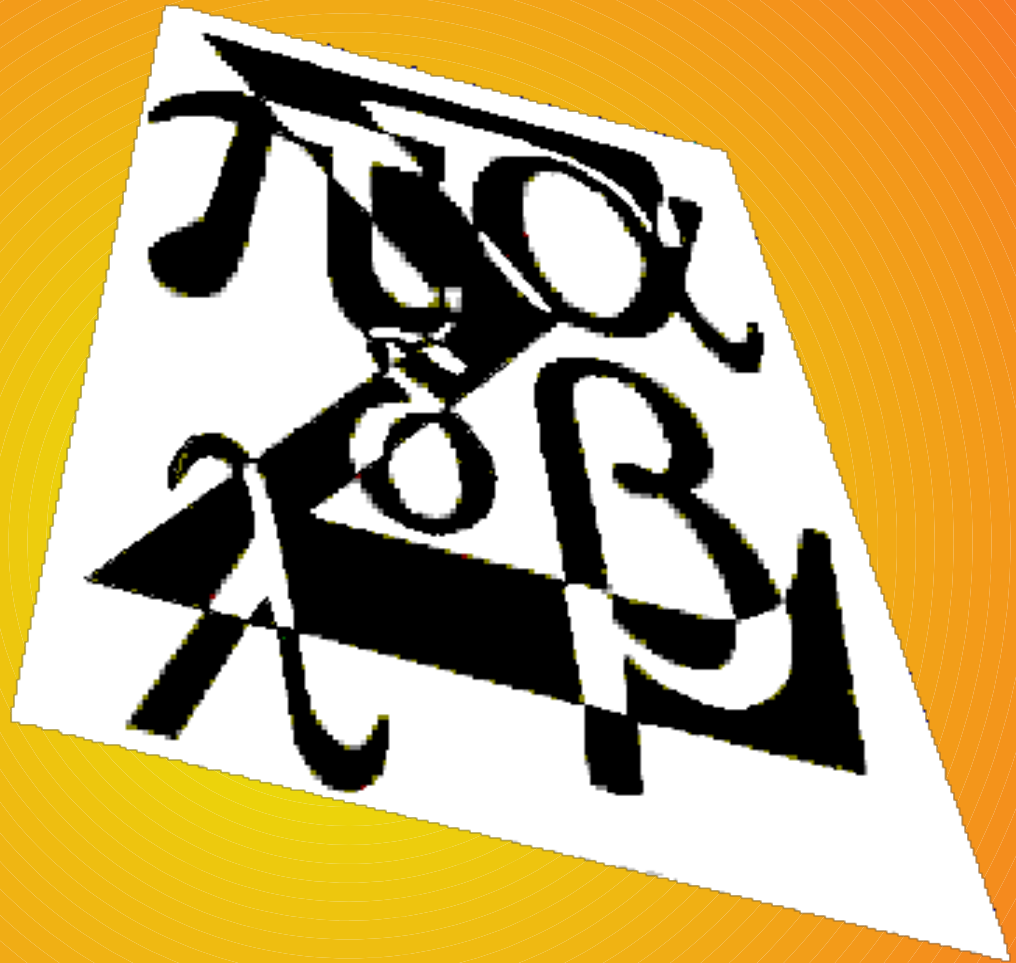




Universidad  
del Zulia

# Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

Depósito legal: pp 199302ZU392

ISSN 1315-2068

Maracaibo - Venezuela

Vol. 20 - No. 2 - 2019



# Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia  
Facultad Experimental de Ciencias  
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik y Revencyt. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

## Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)

Dr. Wilson Pacheco (LUZ)

Dr. Deivi Luzardo (LUZ)

**Editor Jefe:** Dr. Tobías Rosas Soto ([trosas@demat-fecluz.org](mailto:trosas@demat-fecluz.org))

**Editores Asociados:** Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

**Editores Eméritos:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

**Editore Fundadores:** Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto, basada en un diseño de Javier Adolfo Ortiz.

Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526  
Maracaibo, Estado Zulia  
Venezuela

Correo electrónico: [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org)

URL: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org)

[produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones](http://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones)

Depósito Legal pp 199302ZU392

Compuesta con  $\text{\LaTeX}$  y  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$  en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES  
MATEMÁTICAS

---

---

Vol. 20

2019

No. 2

---

---



# Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 20, No. 2, 2019**. Los artículos contenidos en el presente número fueron recibidos en el segundo semestre del año **2019**, que fueron evaluados y aceptados para su publicación, antes de la edición del presente número.

Es importante resaltar que el presente número de la revista solo muestra (5) artículos en la sección de Artículos de Investigación y un manuscrito con la solución de tres (3) problemas presentados en la sección de Problemas y Soluciones, y presentando un nuevo problema para resolver propuesto en la 34<sup>a</sup> Olimpiada Iberoamericana celebrada en Guanajuato, México, en septiembre del 2019.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado de mucho esfuerzo de algunos miembros del Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este número: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*; y en especial al Prof. José Heber Nieto por su aporte para la sección de *Problemas y Soluciones*. A todos, mil gracias.

A partir de este Vol. 20 (incluyendo el No. 1, 2019) la revista *Divulgaciones Matemáticas* pasa a estar en el portal de *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* cuyo sitio web oficial es: [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org). Ahora los artículos estarán identificados con el membrete del *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*. Por tanto, la revista tendrá dos páginas web de uso oficial: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org) y [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org), donde serán publicados los artículos y se podrán descargar de forma gratuita. Todo esto con la finalidad de darle más expansión y reconocimiento a la revista.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* pide disculpas a los autores de los artículos aquí publicados por los inconvenientes causados por la tardanza en la edición de este número, les agradecemos su espera. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

<sup>1</sup> Dr. Tobías Rosas Soto.

---

<sup>1</sup>Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

# Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 20, No. 2, 2019**. The articles contained in this issue are those received during the second semester of the year **2019**, wích ones were evaluated and accepted for publication, before the edition of this issue.

It is important to stand out that the present issue of the journal shows (5) five articles on the section of Research Papers and one manuscripts with the solution of three (3) problems presented in the section of Problems and Solutions and presenting a new problem to solve propoused on the 34<sup>a</sup> Olimpiada Iberoamericana celebrated in Guanajuato, Mexico, on september 2019.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of some members of the Department of Mathematics of the Experimental Faculty of Sciences. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this issue possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*; and especially to Professor José Heber Nieto, for his contribution to the *Problems and Solutions* section. To all of them, thanks a lot.

From this Vol. 20 (including the No. 1, 2019) the journal *Divulgaciones Matemáticas* is goin to be in the portal of *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* wích oficial webpage is: [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org). Now the articles will be identify with the letterhead of *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*. Furthermore, the journal will have two oficial webpages: [divmat.demat-fecluz.org](http://divmat.demat-fecluz.org) and [produccioncientificaluz.org](http://produccioncientificaluz.org), where will be published the articles y it will may download in a free way. All these with the purpose to give more expansion and recognition to the journal.

Finally, the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* ask for apologize to the authors of the articles published here for the inconvenient the delate of the edition of this issues made, we thanks your wait. Furthermore, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

<sup>2</sup> Dr. Tobías Rosas Soto.

---

<sup>2</sup>Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present issue

# DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 20, No. 2, 2019

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación

(Research papers)

- Propiedades geométricas de polígonos en planos de Minkowski.**  
Geometric properties of polygons in Minkowski planes.  
*Loidybeth Carrillo Colmenares, Tobías Rosas Soto* 1–30
- Locally defined operators in the space of functions of bounded  $\Lambda$ -variation.**  
Operadores localmente definidos en espacios de funciones de  $\Lambda$ -variación acotada.  
*Wadie Aziz, José A. Guerrero, Newman Zambrano* 31–38
- On the  $C$ -trace pseudospectrum in the matrix algebra.**  
Sobre el pseudoespectro de  $C$ -traza en el álgebra matricial.  
*Aymen Ammar - Aref Jeribi - Kamel Mahfoudhi* 39–44
- Composition operators from Sobolev spaces into Lebesgue spaces.**  
Operadores de composición desde espacios de Sobolev en espacios de Lebesgue.  
*Wadie Aziz* 45–62
- On some interesting properties of  $p$ -laplacian equation.**  
Sobre algunas propiedades interesantes de la ecuación  $p$ -laplaciana.  
*Gustavo Mboro Nchama, Mariano Rodríguez Ricard, Ángela León Mecías* 63–71

### Problemas y Soluciones

(Problems and Solutions)

- José H. Nieto S.* (Editor) 72–75





# Propiedades geométricas de polígonos en planos de Minkowski

*Geometric properties of polygons in Minkowski planes*

Loidybeth Carrillo Colmenares (loidy\_16@hotmail.com)

Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)

Departamento de Matemática  
Facultad Experimental de Ciencias  
Universidad del Zulia  
Maracaibo - Venezuela

## Resumen

En este artículo se estudian las propiedades geométricas de dos tipos de polígonos en el plano normado y afín  $\mathbb{R}^2$ , tales como: cuadriláteros y pentágonos. Se generaliza la noción de anticuadrilátero para cualquier cuadrilátero, con respecto a un punto del plano y se introduce la noción de  $\mathcal{C}$ -ortocentro para cuadriláteros inscritos en una circunferencia. De igual forma se define la noción de antipentágono para un pentágono cualquiera, en el plano normado y afín  $\mathbb{R}^2$ , con respecto a un punto dado y también se introduce la noción de  $\mathcal{C}$ -ortocentro para pentágonos inscritos en una circunferencia. Se determinan las relaciones geométricas del baricentro de estos polígonos, sus respectivos antipolígonos, los triángulos formados por sus vértices y algunos puntos notables de dichos triángulos, tales como: baricentros, circuncentros y  $\mathcal{C}$ -ortocentros, respectivamente (cuando estos existen). Se utilizó el programa Geogebra para la modelación de figuras en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ .

**Palabras y frases clave:** Planos de Minkowski, polígonos, centroide,  $\mathcal{C}$ -ortocentro, antipolígonos.

## Abstract

In this article we study the geometric properties of two type of polygons in the normed and affine plane  $\mathbb{R}^2$ , such as: quadrilaterals and pentagons. The notion of antiquadrilateral is generalized for any quadrilateral, with respect to a point in the plane and we introduce the notion of  $\mathcal{C}$ -orthocenter to inscribed quadrilaterals on a circumference. On the same way we define the notion antipentagon for any pentagon in the normed and affine plane  $\mathbb{R}^2$ , with respect to a given point and so we introduce the notion of  $\mathcal{C}$ -orthocenter to inscribed pentagons on a circumference. The geometric relations of the barycentre of this polygons, its antipolygons, the triangles formed by its vertices and some points related to these triangles, such as: baricenters, circumcenters and  $\mathcal{C}$ -orthocenters (when they exist), are determined. The Geogebra program was used for the modeling of figures in the euclidean plane  $\mathbb{R}^2$ .

**Key words and phrases:** Minkowski planes, polygons, centroid,  $\mathcal{C}$ -orthocenter, antipolygons.

## 1 Introducción

Desde el punto de vista analítico, el plano euclídeo es un espacio bidimensional con producto interno donde se satisfacen los axiomas de Euclides para la Geometría (ver [1, 3, 4, 11]). Como consecuencia de la estructura algebraica del espacio y sus relaciones, los distintos objetos geométricos pueden ser vistos como ecuaciones algebraicas. Por tanto, los resultados de la Geometría clásica de Euclides pueden ser traducidos o interpretados como algún tipo de relación algebraica analítica.

Ahora bien, en los espacios vectoriales bidimensionales (planos) se pueden definir diferentes tipos de normas y, por tanto, distintas formas de medir en dichos plano. Estos planos normados son llamados *planos de Minkowski* y han sido muy estudiados (véase [3, 4, 11]). Todo matemático que trabaje con Geometría en planos de Minkowski sabe, de su propia experiencia, que hay muchas propiedades geométricas elementales no se cumplen para todos los planos normados en general, tal y como se cumplen en el plano euclídeo. Sin embargo, algunas propiedades pueden redefinirse de manera que las mismas se cumplan, en cierto modo, en planos normados. Un ejemplo de esto se puede observar en [2, 5, 6, 8, 9, 10] sobre triángulos y en [2, 7] para cuadriláteros inscritos en una circunferencia.

En este trabajo concentramos nuestro estudio en las propiedades geométricas existentes en cuadriláteros y pentágonos sobre el plano normado y afín  $\mathbb{R}^2$ . Se generaliza la noción de anticuadrilátero para cualquier cuadrilátero, con respecto a un punto del plano y se introduce la noción de  $\mathcal{C}$ -ortocentro para cuadriláteros inscritos en una circunferencia. De igual forma se define la noción de antipentágono para un pentágono cualquiera, en el plano normado y afín  $\mathbb{R}^2$ , con respecto a un punto dado y también se introduce la noción de  $\mathcal{C}$ -ortocentro para pentágonos inscritos en una circunferencia. También se determinan las relaciones geométricas del baricentro de cada uno de estos polígonos, sus antipolígonos, los triángulos formados por sus vértices y puntos asociados con los mismos, tales como: baricentros, circuncentros y  $\mathcal{C}$ -ortocentros, respectivamente (cuando estos existan).

Se utiliza el programa Geogebra (ver [12]) para la modelación de figuras en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ . Es importante aclarar que en las figuras de ilustración se utilizan las circunferencias generadas por la norma euclídea con la finalidad de generar una mejor comprensión de la idea que se desea resaltar en la demostración.

## 2 Preliminares

Dado un plano  $M$  y  $x_1, x_2 \in M$ . Se denota por  $\langle x_1, x_2 \rangle$  a la *recta* que pasa por los puntos  $x_1$  y  $x_2$ , parametrizada por  $tx_1 + (1-t)x_2$  con  $t \in \mathbb{R}$  y por  $[x_1, x_2]$  al *segmento* entre  $x_1$  y  $x_2$ , dado por  $tx_1 + (1-t)x_2$  con  $t \in [0, 1]$ , cuyo *punto medio* está dado por  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ . Nótese que el *vector director* de la recia  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , o del segmento  $[x_1, x_2]$ , está dado por  $x_1 - x_2$ . De manera que dos rectas, o segmentos, serían *paralelas* si sus dos vectores directores son múltiplos esalares entre sí.

Se llamará *circunferencia unitaria* al conjunto  $\mathcal{C} = \{x \in V : \|x\| = 1\}$  y para cualquier punto  $x \in V$  y  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , el conjunto  $\mathcal{C}(x, r) = x + r\mathcal{C} = \{y \in V : \|x - y\| = r\}$  se definirá como la *circunferencia de centro  $x$  y radio  $r$* .

Sean  $p \in M$  y  $k \in \mathbb{R}$ , se llamará *simetría puntal de centro  $p$*  a la función  $S_p : M \rightarrow M$  dada por  $S_p(w) = 2p - w$ ,  $\forall w \in M$  y se llamará *homotecia* de centro  $p$  y razón  $k$ , a la función  $H_{p,k} : M \rightarrow M$  dada por la expresión  $H_{p,k}(w) = (1-k)p + kw$ ,  $\forall w \in M$ , también llamada *homotecia puntal de razón  $k$* .

Se llamará *triángulo* con vértices en los puntos  $x_1, x_2, x_3$ , denotado por  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , al conjunto de puntos  $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$  donde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , con  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Los segmentos  $[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1]$  serán los *lados del triángulo* y  $g = \frac{x_i + x_j + x_k}{3}$  se denominará el *báricentro* del  $\Delta x_i x_j x_k$ . Un punto  $x$  se dirá *circuncentro* del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  si es centro de una circunferencia que contiene los vértices del triángulo. También dado un punto cualquiera del plano  $p_4$  diremos que el triángulo  $\Delta p_1 p_2 p_3$  es el  $p_4$ -*antitriángulo* del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  si  $p_i = S_{m_i}(p_4)$  para  $i = 1, 2, 3$ , donde  $m_i$  son los puntos medios de los lados del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$ . Se define al punto  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - 2p_4}{2}$  el punto de simetría entre el triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  y su  $p_4$ -antitriángulo  $\Delta p_1 p_2 p_3$ , donde claramente  $p_i = S_p(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ . Además si  $p_4$  un circuncentro del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , entonces se dirá que  $x_4$  es el *C-ortocentro* del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  asociado a  $p_4$ , si  $S_q(p_4) = x_4$ . Por último, si  $x_4$  es el *C-ortocentro* del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$  y  $n_i = \frac{x_4 + m_i}{2}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Se llama *circunferencia de Feuerbach* del triángulo  $\Delta x_1 x_2 x_3$ , a la circunferencia que pasa por los puntos  $m_i$  y  $n_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Sea  $\mathcal{V}_n = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  un conjunto de puntos distintos del plano, se llama *polígono estrellado de  $n$  lados* o  *$n$ -gono estrellado*, de vértices  $x_i$ , denotado por  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_n}$ , a la poligonal cerrada formada por los puntos  $x_i$ . De igual forma se llama *polígono convexo de  $n$  lados* o  *$n$ -gono convexo*, de vértices  $x_i$ , denotado por  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$ , al conjunto de puntos de la forma  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , con  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 1$ . Los segmentos  $[x_i, x_{i+1}]$  y  $[x_n, x_1]$  son llamados *lados del polígono*, para  $i = 1, \dots, n-1$ . También se llamará *centroide del*

*polígono*  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$  al punto  $b_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Es importante aclarar que  $b_c$  no es el centroide del  $n$ -gono

estrellado  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_n}$ . Si hay una circunferencia  $\mathcal{C}(p, r)$  en  $M$  tal que los vértices  $x_i$  del polígono  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$  cumplen que  $x_i \in \mathcal{C}(p, r)$  para todo  $x_i \in \mathcal{V}_n$  se dirá que  $\mathcal{C}(p, r)$  es la circunferencia circunscrita de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$  y  $p$  se dirá *circuncentro* de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_n}$ . También se dirá que el polígono está inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}(p, r)$ .

Denominaremos *circunferencia de Feuerbach de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia* (ver [2]), a la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias de Feuerbach de los triángulos que se pueden formar con los vértices del cuadrilátero.

Por último enunciaremos una serie de resultados relevantes para la comprensión y desarrollo del artículo. A saber:

**Teorema 2.1.** (ver [8]) Sean  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  cuatro puntos distintos, en un plano de Minkowski, pertenecientes a la  $\mathcal{C}(x, \lambda)$ . Sea  $q_i$  el punto de simetría del  $\Delta p_j p_k p_l$  y su  $x$ -antitriángulo, y  $h_i = S_{q_i}(x)$  el *C-ortocentro* del  $\Delta p_j p_k p_l$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces:

1. Los segmentos  $[h_i, p_i]$  tienen el mismo punto medio  $q$ . Además,

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}.$$

2.  $h_i - h_j = p_j - p_i$  para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .
3. Los segmentos  $[h_i, h_j]$  y  $[q_i, q_j]$  son paralelos para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .
4. Si  $w = S_q(x)$ , entonces  $h_i \in C(w, \lambda)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .
5.  $q_i \in C(q, \frac{\lambda}{2})$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$6. C(q, \frac{\lambda}{2}) = H_{w, \frac{1}{2}}(C(x, \lambda)).$$

7. Si  $m_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}$  y  $x_{ij} = S_{m_{ij}}(x)$  para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces  $x_{ij}$  es circuncentro de los triángulos que se forman a partir de los puntos  $\{p_i, p_j, h_k, h_l\}$  para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Teorema 2.2.** Sean  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  cuatro puntos distintos, en un plano de Minkowski, pertenecientes a la  $C(x, \lambda)$ . Sea  $q_i$  el punto de simetría del  $\Delta p_j p_k p_l$  y su  $x$ -antitriángulo, y  $h_i = S_{q_i}(x)$  el  $C$ -ortocentro del  $\Delta p_j p_k p_l$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces:

1. Los segmentos  $[h_i, p_i]$  tienen el mismo punto medio  $q$ . Además,

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}$$

2.  $h_i - h_j = p_j - p_i$  para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

3. Los segmentos  $[h_i, h_j]$  y  $[q_i, q_j]$  son paralelos para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

4. Si  $w = S_q(x)$ , entonces  $h_i \in C(w, \lambda)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

5.  $q_i \in C(q, \frac{\lambda}{2})$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$6. C(q, \frac{\lambda}{2}) = H_{w, \frac{1}{2}}(C(x, \lambda)).$$

7. Si  $m_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}$  y  $x_{ij} = S_{m_{ij}}(x)$  para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces  $x_{ij}$  es circuncentro de los triángulos que se forman a partir de los puntos  $p_i, p_j, h_k$  y  $h_l$  para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

### 3 Cuadriláteros

**Teorema 3.1.** Sean  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $f$ , puntos distintos en un plano de Minkowski  $M$ . Sea  $w_i$  el punto de simetría del  $\Delta x_j x_k x_l$  con su  $f$ -antitriángulo, y sea  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Sean  $b_c = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4}$  y  $h_i = S_{w_i}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos  $[x_i, h_i]$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ , tienen el mismo punto medio  $q$ . Además,

$$q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2},$$

es decir,  $q = H_{b_c, -1}(f)$ .

2.  $x_i - x_j = h_j - h_i$ , con  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

3.  $w_i = H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . También  $w_i - w_j = \frac{3}{2}(b_i - b_j)$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

4.  $b_i = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Además,  $b_i - b_j = -\frac{1}{3}(x_i - x_j)$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

5.  $h_i = H_{b_i, -2}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . En particular,  $h_i - h_j = 3(b_i - b_j)$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

*Demostración.* Tómese en cuenta que  $h_i = S_{w_i}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2}$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  (ver (a), Figura 1). Por tanto,

$$\frac{x_i + h_i}{2} = \frac{x_i + \left[ 2 \left( \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} \right) - f \right]}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2} = 2b_c - f = H_{b_c, -1}(f),$$

para todo  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ .

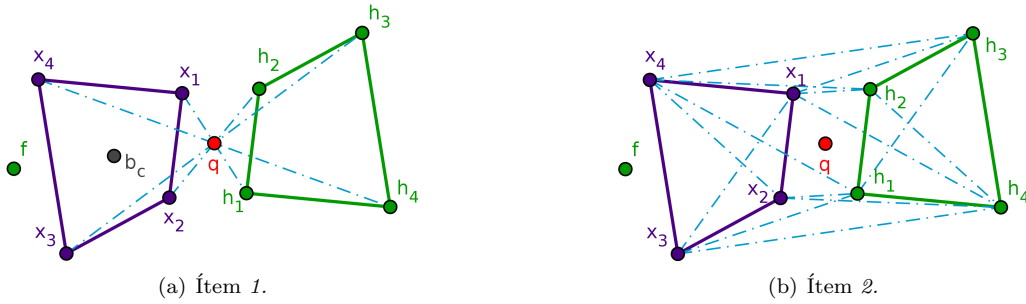


Figura 1: Ilustraciones 1, Teorema 3.1

Ahora (ver (b), Figura 1) obsérvese que

$$h_i = 2w_i - f = 2 \left( \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} \right) - f = x_j + x_k + x_l - 2f$$

para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Por tanto, se tiene que

$$h_j - h_i = x_i + x_k + x_l - 2f - (x_j + x_k + x_l - 2f) = x_i - x_j.$$

Nótese que  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Por definición de homotecia  $H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f) = \frac{3}{2}b_i - \frac{f}{2}$ , luego

$$H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f) = \frac{3}{2}b_i - \frac{f}{2} = \frac{3}{2} \left( \frac{x_j + x_k + x_l}{3} \right) - \frac{f}{2} = \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} = w_i$$

En particular,

$$w_i - w_j = \left( \frac{3}{2}b_i - \frac{f}{2} \right) - \left( \frac{3}{2}b_j - \frac{f}{2} \right) = \frac{3}{2}(b_i - b_j).$$

para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$  distintos (ver (a), Figura 2).

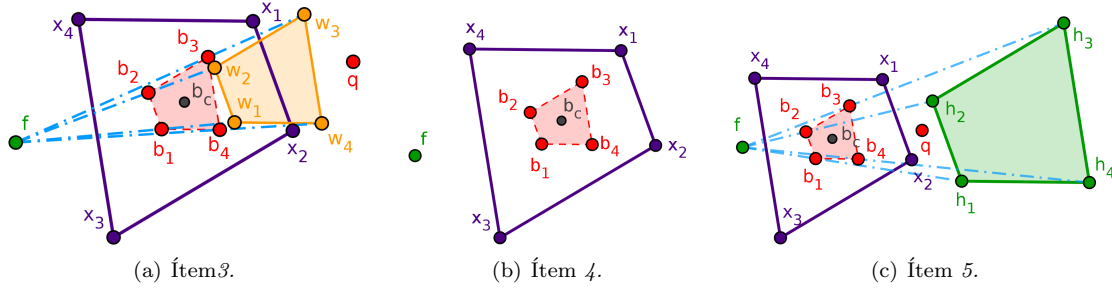


Figura 2: Ilustración 2, Teorema 3.1

Por otro lado, se tiene que  $b_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$  y, por definición de homotecia,

$$H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_i) = \frac{1}{3}(4b_c - x_i) = \frac{1}{3}((x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_i) = \frac{x_j + x_k + x_l}{3} = b_i.$$

para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Luego, (ver (b), Figura 2)

$$b_i - b_j = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_i) - H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x_j) = \left(\frac{4}{3}b_c - \frac{1}{3}x_i\right) - \left(\frac{4}{3}b_c - \frac{1}{3}x_j\right) = -\frac{1}{3}(x_i - x_j).$$

Por último, por definición de homotecia,  $H_{b_i, -2}(f) = 3b_i - 2f$  (ver (c), Figura 2). Así,  $H_{b_i, -2}(f) = x_j + x_k + x_l - 2f$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , implicando que  $h_i = H_{b_i, -2}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Por tanto,

$$h_i - h_j = H_{b_i, -2}(f) - H_{b_j, -2}(f) = (3b_i - 2f) - (3b_j - 2f) = 3(b_i - b_j).$$

mostrando lo deseado. □

Basados en el Teorema 3.1 se puede establecer la definición de anticuadrilátero para un cuadrilátero cualquiera, con respecto a un punto en el plano:

**Definición 3.1.** Sea  $M$  un plano de Minkowski. Sea  $\mathcal{V}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  el conjunto de vértices del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$ ) en  $M$ , y sea  $b_c = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i$ . Sean  $f \in M$ , tal que  $f \notin \mathcal{V}_4$ , y  $q = H_{b_c, -1}(f)$ . Se dice que el  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_4}$ ) es el  $f$ -anticuadrilátero de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$ ), si  $\mathcal{H}_4 = \{h_i : h_i = S_q(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4\}$  (ver Figura 3).

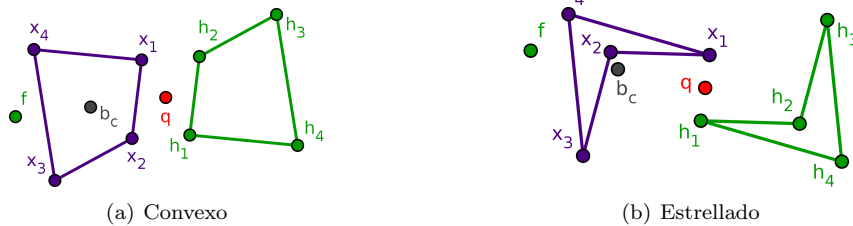


Figura 3:  $f$ -anticuadrilátero

Nótese que la Definición 3.1 también cumple que  $h_i = S_{w_i}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , donde  $w_i$  es el punto de simetría del  $\Delta x_j x_k x_l$  con su  $f$ -antitriángulo, para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Esto concuerda con la Definición 3.1 de anticuadrilátero, mostrada en [7] para cuadriláteros inscritos en una circunferencia.

**Teorema 3.2.** Sean  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $f$ , puntos distintos en un plano de Minkowski  $M$ . Sean  $w_i$  el punto de simetría del  $\Delta x_j x_k x_l$  con su  $f$ -antitriángulo, y  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Sean  $b_c = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4}$ ,  $q = H_{b_c, -1}(f)$ , y  $h_i = S_{w_i}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , entonces se cumple:

1. Si  $z_i = S_q(w_i)$ , los segmentos  $[b_i, z_i]$  se intersectan en el punto  $g = H_{b_c, -\frac{3}{5}}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .
2. Los segmentos  $[h_i, h_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos, para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . En particular,  $h_i - h_j = 2(w_i - w_j)$ .
3. Si  $t = S_q(f)$  y  $z_i = S_q(w_i)$ , entonces  $z_i = H_{t, \frac{1}{2}}(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , y  $z_i - z_j = w_j - w_i$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . Además,  $z_i$  es el punto de simetría del  $\Delta h_j h_k h_l$  y su  $t$ -antitriángulo.
4. Los segmentos  $[x_i, x_j]$ ,  $[b_i, b_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos, para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . En particular,  $b_i - b_j = \frac{1}{3}(x_j - x_i)$ .
5. Si  $m_{ij} = \frac{x_i + x_j}{2}$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , entonces

$$b_c = [m_{12}, m_{34}] \cap [m_{41}, m_{23}].$$

*Demostración.* Nótese que la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (1 - t_1) b_1 + t_1 z_1 = y_1 \\ (1 - t_2) b_2 + t_2 z_2 = y_2 \\ (1 - t_3) b_3 + t_3 z_3 = y_3 \\ (1 - t_4) b_4 + t_4 z_4 = y_4 \end{cases} \quad (3.1)$$

con  $t_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , muestra el punto  $g$  de intersección de los segmentos  $[b_i, z_i]$  (ver (a), Figura 4). En efecto, tomando en cuenta que  $z_i = S_q(w_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , se igualan dos ecuaciones cualesquiera del sistema (4.5) obteniendo que:

$$\begin{aligned} (1 - t_i) b_i + t_i z_i &= (1 - t_j) b_j + t_j z_j, \\ (1 - t_i) b_i + t_i (2q - w_i) &= (1 - t_j) b_j + t_j (2q - w_j) \\ (t_i - t_j) 2q + (1 - t_i) \left( \frac{x_j + x_k + x_l}{3} \right) - t_i w_i &= (1 - t_j) \left( \frac{x_i + x_k + x_l}{3} \right) - t_j w_j \\ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} t_i - t_j \right) x_j + \left( t_i - \frac{1}{6} t_j - \frac{1}{3} \right) x_i + \frac{1}{6} (t_i - t_j) (x_k + x_l) - (t_i - t_j) f &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t_i - 6t_j = -2 \\ 6t_i - t_j = 2 \\ t_i - t_j = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

cuya solución está dada por  $t_i = \frac{2}{5} = t_j$ . Así,  $t_i = \frac{2}{5}$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ .

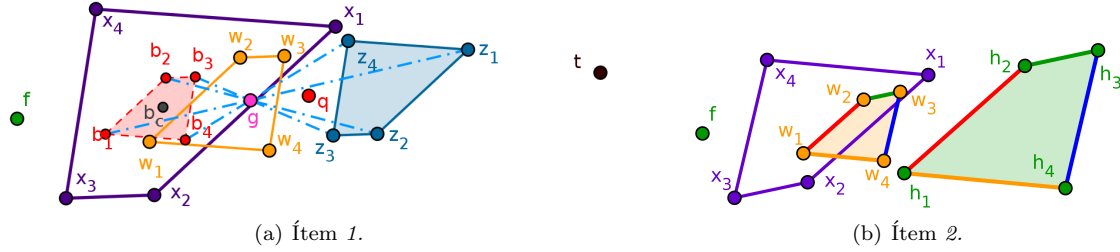


Figura 4: Ilustración 1, Teorema 3.2

Sustituyendo  $t_i$  en (4.5), y utilizando el ítem 1., Teorema 3.1, se obtiene que

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) b_i + \frac{2}{5} z_i = \frac{3}{5} b_i + \frac{2}{5} (2q - w_i) = \frac{3}{5} b_i + \frac{4}{5} (2b_c - f) - \frac{2}{5} w_i = \frac{3}{5} b_i + \frac{8}{5} b_c - \frac{4}{5} f - \frac{2}{5} w_i.$$

Como  $w_i = H_{b_i, -\frac{1}{2}}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  (por el ítem 3. del Teorema 3.1), se tiene

$$\left(1 - \frac{2}{5}\right) b_i + \frac{2}{5} z_i = \frac{3}{5} b_i + \frac{8}{5} b_c - \frac{4}{5} f - \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} b_i - \frac{1}{2} f\right) = \frac{8}{5} b_c - \frac{3}{5} f$$

Así,  $g = \frac{8}{5} b_c - \frac{3}{5} f$  y, por definición de homotecia,  $g = H_{b_c, -\frac{3}{5}}(f)$ .

Nótese ahora que  $h_i = S_{w_i}(f)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  (ver (b), Figura 4). Por tanto,

$$h_i - h_j = S_{w_i}(f) - S_{w_j}(f) = (2w_i - f) - (2w_j - f) = 2(w_i - w_j).$$

Por otro lado, si  $z_i = S_q(w_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , se tiene

$$z_i - z_j = S_q(w_i) - S_q(w_j) = (2q - w_i) - (2q - w_j) = w_j - w_i$$

para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . De igual forma como  $H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_i$  y  $t = S_q(f)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) &= \frac{1}{2}(2q - f) + \frac{1}{2}x_i = q + \frac{x_i - f}{2} = q + \frac{x_i - f}{2} + w_i - w_i = \\ &= q + \frac{x_i - f}{2} + \left(\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2}\right) - w_i = \\ &= q + \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}\right) - w_i = 2q - w_i. \end{aligned}$$



De manera que se cumple el ítem 3. (ver (a), Figura 5).

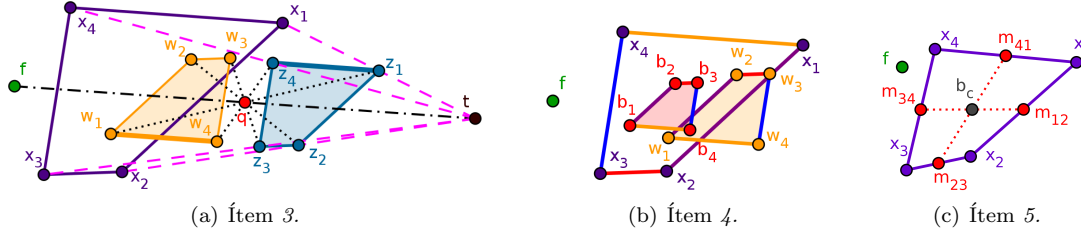


Figura 5: Ilustración 2, Teorema 3.2

Nótese que por el ítem 2. del Teorema 3.1, los segmentos  $[x_i, x_j]$  y  $[h_i, h_j]$  son paralelos. Luego, por el ítem 2., los segmentos  $[h_i, h_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos. Así, por transitividad, los segmentos  $[x_i, x_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos (ver (b), Figura 5). Además,

$$b_i - b_j = \frac{x_j + x_k + x_l}{3} - \frac{x_i + x_k + x_l}{3} = \frac{x_j - x_i}{3}.$$

Finalmente, (ver (c), Figura 5), para determinar el punto de intersección de los segmentos:

$$(1 - t_0)m_{12} + t_0m_{34} \quad \text{y} \quad (1 - t_1)m_{41} + t_1m_{23}. \quad (3.3)$$

para  $t_0, t_1 \in [0, 1]$ . Igualemos las ecuaciones presentes en (3.3), para determinar los valores de  $t_0$  y  $t_1$ :

$$(1 - t_0)m_{12} + t_0m_{34} = (1 - t_1)m_{41} + t_1m_{23}. \quad (3.4)$$

Así, desarrollando la ecuación (3.4) se tiene que

$$\begin{aligned} (1 - t_0) \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + t_0 \left( \frac{x_3 + x_4}{2} \right) &= (1 - t_1) \left( \frac{x_4 + x_1}{2} \right) + t_1 \left( \frac{x_2 + x_3}{2} \right) \\ x_1 \left[ \frac{(1 - t_0)}{2} + \frac{(t_1 - 1)}{2} \right] + x_2 \left[ \frac{(1 - t_0)}{2} - \frac{t_1}{2} \right] + x_3 \left( \frac{t_0}{2} - \frac{t_1}{2} \right) + x_4 \left[ \frac{t_0}{2} + \frac{(t_1 - 1)}{2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t_0 + t_1 = 1 \\ t_0 - t_1 = 0 \end{cases} \implies t_0 = t_1 = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor de  $t_0$  en la primera ecuación en (3.3) se tiene que:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_3 + x_4}{2} \right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = b_c.$$

obteniendo así lo deseado. □

Es importante notar que las propiedades de cinco puntos cualesquiera en un plano de Minkowski mostradas en los Teoremas 3.1 y 3.2, también son válidas en un espacio vectorial bidimensional pues las demostraciones de dichos teoremas se realizaron usando solo nociones afines que no dependen de la norma del plano tales como: simetría, homotecia y paralelismo.

Por otro lado, obsérvese que si  $\mathcal{V}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  es el conjunto de vértices de los polígonos  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  y  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$ , entonces todas las propiedades del Teorema 3.1 y Teorema 3.2 se cumplen para  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  y  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$ , salvo el hecho de que  $b_c$  es el centroide de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  ( $b_{\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}}$ ), pero no el de  $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_4}$ .

Ahora se presentarán dos resultados donde se mostrarán propiedades de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, relacionadas con un punto cualquiera del plano. Se establecerán algunas comparaciones de las mencionadas propiedades con otras presentes en el Teorema 2.1 y algunos otros resultados contenidos en [7].

**Teorema 3.3.** Sean  $M$  un plano de Minkowski y  $\mathcal{C}(x, r)$  una circunferencia en  $M$ . Sean  $x_1, x_2, x_3, x_4$  y  $f$  puntos distintos de  $M$ , con  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  en  $\mathcal{C}(x, r)$ . Sean  $q_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x}{2}$ ,  $b_c = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{4}$  y  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}$ . Sean  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l}{3}$  y  $w_i$  el punto de simetría del  $\triangle x_j x_k x_l$  y su  $f$ -antitriángulo para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $c_h = S_q(x)$ ; y  $h_i = S_q(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , entonces se cumple:

1. Si  $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $b_i$ , entonces  $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}) = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$ .
2. Si  $c_w = H_{f, \frac{3}{2}}(c_b)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$ , entonces  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$ .
3. Si  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$ , entonces  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ .
4. Si  $c_w$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$ , entonces  $q = S_{c_w}(q_x)$ .

*Demostración.* Tomemos  $y \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$ , por tanto  $\|c_b - y\| = \frac{r}{3}$  (ver (a), Figura 6). Se verá que  $y \in H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$ . Supóngase que existe  $w \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $y = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(w)$ , determinemos la forma que tendría tal  $w$ . A saber,

$$y = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(w) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) b_c - \frac{1}{3} w = \frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} w,$$

entonces  $w = 4b_c - 3y$ .

Veamos ahora que  $w \in \mathcal{C}(x, r)$ . Como  $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x)$  por hipótesis, entonces

$$\|x - w\| = \|x - (4b_c - 3y)\| = 3 \left\| y - \left( \frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} x \right) \right\| = 3 \|y - c_b\| = r.$$

De manera que  $y \in H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$  y por tanto,  $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}) \subset H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$ .

Luego, si  $y \in H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$ , entonces existe  $z \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $y = H_{b_c, -\frac{1}{3}}(z)$ . Obsérvese que  $\|x - z\| = r$ , así

$$\|c_b - y\| = \left\| H_{b_c, -\frac{1}{3}}(x) - H_{b_c, -\frac{1}{3}}(z) \right\| = \left\| \left( \frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} x \right) - \left( \frac{4}{3} b_c - \frac{1}{3} z \right) \right\| = \frac{1}{3} \|z - x\| = \frac{r}{3}.$$

De manera que  $y \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$  y, por tanto,  $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}) \supset H_{b_c, -\frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, r))$ .

Si  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , entonces  $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$  (ver (b), Figura 6). Veamos que  $y \in H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$ . Supóngase existe  $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$  tal que  $y = H_{f, \frac{3}{2}}(w)$ . Determinemos la forma de dicho  $w$ ,

$$y = H_{f, \frac{3}{2}}(w) = \left(1 - \frac{3}{2}\right) f + \frac{3}{2} w = \frac{3}{2} w - \frac{1}{2} f,$$

entonces  $w = \frac{1}{3}(2y + f)$ . Veamos que  $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$ . A saber,

$$\|c_b - w\| = \left\| c_b - \left(\frac{1}{3}(2y + f)\right) \right\| = \frac{1}{3} \|3c_b - (2y + f)\|. \tag{3.5}$$

Como  $c_w = H_{f, \frac{3}{2}}(c_b)$ , se tiene que

$$\frac{r}{2} = \|c_w - y\| = \left\| \left(1 - \frac{3}{2}\right) f + \frac{3}{2} c_b - y \right\| = \frac{1}{2} \|3c_b - 2y - f\| = \frac{1}{2} \|3c_b - (2y + f)\|$$

por tanto

$$\|3c_b - (2y + f)\| = r. \tag{3.6}$$

Así, por las ecuaciones (3.5) y (3.6), se tiene que  $\|c_b - w\| = \frac{r}{3}$ . De manera que  $y \in H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$ , obteniendo que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$

Luego, si  $y \in H_{f, \frac{3}{2}}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3}))$ , entonces existe  $z \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{3})$  tal que  $H_{f, \frac{3}{2}}(z) = y$ . Obsérvese que  $\|c_b - z\| = \frac{r}{3}$ . Veamos entonces que  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , así

$$\|c_w - y\| = \left\| H_{f, \frac{3}{2}}(c_b) - H_{f, \frac{3}{2}}(z) \right\| = \left\| \left(\frac{3}{2}c_b - \frac{1}{2}f\right) - \left(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}f\right) \right\| = \frac{3}{2} \|c_b - z\| = \frac{r}{2}.$$

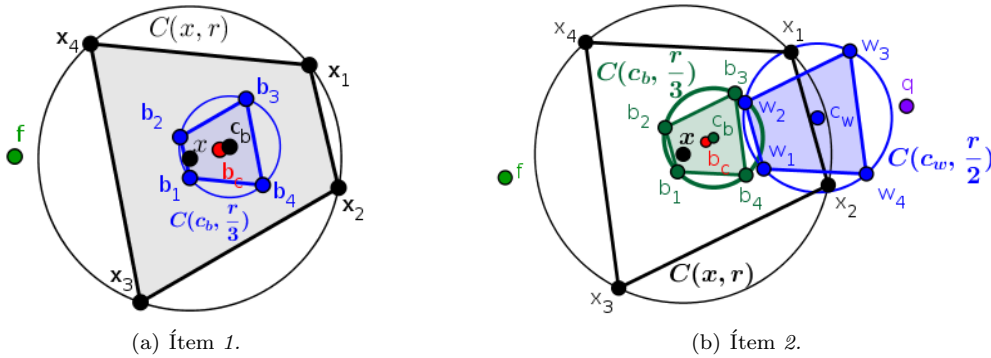


Figura 6: Ilustración 1, Teorema 3.3

Probemos ahora que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$  siempre y cuando  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  sea el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$  (ver (a), Figura 7). Tómesese un  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$  y veamos

que  $y \in H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ . Supóngase que existe  $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$  tal que  $y = H_{f, \frac{1}{2}}(w)$ . Determinemos quién sería  $w$ ,

$$H_{f, \frac{1}{2}}(w) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)f + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}w = y,$$

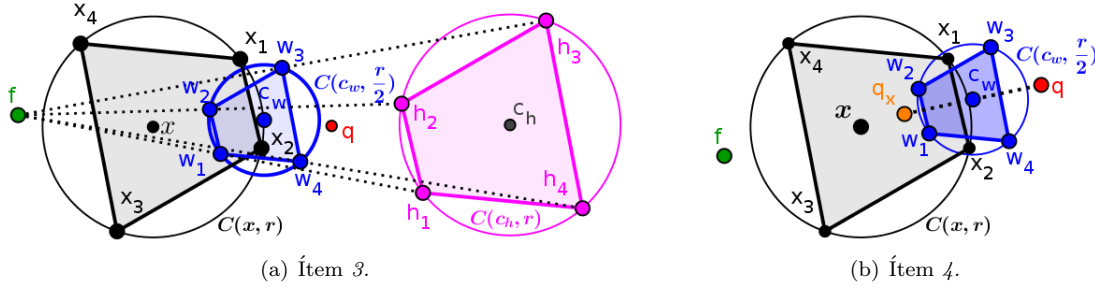


Figura 7: Ilustración 2, Teorema 3.3

entonces  $w = 2y - f$ .

Veamos que  $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$ . A saber,

$$\|c_h - w\| = \|c_h - (2y - f)\| = \|c_h - 2y + f\|. \quad (3.7)$$

Por otro lado, se tiene que  $\frac{r}{2} = \|c_w - y\| = \frac{1}{2}\|f + c_h - 2y\|$  y por tanto  $\|f + c_h - 2y\| = r$ . Así, por la ecuación (3.7), se tiene que  $\|c_h - w\| = r$ . De donde se obtiene que  $y \in H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ . De manera que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ .

Luego, si  $y \in H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ , se tiene que existe  $z \in \mathcal{C}(c_h, r)$  tal que  $H_{f, \frac{1}{2}}(z) = y$ . Obsérvese que  $\|c_h - z\| = r$ . Veamos que  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ . Por hipótesis se tiene

$$\|c_w - y\| = \left\| H_{f, \frac{1}{2}}(c_h) - H_{f, \frac{1}{2}}(z) \right\| = \left\| \left( \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}c_h \right) - \left( \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}z \right) \right\| = \frac{1}{2}\|c_h - z\| = \frac{r}{2}.$$

Por tanto,  $H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r)) \subset \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ .

Por último, veamos que si  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$ , entonces  $q = S_{c_w}(q_x)$  (ver (b), Figura 7). Obsérvese que:

$$\begin{aligned} S_{c_w}(q_x) &= 2c_w - q_x = 2\left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}c_h\right) - q_x = f + c_h - q_x = f + (2q - x) - q_x = \\ &= f + 2q - x - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x}{2}\right) = 2q - \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{2} + f = \\ &= 2q - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}\right) = 2q - q = q \end{aligned}$$

obteniendo así lo deseado.  $\square$

**Teorema 3.4.** Sea  $M$  un plano de Minkowski. Sean  $C(x, r)$  una circunferencia, y  $x_1, x_2, x_3, x_4, f$  puntos distintos de  $M$ , tal que  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C(x, r)$ . Sean  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}$ ;  $q_i$  el punto de simetría del  $\Delta x_j x_k x_l$  con su  $x$ -antitriángulo,  $w_i$  el punto de simetría del  $\Delta x_j x_k x_l$  con su  $f$ -antitriángulo, para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $c_h = S_q(x)$ ; y  $h_i = S_q(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Entonces se cumple:

1.  $C(q, \frac{r}{2}) = H_{c_h, \frac{1}{2}}(C(x, r))$ .
2. Si  $e_i = S_{w_i}(q_i)$ , entonces  $C(e_i, \frac{r}{2})$  es una circunferencia medial del  $f$ -antitriángulo del  $\Delta x_j x_k x_l$ , para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Además,  $e_i \in C(q, \frac{r}{2})$  y  $e_i$  es el punto medio del segmento  $[x, h_i]$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .
3. Si  $u_i = S_q(e_i)$ , entonces  $C(u_i, \frac{r}{2})$  es una circunferencia medial del  $t$ -antitriángulo del  $\Delta h_j h_k h_l$  para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Además,  $u_i \in C(q, \frac{r}{2})$  y  $u_i$  es el punto medio del segmento  $[c_h, x_i]$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .
4.  $x - f = e_i - q_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ .
5.  $e_i - e_j = u_j - u_i$  para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

*Demostración.* Dado que  $c_h = S_q(x)$ , se tiene que  $q = H_{c_h, \frac{1}{2}}(x)$  (ver (a), Figura 8). Tómesese  $y \in C(q, \frac{r}{2})$ , es decir  $\|q - y\| = \frac{r}{2}$ , y veamos que  $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(C(x, r))$ . Supóngase que existe  $w \in C(x, r)$  tal que  $y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w)$  y determinemos ¿cuál sería el  $w$  que cumple tal condición?. Nótese que  $y = \frac{1}{2}c_h + \frac{1}{2}w$ , de donde  $w = 2y - c_h$ . Veamos que  $w$  está en  $C(x, r)$ . Así,

$$\|x - w\| = \|x - (2y - c_h)\| = \|x - 2y + c_h\| = \|x - 2y + 2q - x\| = 2\|q - y\| = r.$$

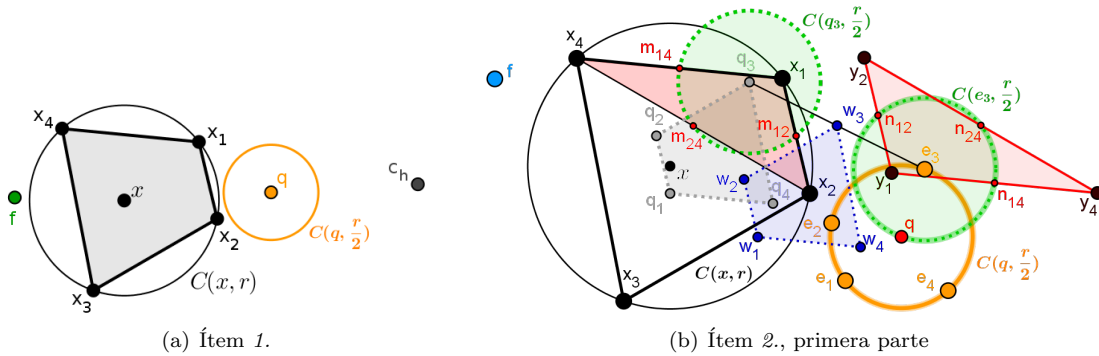


Figura 8: Ilustración 1, Teorema 3.4

Por otro lado, sean  $m_{jk} = \frac{x_j + x_k}{2}$ ,  $m_{jl} = \frac{x_j + x_l}{2}$ ,  $m_{lk} = \frac{x_l + x_k}{2}$  los puntos medios del  $\Delta x_j x_k x_l$ , para  $\{j, k, l\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ . Veamos que  $m_{jk} \in C(q_i, \frac{r}{2})$  para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Como  $x_i \in C(x, r)$ , entonces  $\|x - x_i\| = r$ . Por tanto,

$$\|q_i - m_{jk}\| = \left\| \frac{x_j + x_k + x_l - x}{2} - \left( \frac{x_j + x_k}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{x - x_i}{2} \right\| = \frac{r}{2}. \tag{3.8}$$

mostrando así que  $m_{jk} \in \mathcal{C}(q_i, \frac{r}{2})$ . Ahora, sean  $y_j = S_{w_i}(x_j)$  y  $n_{jk}$  los puntos medios del  $\Delta y_j y_k y_l$  (el  $f$ -antitriángulo del  $\Delta x_j x_k x_l$ ), para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Así, por hipótesis, es claro que  $n_{jk} = S_{w_i}(m_{jk})$ . Luego, por la ecuación (3.8), se tiene que

$$\|e_i - n_{jk}\| = \|S_{w_i}(q_i) - S_{w_i}(m_{jk})\| = \|q_i - m_{jk}\| = \frac{r}{2}.$$

Por tanto,  $n_{jk} \in \mathcal{C}(e_i, \frac{r}{2})$ , siendo así  $\mathcal{C}(e_i, \frac{r}{2})$  una circunferencia medial del  $\Delta y_j y_k y_l$  para  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  (ver (b), Figura 8).

Probemos ahora que:  $e_i \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ ; y  $e_i$  es el punto medio del segmento  $[x, h_i]$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Así,

$$e_i = 2w_i - q_i = 2\left(\frac{x_j + x_k + x_l - f}{2}\right) - \left(\frac{x_j + x_k + x_l - x}{2}\right) = \frac{x_j + x_k + x_l - 2f + x}{2}. \quad (3.9)$$

Luego, por (3.9), dado que  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f}{2}$ , se tiene

$$\|q - e_i\| = \left\| \frac{x_i + x_j + x_k + x_l - 2f}{2} - \left(\frac{x_j + x_k + x_l - 2f + x}{2}\right) \right\| = \left\| \frac{x_i - x}{2} \right\| = \frac{r}{2}$$

Usando (3.9), y dado que  $h_i = S_q(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , se tiene que  $e_i$  es el punto medio del segmento  $[x, h_i]$  (ver (a), Figura 9). En efecto,

$$\frac{x + h_i}{2} = \frac{x + 2q - x_i}{2} = \frac{x + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2f - x_i}{2} = \frac{x + x_j + x_k + x_l - 2f}{2} = e_i$$

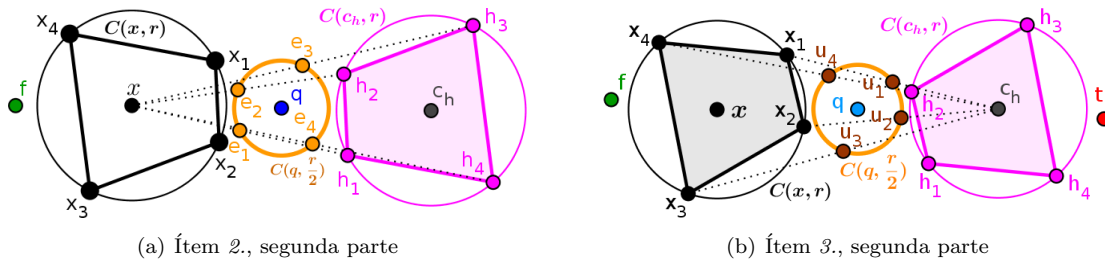


Figura 9: Ilustración 2, Teorema 3.4

Usando un razonamiento similar al anterior. Tómese en cuenta que  $h_i = S_q(x_i)$ ,  $u_i = S_q(e_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Luego, denotemos:  $z_i = S_q(w_i)$ ;  $p_i = S_q(q_i)$ ;  $d_i = S_q(y_i)$ ;  $a_{jk} = S_q(m_{jk})$ ; y  $b_{jk} = S_q(n_{jk})$ . Como las simetrías preservan distancias, entonces se verifica el ítem 3.. Para ilustrar este resultado véase la Figura 10 y la parte (b) de la Figura 9.

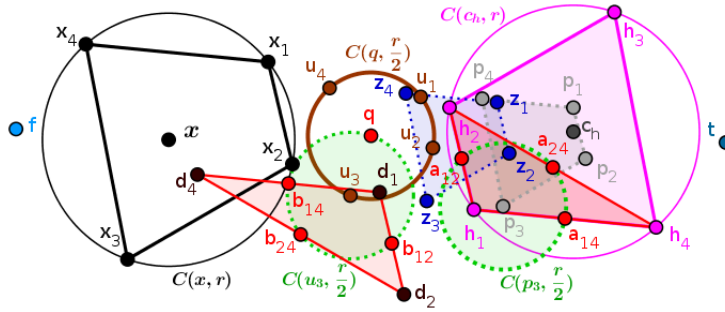


Figura 10: Ilustración 3, Teorema 3.4: Ítem 3., primera parte

Por otro lado, (ver (a), Figura 11), sea  $e_i = S_{w_i}(q_i) = 2w_i - q_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , de donde

$$e_i - q_i = e_i - q_i = 2(w_i - q_i) = 2 \left[ \frac{x_j + x_k + x_l - f}{2} - \left( \frac{x_j + x_k + x_l - x}{2} \right) \right] = x - f.$$

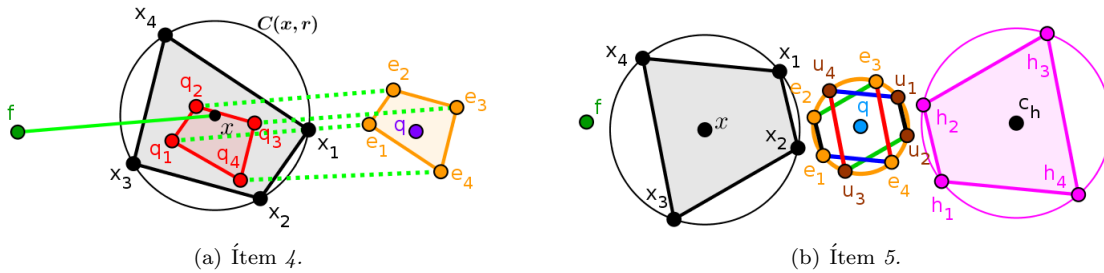


Figura 11: Ilustración 4, Teorema 3.4

Por último, nótese que  $u_i = S_q(e_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  (ver (b), Figura 11). Como  $S_q(e_i) = 2q - e_i$ , se tiene que

$$u_j - u_i = S_q(e_i) - S_q(e_j) = (2q - e_i) - (2q - e_j) = e_j - e_i.$$

□

En [8], la noción de  $\mathcal{C}$ -ortocentro para triángulo está dada por la intersección de circunferencias. En [6], se define simetrizando un circuncentro del triángulo dado, con respecto a los puntos medios de los lados del mismo. Además, se puede constatar que el  $\mathcal{C}$ -ortocentro de un triángulo cumple que: *los puntos medios de los segmentos formados por el  $\mathcal{C}$ -ortocentro y los vértices del triángulo están en la circunferencia de Feuerbach del triángulo dado.*

En un cuadrilátero la noción de  $\mathcal{C}$ -ortocentro no existe. Sin embargo, para cuadriláteros inscritos en una circunferencia, dado el centro de la circunferencia circunscrita, existe un punto que posee la misma propiedad para el cuadrilátero, que la del  $\mathcal{C}$ -ortocentro con el triángulo mencionada anteriormente. Así, observando los resultados presentados, y los presentes en [7], se puede establecer la siguiente definición:

**Definición 3.2.** Sea un cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  inscrito en una circunferencia  $\mathcal{C}(x, r)$ , en un plano de Minkowski  $M$ , con  $\mathcal{V}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Sea  $q$  el punto de simetría de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$  con su  $x$ -anticuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4}$ , donde  $\mathcal{H}_4 = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ . Se dirá que  $h$  es el  $\mathcal{C}$ -ortocentro del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ , si los puntos  $\frac{x_i + h}{2}$  están en la circunferencia de Feuerbach del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

## 4 Pentágonos

En este punto se introduce una notación que será de utilidad en el próximo resultado y en lo que sigue del artículo. Nótese que dado un conjunto  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , se pueden formar cinco cuadriláteros cuyos vértices están en el conjunto  $\mathcal{V}_5$ . Por tanto, para identificar los punto de  $\mathcal{V}_5$  que son vértices del cuadrilátero de interés se utilizará la siguiente notación:  $\mathcal{V}_5^i$  denotará al conjunto de punto  $\{x_j, x_k, x_l, x_s\}$  para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , es decir,  $\mathcal{V}_5^i = \mathcal{V}_5 - \{x_i\}$ . Así,  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ) denota el cuadrilátero convexo (estrellado) cuyos vértices están en el conjunto de puntos  $\mathcal{V}_5^i$ .

**Teorema 4.1.** Sean  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  y  $f$ , puntos distintos en un plano de Minkowski  $M$ . Sean  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $w_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ) con su  $f$ -anticuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5^i}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5^i}$ ), y  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$  para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Sean  $b_c = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{5}$  y  $h_i = S_{w_i}(f)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos  $[x_i, h_i]$ , con  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , tienen el mismo punto medio  $q$ . Además,

$$q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2},$$

es decir,  $q = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f)$ .

2.  $x_i - x_j = h_j - h_i$ , con  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
3.  $w_i = H_{b_i, -1}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . En particular,  $w_i - w_j = 2(b_i - b_j)$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
4.  $b_i = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . En particular, los segmentos  $[x_i, b_i]$  se intersectan en el punto  $b_c$ .
5.  $h_i = H_{b_i, -3}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

*Demostración.* Dado que  $h_i = S_{w_i}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , y  $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}$  para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  (ver (a), Figura 12), el punto medio del segmento  $[x_i, h_i]$  es:

$$\frac{x_i + h_i}{2} = \frac{x_i + 2w_i - f}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2} = \frac{5}{2}b_c - \frac{3}{2}f = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f).$$

De manera similar, (ver (b), Figura 12), obsérvese que

$$h_i = S_{w_i}(f) = 2w_i - f = 2\left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}\right) - f = x_j + x_k + x_l + x_s - 3f \quad (4.1)$$



Por tanto, de la ecuación (4.1), se tiene que  $h_j = x_i + x_k + x_l + x_s - 3f$  para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Luego,

$$h_j - h_i = x_i + x_k + x_l + x_s - 3f - (x_j + x_k + x_l + x_s - 3f) = x_i - x_j.$$

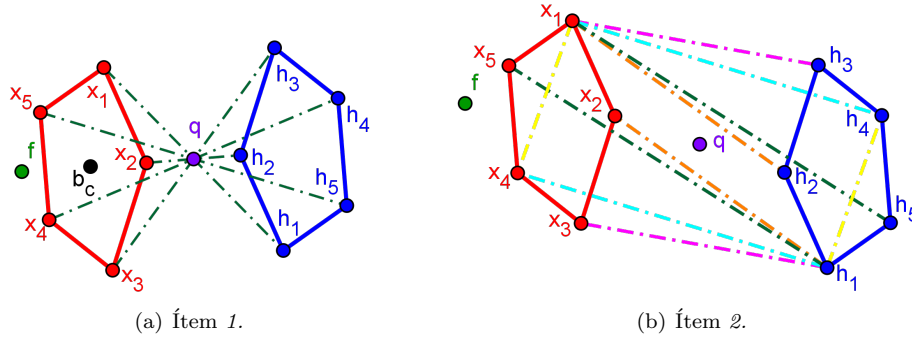


Figura 12: Ilustración 1, Teorema 4.1

Dado que  $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}$  y  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$ , para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , veamos que  $w_i = H_{b_i, -1}(f)$  (ver (a), Figura 13). Así,

$$H_{b_i, -1}(f) = 2b_i - f = 2 \left( \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} \right) - f = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2} = w_i \quad (4.2)$$

En particular, por la ecuación (4.2), para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , se tiene que

$$w_i - w_j = 2b_i - f - (2b_j - f) = 2(b_i - b_j).$$

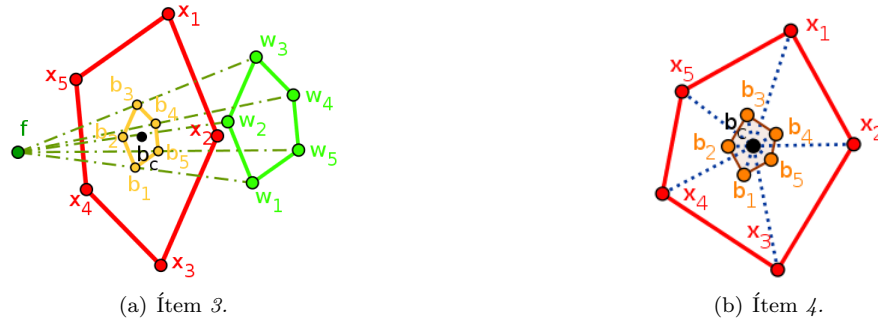


Figura 13: Ilustración 2, Teorema 4.1

Por otro lado, se tiene que  $b_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ , y por definición de homotecia

$$H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x_i) = \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4} - \frac{1}{4}x_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} = b_i. \quad (4.3)$$

para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  (ver (b), Figura 13). En particular, tomando en cuenta la ecuación (4.3), se tiene que

$$b_i = \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x_i \implies b_i + \frac{1}{4}x_i = \frac{5}{4}b_c \implies 4b_i + x_i = 5b_c \implies \frac{4}{5}b_i + \frac{1}{5}x_i = b_c$$

para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , y por tanto  $b_c$  es un punto del segmento  $[b_i, x_i]$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Por último, nótese que  $H_{b_i, -3}(f) = 4b_i - 3f$  y  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$  para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  (ver Figura 14). Por tanto,

$$H_{b_i, -3}(f) = x_j + x_k + x_l + x_s - 3f$$

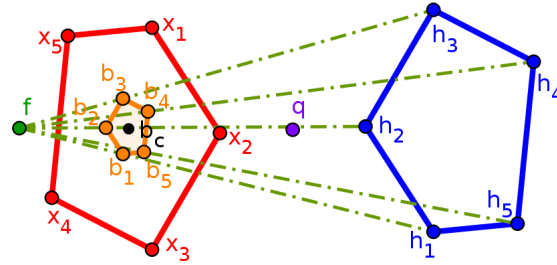


Figura 14: Ítem 5., Teorema 4.1

Así, usando la ecuación 4.1, se tiene que  $h_i = H_{b_i, -3}(f)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .  $\square$

Basados en el ítem 1. del Teorema 4.1, se establece la definición de antipentágono para un pentágono cualquiera, con respecto a un punto en el plano, de la siguiente manera:

**Definición 4.1.** Sea  $M$  un plano de Minkowski. Sea  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  el conjunto de vértices del pentágono  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5}$ ) en  $M$ , y sea  $b_c = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$ . Sean  $f \in M$ , donde  $f \notin \mathcal{V}_5$ , y  $q = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f)$ . Se dice que el pentágono  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5}$ ) es el  $f$ -antipentágono de  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5}$ ) si  $\mathcal{H}_5 = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  y  $h_i = S_q(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Teorema 4.2.** Sean  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  y  $f$ , puntos distintos en un plano de Minkowski  $M$ . Sean  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $w_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ) con su  $f$ -anticuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5}$ ), y  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$ , para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Sean  $b_c = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{5}$ ,  $q = H_{b_c, -\frac{3}{2}}(f)$ , y  $h_i = S_{w_i}(f)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , entonces se cumple:

1. Si  $z_i = S_q(w_i)$ , los segmentos  $[b_i, z_i]$  se intersectan en el punto  $g = H_{b_c, -\frac{2}{3}}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .
2. Los segmentos  $[h_i, h_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . En particular,  $h_i - h_j = 2(w_i - w_j)$ .

3. Si  $t = S_q(f)$  y  $z_i = S_q(w_i)$ , entonces  $z_i = H_{t, \frac{1}{3}}(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , y  $z_i - z_j = w_j - w_i$  para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Además,  $z_i$  es el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5^i}$  ( $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_5^i}$ ) con su  $t$ -anticuadrilátero.
4. Los segmentos  $[x_i, x_j]$ ,  $[b_i, b_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos, para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . En particular  $b_i - b_j = \frac{1}{4}(x_j - x_i)$ .

*Demostración.* Nótese que la solución del sistema

$$\begin{cases} (1 - t_1) b_1 + t_1 z_1 = y_1 \\ (1 - t_2) b_2 + t_2 z_2 = y_2 \\ (1 - t_3) b_3 + t_3 z_3 = y_3 \\ (1 - t_4) b_4 + t_4 z_4 = y_4 \\ (1 - t_5) b_5 + t_5 z_5 = y_5 \end{cases} \quad (4.4)$$

con  $t_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , muestra el punto  $g$  de intersección de los segmentos  $[b_i, z_i]$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ver (a), Figura 15).

Tomando en cuenta los valores de  $z_i$ ,  $b_i$  y de  $w_i$  se tiene que igualando dos ecuaciones cualesquiera del sistema (4.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} (1 - t_i) b_i + t_i z_i &= (1 - t_j) b_j + t_j z_j, \\ (1 - t_i) b_i + t_i(2q - w_i) &= (1 - t_j) b_j + t_j(2q - w_j) \\ (t_i - t_j)2q + (1 - t_i) \left( \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} \right) - t_i w_i &= (1 - t_j) \left( \frac{x_i + x_k + x_l + x_s}{4} \right) - t_j w_j \\ \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} t_i - t_j \right) x_j + \left( t_i - \frac{1}{4} t_j - \frac{1}{4} \right) x_i - \frac{1}{4} (t_j - t_i) (x_k + x_l + x_s) - 2(t_i - t_j) f &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} t_i - 4t_j = -1 \\ 4t_i - t_j = 1 \\ t_i - t_j = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

cuya solución está dada por  $t_i = \frac{1}{3} = t_j$ . Así,  $t_i = \frac{1}{3}$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

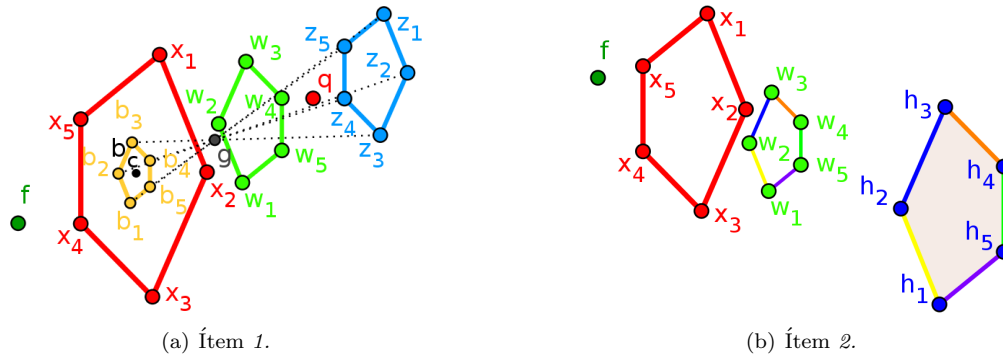


Figura 15: Ilustración 1, Teorema 4.2

Sustituyendo  $t_i$  en la  $i$ -ésima ecuación de (4.4), y utilizando el hecho de que  $q = H_{b_c, -\frac{2}{3}}(f)$  (ítem 1., Teorema 4.1) y  $w_i = H_{b_i, -1}(f)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ítem 3., Teorema 4.1), se obtiene que

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) b_i + \frac{1}{3} z_i = \frac{2}{3} b_i + \frac{2}{3} q - \frac{1}{3} w_i = \frac{2}{3} b_i + \frac{5}{3} b_c - f - \frac{1}{3} w_i = \frac{2}{3} b_i + \frac{5}{3} b_c - f - \frac{1}{3} (2b_i - f) = \frac{5}{3} b_c - \frac{2}{3} f$$

Así, el punto de intersección es  $g = \frac{5}{3} b_c - \frac{2}{3} f$  y por tanto  $g = H_{b_c, -\frac{2}{3}}(f)$ .

Nótese que  $h_i = S_{w_i}(f)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ver (b), Figura 15). Por tanto, para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,

$$h_i - h_j = S_{w_i}(f) - S_{w_j}(f) = (2w_i - f) - (2w_j - f) = 2(w_i - w_j).$$

Se tiene que  $z_i = S_q(w_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ver (a), Figura 16), entonces

$$z_i - z_j = S_q(w_i) - S_q(w_j) = (2q - w_i) - (2q - w_j) = w_j - w_i,$$

para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

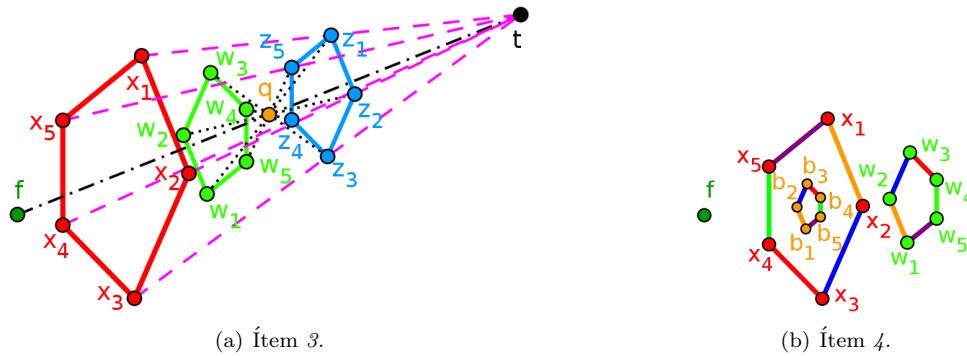


Figura 16: Ilustración 2, Teorema 4.2

Como  $t = S_q(f)$ , se obtiene que

$$H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_i = q + \frac{x_i - f}{2} = q + \frac{x_i - f}{2} + \left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}\right) - w_i = 2q - w_i = z_i$$

Veamos que  $z_i = \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2t}{2}$ , para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . En efecto, como  $t = S_q(f)$

$$\begin{aligned} \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2t}{2} &= \frac{(2q - x_j) + (2q - x_k) + (2q - x_l) + (2q - x_s) - 2t}{2} \\ &= \frac{8q - (x_j + x_k + x_l + x_s) - 4q + 2f}{2} \\ &= \frac{4q - (x_j + x_k + x_l + x_s - 2f)}{2} = 2q - w_i = z_i. \end{aligned}$$

Por el ítem 2. del Teorema 4.1 se tiene que los segmentos  $[x_i, x_j]$  y  $[h_i, h_j]$  son paralelos (ver Figura 16). Luego, por el ítem 2., se tiene que los segmentos  $[h_i, h_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos. Así, por transitividad se tiene que los segmentos  $[x_i, x_j]$  y  $[w_i, w_j]$  son paralelos. Por último, basta ver que

$$b_i - b_j = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4} - \frac{x_i + x_k + x_l + x_s}{4} = \frac{x_j - x_i}{4}.$$

□

Nótese que el ítem 3., del teorema precedente, dice que  $S_q(w_i) = H_{t, \frac{1}{2}}(x_i) = \frac{t + x_i}{2}$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Teorema 4.3.** Sean  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , un conjunto de puntos distintos en un plano de Minkowski  $M$ , pertenecientes a la circunferencia  $\mathcal{C}(x, r)$ . Sea  $w_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$  con su  $x$ -anticuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_5^i}$ , para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Sean  $h_i = S_{w_i}(x)$  el  $\mathcal{C}$ -ortocentro del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_5^i}$ ,  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$ ,  $c_h = S_q(x)$ , y  $z_i = S_q(w_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , entonces se cumple:

1.  $h_i \in \mathcal{C}(c_h, r)$ , es decir,  $c_h$  es el circuncentro del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4^i}$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .
2.  $z_i \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ , es decir,  $q \in \mathcal{C}(z_i, \frac{r}{2})$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .
3.  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) = H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ .
4.  $z_i = H_{c_h, \frac{1}{2}}(x_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Además,  $z_i$  es el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_4^i}$  y su  $c_h$ -anticuadrilátero para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , es decir,  $z_i = \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2c_h}{2}$ , para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

*Demostración.* Sabiendo que  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$  y  $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \|c_h - h_i\| &= \|S_q(x) - S_{w_i}(x)\| = \|2q - 2w_i\| = \\ &= \|(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x) - (x_j + x_k + x_l + x_s - 2x)\| = \|x_i - x\| = r \end{aligned}$$

para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , (ver (a), Figura 17).

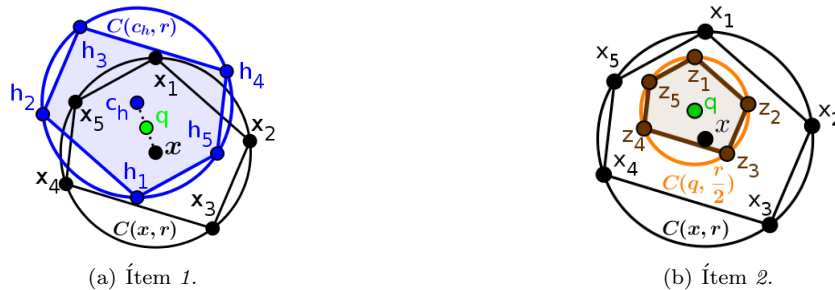


Figura 17: Ilustración 1, Teorema 4.3

Dado que  $z_i = S_q(w_i)$ , y teniendo los valores de  $q$  y  $w_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ver (b), Figura 17). Se tiene que

$$\|q - z_i\| = \|w_i - q\| = \left\| \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} - \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2} \right\| = \frac{\|x - x_i\|}{2} = \frac{r}{2}$$

para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y por tanto,  $z_i \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Sea  $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ , es decir,  $\|q - y\| = \frac{r}{2}$ . Se verá que  $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$  (ver (a), Figura 18). Supongamos existe  $w \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w)$ . Determinemos ¿quién sería un  $w$  que cumpla tal condición?. Así,

$$y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = \frac{c_h + w}{2}$$

de donde  $w = 2y - c_h$ . Ahora veamos que  $w \in \mathcal{C}(x, r)$ . En efecto,

$$\|x - w\| = \|x - (2y - c_h)\| = \|x - 2y + (2q - x)\| = 2\|q - y\| = r.$$

lo que implica que  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) \subseteq H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ . Tómese ahora  $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ , por tanto existe  $z \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(z)$ . Veamos que  $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ . Así,

$$\|q - y\| = \left\| q - \left( \frac{c_h + z}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|2q - c_h - z\| = \frac{1}{2} \|2q - (2q - x) - z\| = \frac{1}{2} \|x - z\| = \frac{r}{2}$$

De manera que,  $H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r)) \subseteq \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ .

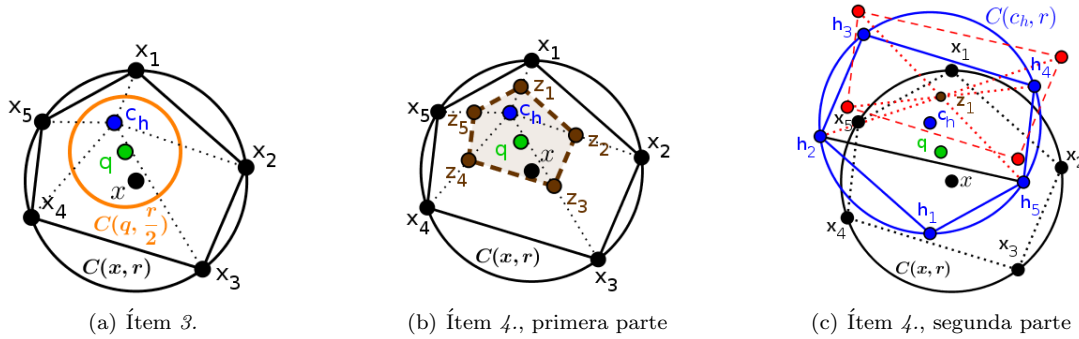


Figura 18: Ilustración 2, Teorema 4.3

Veamos que  $\frac{c_h + x_i}{2} = 2q - w_i$  (ver (b), Figura 18). Por un lado se tiene

$$\frac{c_h + x_i}{2} = \frac{2q - x + x_i}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 4x + x_i}{2} = x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} 2q - w_i &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x) - \left( \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} \right) = \\ &= x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2x. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De las ecuaciones (4.6) y (4.7) se obtiene lo deseado.

Mostremos ahora que

$$\frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2c_h}{2} = x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2x.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{h_j + h_k + h_l + h_s - 2c_h}{2} &= \frac{2(w_j + w_k + w_l + w_s) - 4x - 2(2q - x)}{2} \\ &= w_j + w_k + w_l + w_s - 2q - x. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como se tiene que  $w_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2}$ , por el ítem 3. del Teorema 4.1, entonces

$$\begin{aligned} w_j + w_k + w_l + w_s - 2q - x &= \frac{4x_i + 3x_j + 3x_k + 3x_l + 3x_s - 8x}{2} - 2q - x \\ &= 2x_i + 3\left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2}\right) - 5x - 2q. \end{aligned}$$

Ahora, como  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$ , se tiene que

$$w_j + w_k + w_l + w_s - 2q - x = x_i + \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2x. \quad (4.9)$$

Así, por las ecuaciones (4.8) y (4.9) se obtiene lo deseado (ver (c), Figura 18).  $\square$

**Teorema 4.4.** *Sea  $M$  un plano de Minkowski. Sean el conjunto de puntos distintos  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , la circunferencia  $\mathcal{C}(x, r)$ , con  $x_i \in \mathcal{C}(x, r)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , y  $f$  un punto en  $M$  tal que  $f \notin \mathcal{V}_5$ . Sean  $q_x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2}$ ,  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2}$  y  $b_c = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i}{5}$ . Sean  $b_i = \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{4}$  y  $w_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4}(\mathcal{P}_{\mathcal{X}_4})$  con su  $f$ -anticuadrilátero para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $c_h = S_q(x)$ ; y  $h_i = S_q(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , entonces se cumple:*

1. Si  $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $b_i$ , entonces  $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}) = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$ .
2. Si  $c_w = H_{c_b, -1}(f)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$ , entonces  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, 2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$ .
3. Si  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  es el centro de una circunferencia que contiene los  $w_i$ , entonces  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ . Además,  $S_{c_w}(q_x) = S_q(c_w)$ .
4.  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) = H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$ , entonces  $\|c_b - y\| = \frac{r}{4}$ . Veamos que  $y \in H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$ . Supóngase que existe  $w \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $y = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(w)$ . Determinemos ¿quién debería ser  $w$ ?

$$y = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(w) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) b_c - \frac{1}{4} w = \frac{5}{4} b_c - \frac{1}{4} w,$$

por lo tanto  $w = 5b_c - 4y$ .

Ahora, veamos si  $w \in \mathcal{C}(x, r)$ . Así, dado que  $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x)$ , se tiene que

$$\|x - w\| = \|x - (5b_c - 4y)\| = 4 \left\| \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}b_c + y \right\| = 4 \left\| y - \left( \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x \right) \right\| = 4 \|y - c_b\| = r,$$

de manera que  $\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}) \subset H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$  (ver (a), Figura 19).

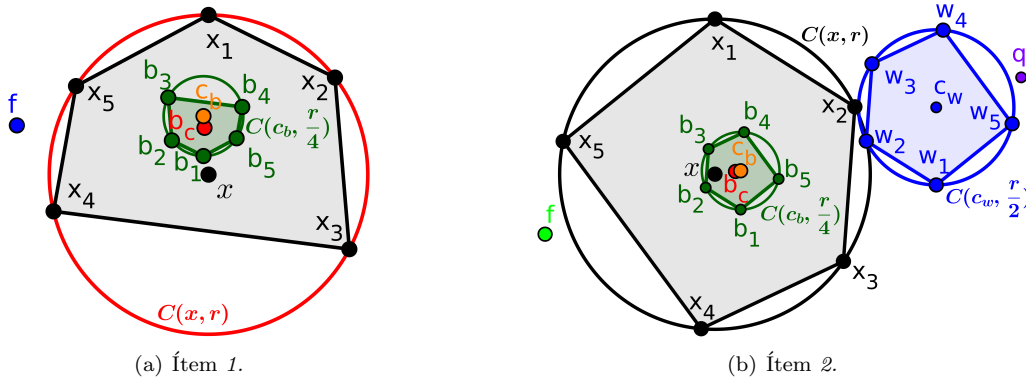


Figura 19: Ilustración 1, Teorema 4.4

Recíprocamente, sea  $y \in H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r))$ , entonces existe  $z \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $y = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(z)$ . Teniendo en cuenta que  $\|x - z\| = r$  y  $c_b = H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x)$ , entonces

$$\|c_b - y\| = \left\| H_{b_c, -\frac{1}{4}}(x) - H_{b_c, -\frac{1}{4}}(z) \right\| = \left\| \left( \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}x \right) - \left( \frac{5}{4}b_c - \frac{1}{4}z \right) \right\| = \frac{1}{4} \|z - x\| = \frac{r}{4}.$$

Así  $\|c_b - y\| = \frac{r}{4}$ , y por tanto  $H_{b_c, -\frac{1}{4}}(\mathcal{C}(x, r)) \subset \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$

Probemos ahora que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f, 2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$  (ver (b), Figura 19). Tómesese  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , es decir,  $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$ . Verifiquemos entonces que  $y \in H_{f, 2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$ . Supóngase que existe  $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$  tal que  $y = H_{f, 2}(w)$ . Determinemos ¿qué forma debería tener tal  $w$ ?

$$y = H_{f, 2}(w) = (1 - 2)f + 2w = 2w - f.$$

Por tanto  $w = \frac{f + y}{2}$ . Veamos que  $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$ . Así, como  $c_w = H_{c_b, -1}(f)$ , se tiene que

$$\|c_b - w\| = \left\| c_b - \left( \frac{f + y}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|2c_b - (f + y)\| = \frac{1}{2} \|c_w - y\| = \frac{r}{4}.$$



de manera que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f,2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$

Recíprocamente, tomemos  $y \in H_{f,2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4}))$ . Por tanto, existe  $w \in \mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})$  tal que  $y = H_{f,2}(w)$ . Probemos que  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , es decir,  $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$ . Tomando en cuenta que  $c_w = H_{c_b,-1}(f)$  y  $\|c_b - w\| = \frac{r}{4}$ , se tiene que

$$\|c_w - y\| = \|2c_b - f - (-f + 2w)\| = 2\|c_b - w\| = \frac{r}{2},$$

de manera que  $H_{f,2}(\mathcal{C}(c_b, \frac{r}{4})) \subset \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ .

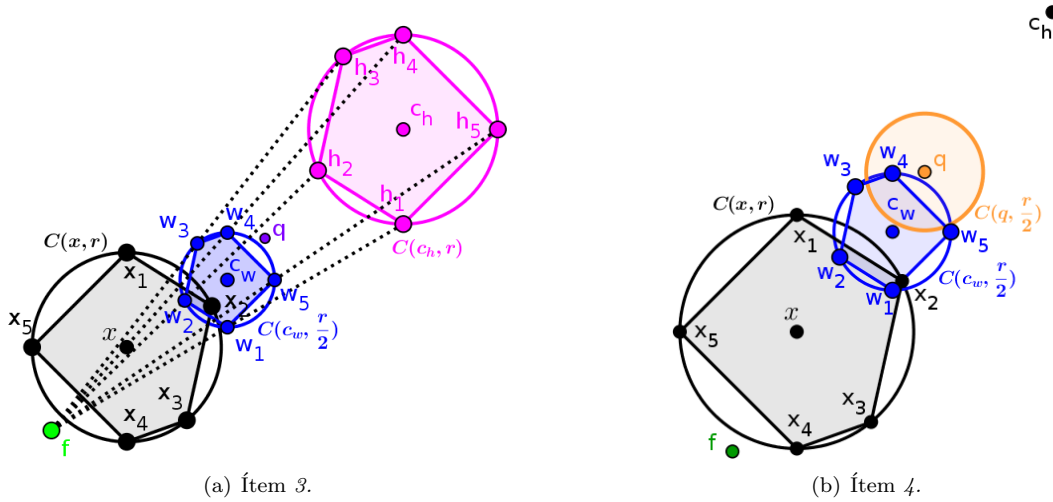


Figura 20: Ilustración del ítem 3., Teorema 4.4

Veamos que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) = H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$  (ver (a), Figura 20). Si  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , es decir, si  $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$ , entonces  $y \in H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ . Supóngase que existe  $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$  tal que  $y = H_{f,\frac{1}{2}}(w)$ . Determinemos ahora ¿quién debería ser este  $w$ ?

$$y = H_{f,\frac{1}{2}}(w) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) f + \frac{1}{2} w = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} w,$$

por tanto  $w = 2y - f$ . Ahora, veamos que  $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$ . Así, como  $c_w = H_{f,\frac{1}{2}}(c_h)$ , se tiene que

$$\|c_h - w\| = \|c_h - (2y - f)\| = \|c_h - 2y + f\| = 2 \left\| \frac{f + c_h}{2} - y \right\| = \|c_w - y\| = r$$

de manera que  $\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}) \subset H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ .

Recíprocamente, sea  $y \in H_{f,\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r))$ . Por tanto, existe  $w \in \mathcal{C}(c_h, r)$  tal que  $y = H_{f,\frac{1}{2}}(w)$ . Veamos que  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , es decir, que  $\|c_w - y\| = \frac{r}{2}$ . Ahora, como  $c_w = H_{f,\frac{1}{2}}(c_h)$ , se tiene que

$$\|c_w - y\| = \left\| H_{f,\frac{1}{2}}(c_h) - H_{f,\frac{1}{2}}(w) \right\| = \frac{1}{2} \|c_h - w\| = \frac{r}{2},$$

de manera que  $H_{f, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(c_h, r)) \subset \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ .

Luego, dado que  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  y  $c_h = S_q(x)$ , se tiene

$$S_{c_w}(q_x) = 2c_w - q_x = c_h + f - q_x = 2q - x + f - q_x = 2q - (x - f + q_x). \quad (4.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x - f + q_x &= x - f + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3x}{2} = \\ &= \frac{1}{2}f + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2} - \frac{1}{2}x \\ &= q - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}(2q - x + f) = \frac{1}{2}(c_h + f) = c_w. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Así, de las ecuaciones (4.10) y (4.11), se tiene que  $S_{c_w}(q_x) = S_q(c_w)$ . Obteniendo la demostración del ítem 3.

Por último, nótese que por hipótesis se tiene que  $c_h = S_q(x)$ , (ver (b), Figura 20). Ahora sea  $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ , es decir,  $\|q - y\| = \frac{r}{2}$ . Veamos que  $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ . Supóngase que existe  $w \in \mathcal{C}(x, r)$  tal que  $H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = y$ . Determinemos entonces ¿cuál sería tal  $w$ ? Nótese que

$$y = H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = \frac{1}{2}c_h + \frac{1}{2}w,$$

de donde  $w = 2y - c_h$ . Veamos que dicho  $w$  está en  $\mathcal{C}(x, r)$ . En efecto,

$$\|x - w\| = \|x - (2y - c_h)\| = \|x - 2y + 2q - x\| = 2\|y - q\| = 2\frac{r}{2} = r,$$

y por tanto  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2}) \subset H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ .

Tómese ahora un  $y \in H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r))$ , entonces existe un  $w \in \mathcal{C}(x, r)$ , es decir  $\|x - w\| = \frac{r}{2}$ , tal que  $H_{c_h, \frac{1}{2}}(w) = y$ . Veamos que  $y \in \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ , es decir,  $\|q - y\| = \frac{r}{2}$ . En efecto,

$$\|q - y\| = \left\| q - \left( \frac{w + c_h}{2} \right) \right\| = \left\| q - \frac{w}{2} - \left( \frac{2q - x}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2}\|x - w\| = \frac{r}{2}.$$

De manera que  $H_{c_h, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, r)) \subset \mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ . □

**Teorema 4.5.** *Sea  $M$  un plano de Minkowski. Sean el conjunto de puntos distintos  $\mathcal{V}_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , la circunferencia  $\mathcal{C}(x, r)$  con  $x_i \in \mathcal{C}(x, r)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , y el punto  $f$  en  $M$  tal que  $f \notin \mathcal{V}_5$ . Sean  $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3f}{2}$ ;  $q_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4^i}$  con su  $x$ -anticuadrilátero,  $w_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4^i}$  con su  $f$ -anticuadrilátero, para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $c_h = S_q(x)$ ;  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  y  $h_i = S_q(x_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Entonces se cumple:*

1.  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$  contiene los puntos medios de los segmentos  $[x, h_i]$  y  $[c_h, x_i]$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , es decir, los puntos  $H_{c_h, \frac{1}{2}}(x_i)$  y  $H_{x, \frac{1}{2}}(h_i)$  están en la circunferencia  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

2. Sea  $c_z = S_q(c_w)$  y  $z_i = S_q(w_i)$ , entonces  $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2}) = S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .
3. El punto  $u_i = S_{w_i}(q_i)$  está en la circunferencia  $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$ , también cumple que  $u_i - u_j = w_i - w_j = q_i - q_j$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Además,  $S_{w_i}(q_i) = S_{c_z}(z_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .
4. Si  $e_i = S_q(u_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , entonces  $e_i - e_j = u_j - u_i$ , para  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
5.  $x - f = w_i - q_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

*Demostración.* Determinemos que los puntos medios de los segmentos  $[x, h_i]$  y  $[c_h, x_i]$  están en  $\mathcal{C}(q, \frac{r}{2})$  (ver (a), Figura 21). Así, por hipótesis del teorema, se tiene que  $h_i = S_q(x_i) = 2q - x_i$  y  $c_h = S_q(x) = 2q - x$ , luego:

$$\left\| \frac{x + h_i}{2} - q \right\| = \left\| \frac{x + (2q - x_i)}{2} - q \right\| = \left\| \frac{x - x_i}{2} + q - q \right\| = \left\| \frac{x - x_i}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x - x_i\| = \frac{r}{2}.$$

y

$$\left\| \frac{c_h + x_i}{2} - q \right\| = \left\| \frac{(2q - x) + x_i}{2} - q \right\| = \left\| \frac{x_i - x}{2} + q - q \right\| = \left\| \frac{x_i - x}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x_i - x\| = \frac{r}{2}.$$

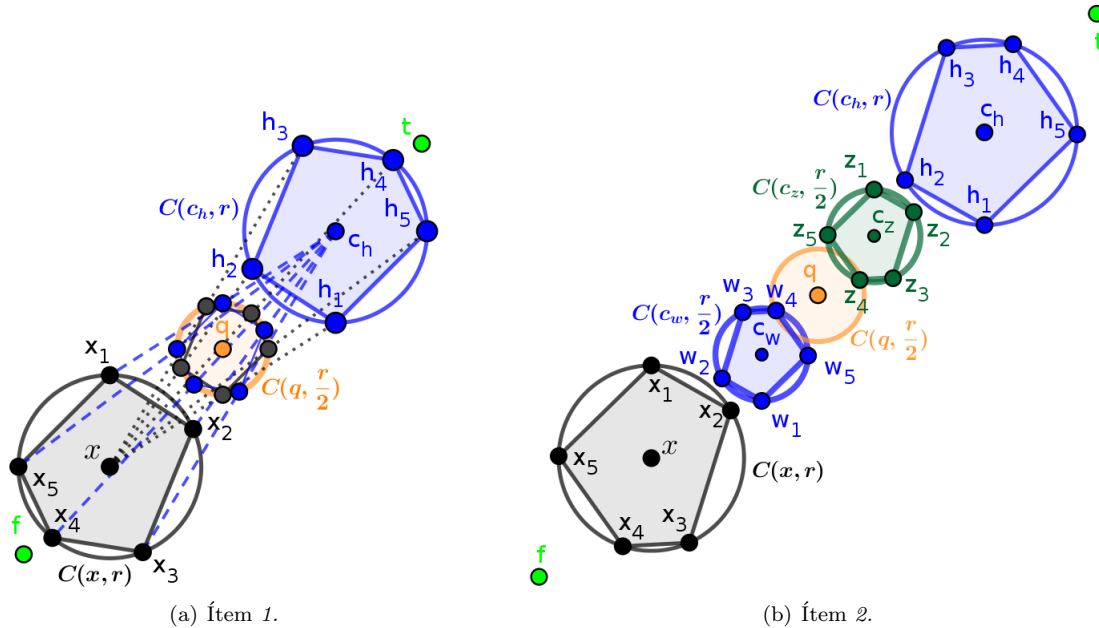


Figura 21: Ilustración 1, Teorema 4.5

Se probará ahora que si  $c_z = S_q(c_w)$  y  $z_i = S_q(w_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , entonces  $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2}) = S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$  (ver (b), Figura 21). Veamos que si  $y \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$ , entonces  $S_q(y) \in \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$ . Por tanto

$$\|S_q(y) - c_z\| = \|(2q - y) - c_z\| = \|(2q - y) - (2q - c_w)\| = \|c_w - y\| = \frac{r}{2},$$

de manera que  $S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})) \subset \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$ .

Ahora sea  $y \in S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$ , entonces existe un  $w \in \mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2})$  tal que  $y = S_q(w)$ . Debemos ver que  $y \in \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$ , es decir,

$$\|c_z - y\| = \|c_z - S_q(w)\| = \|2q - c_w - (2q - w)\| = \|w - c_w\| = \frac{r}{2}.$$

Así,  $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2}) \subset S_q(\mathcal{C}(c_w, \frac{r}{2}))$

Procedamos a probar que  $S_{w_i}(q_i) = S_{c_z}(z_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ver (a), Figura 22). Así,

$$\begin{aligned} S_{w_i}(q_i) &= 2w_i - q_i = 2\left(\frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2}\right) - \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} \\ &= \frac{x_j + x_k + x_l + x_s}{2} - 2f + x = w_i - f + x \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por otro lado, como  $c_h = S_q(x)$ ,  $c_w = H_{f, \frac{1}{2}}(c_h)$  y  $z_i = S_q(w_i)$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , se tiene que

$$S_{c_z}(z_i) = 2c_z - z_i = 2S_q(c_w) - S_q(w_i) = 2(2q - c_w) - (2q - w_i) = 2q - 2c_w + w_i \tag{4.13}$$

$$= 2q - 2\left(\frac{f + c_h}{2}\right) + w_i = 2q - f - c_h + w_i = -f + x + w_i. \tag{4.14}$$

Así, de las ecuaciones (4.12) y (4.14) se tiene lo deseado.

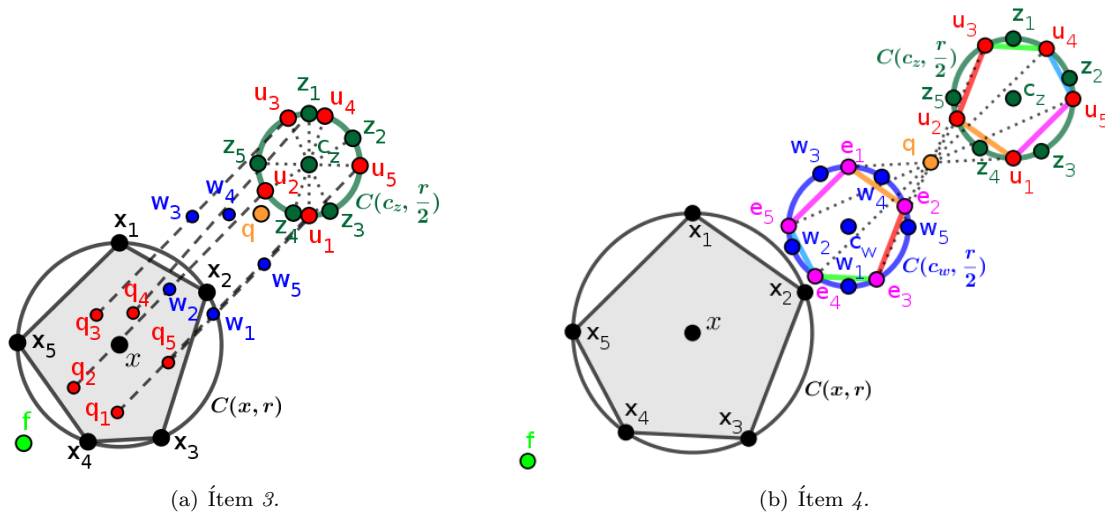


Figura 22: Ilustración 2, Teorema 4.5

Veamos ahora que el punto  $u_i = S_{w_i}(q_i)$  está en la circunferencia  $\mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Por tanto,

$$\|c_z - u_i\| = \|S_q(c_w) - S_{w_i}(q_i)\| = \|2q - c_w - (2w_i - q_i)\| \tag{4.15}$$

Luego, por la ecuación (4.13), se tiene que

$$\|2q - c_w - (2w_i - q_i)\| = \|2q - c_w - (2q - 2c_w + w_i)\| = \|c_w - w_i\| = \frac{r}{2} \tag{4.16}$$

Así, por las ecuaciones (4.15) y (4.16), se tiene que  $u_i \in \mathcal{C}(c_z, \frac{r}{2})$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Probemos que  $u_i - u_j = w_i - w_j = q_i - q_j$  para  $\{i, j\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Claramente,

$$u_i - u_j = S_{c_z}(z_i) - S_{c_z}(z_j) = z_i - z_j = S_q(w_i) - S_q(w_j) = w_i - w_j \quad (4.17)$$

Luego,

$$u_i - u_j = S_{w_i}(q_i) - S_{w_j}(q_j) = 2w_i - q_i - (2w_j - q_j) = 2(w_i - w_j) + (q_j - q_i) \quad (4.18)$$

De manera que, por las ecuaciones (4.17) y (4.18), se tiene que

$$u_i - u_j = 2(u_i - u_j) + (q_j - q_i) \implies q_i - q_j = u_i - u_j.$$

Si  $u_i = S_q(e_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (ver (b), Figura 22), entonces

$$u_j - u_i = S_q(e_i) - S_q(e_j) = (2q - e_i) - (2q - e_j) = e_j - e_i.$$

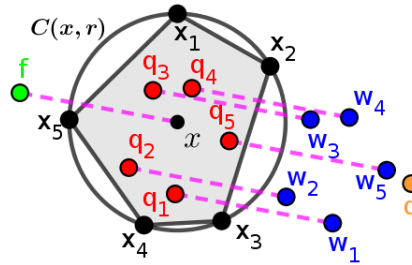


Figura 23: Ilustración 3, Teorema 4.5. Ítem 5.

Por último, (ver Figura 23), sea  $w_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4^i}$  con su  $f$ -anticuadrilátero,  $q_i$  el punto de simetría del cuadrilátero  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}_4^i}$  con su  $x$ -anticuadrilátero, para  $\{i, j, k, l, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , tenemos que

$$w_i - q_i = \left( \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2f}{2} \right) - \left( \frac{x_j + x_k + x_l + x_s - 2x}{2} \right) = -\frac{2f}{2} + \frac{2x}{2} = x - f.$$

□

## Referencias

- [1] Johson, R. A. *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. 2007. ISBN-10: 0-486-46237-4.
- [2] Martini, H. and Spirova, M. (2007). *The Feuerbach circle and orthocentricity in normed planes*. *L'Enseignement Mathématique*. **53**(2) (2007),237–258.
- [3] Martini, H.; Swanepoel, K. J. and Weiß, G. *The Geometry of Minkowski Spaces - A Survey*. Part I. *Expositiones Math.* **19** (2001), 97–142.

- [4] Martini, H. y Swanepoel, K. J. *The Geometry of Minkowski Spaces - A Survey*. Part II. *Expositiones Math.* **22** (2004), 93–144.
- [5] Martini, H. y Wu, S. *On Orthocentric Systems in Strictly Convex Normed Planes*. *Extracta Mathematicae.* **24**(1) (2009), 31–45.
- [6] Rosas, Tobías. *C-ortocentros y Sistemas C-ortocéntricos en planos de Minkowski*. *Aleph Sub-Cero. Serie de Divulgaciones 2014-II*, 104–132.
- [7] Rosas, Tobías. *Sistemas C-ortocéntricos y circunferencia de Feuerbach para cuadriláteros en planos de Minkowski*. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.* **22**(2) (2015), 125–141.
- [8] Rosas, Tobías. *Sistemas C-ortocéntricos en planos de Minkowski y euclidianidad*. Tesis Doctoral. Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela, 2014.
- [9] Rosas, Tobías y Pacheco, Wilson. *Orthocentric systems in Minkowski planes*. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (BZAG)*. **56**(1) (2015), 249–261.
- [10] Rosas, Tobías; Pacheco, Wilson y Villegas, María. *Sistemas ortocéntricos y euclidianidad en planos de Minkowski*. *Faraute.* **8**(1) (2015), 11–18.
- [11] Thompson, A. C. *Minkowski geometry. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, **63**. Cambridge University Press. Cambridge. 1996. ISBN 0-521-40472-X.
- [12] GEOGEBRA. Versión para Windows. Última actualización el 03 de Marzo 2016. Disponible en: <http://www.geogebra.org/installers>.

# Locally defined operators in the space of functions of bounded $\Lambda$ -variation

*Operadores localmente definidos en espacios de funciones de  $\Lambda$ -variación acotada*

Wadie Aziz (wadie@ula.ve)

Universidad de Los Andes  
Trujillo - Venezuela

José A. Guerrero (jose.guerrero@isfodosu.edu.do)

Newman Zambrano (newman.zambrano@isfodosu.edu.do)

Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña  
Recinto Luis Napoleón Núñez Molina, Área Matemática  
Licey al Medio, Santiago - República Dominicana

## Abstract

We prove that every locally defined operator mapping the space of continuous and bounded  $\Lambda$ -variation functions into itself is a Nemytskii composition operator.

**Key words and phrases:** Function of bounded  $\Lambda$ -variation, local operator, Nemytskii operator, continuous function.

## Resumen

Se demuestra que cada operador localmente definido actuando entre espacios de funciones reales definidas en un intervalo de  $\Lambda$ -variación acotada es un operador de composición Nemytskii.

**Palabras y frases clave:** Funciones de  $\Lambda$ -variación acotada, operador local, operador Nemytskii, función continua.

## 1 Introduction

Let  $I$  be a closed interval of the real line  $\mathbb{R}$  and let  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(I)$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(I)$  be function spaces  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . An operator  $K : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  is called a *locally defined*, or  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ -*local operator*, briefly, a *local operator*, if for every open interval  $J \subset \mathbb{R}$  and for all functions  $f, g \in \mathcal{G}$ , the equality  $f|_{J \cap I} = g|_{J \cap I}$  implies  $K(f)|_{J \cap I} = K(g)|_{J \cap I}$  (where  $f|_{J \cap I}$  denotes the restriction of  $f$  to  $J \cap I$ ). The mappings of this type are sometimes called the *operators with memory*. The main result of this paper, Theorem 3.1, gives a representation formula for locally defined operators. We obtain the main result of [4] saying that the operator  $K$  must be of the form

$$K(f)(x) = h(x, f(x)), \quad x \in I,$$

where  $h$  is uniquely determined function. In the present paper we are mainly interested in such that operators in the case  $\mathcal{G} = \mathcal{H}$  is the class of continuous and  $\Lambda$ -bounded variation functions denoted by  $C\Lambda BV(I)$ .

In the spaces of the measurable functions, the acting of the locally defined operators were considered by many authors (cf. [2]). Local operators mapping the space  $C^m(I)$  of  $m$ -times continuously differentiable functions in an interval  $I \subset \mathbb{R}$  into  $C^0(I)$  and  $C^1(I)$  were considered in [4]. Subsequently, this result has been extended by several authors: [5], [6], [9] (for spaces Whitney differentiable functions), [7], [11] (for space of Hölder functions), [10] (for continuous and monotone functions), [12] (for functions of bounded  $\varphi$ -variation in the sense Wiener) and [3] (for functions of bounded  $p$ -variation in the sense Riesz). In the present paper we are interested on such operators in the context of bounded  $\Lambda$ -variation functions. In particular, we show that, if the operator  $K$  maps the space  $\Lambda BV(I)$  into itself and is locally defined, then  $K$  is a Nemytskii composition operator.

## 2 Notation and Preliminaries

In this section we present some necessary notations and definitions and recall some known concerning the bounded  $\Lambda$ -variation.

In the sequel,  $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}$  denote, respectively, the set of positive integers, nonnegative integers and the set of real numbers.

Let us start with the notion of  $\Lambda$ -bounded variation introduced by D. Waterman [8] in 1972. Let  $f$  be a real-valued function defined on an interval  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\{I_n\}$  be a sequence of non-overlapping intervals  $I_n = [a_n, b_n] \subset I$  and let  $\Lambda$  denote a nondecreasing sequence of positive numbers  $\lambda_n$  such that  $\sum_n \frac{1}{\lambda_n}$  is divergent. A function  $f$  is said to be  $\Lambda$ -bounded variation ( $\Lambda BV$ ) if for every sequence  $\{I_n\}$  we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < \infty, \quad \text{where } f(I_n) = f(b_n) - f(a_n).$$

In the particular case when  $\Lambda = \{n\}$ , we say that  $f$  is of harmonic bounded variation. If  $f$  has a  $\Lambda$ -bounded variation, then the  $\Lambda$ -variation of  $f$  on an interval  $[a, x]$  ( $a \leq x \leq b$ ) is defined in the following way

$$V_{\Lambda}(f) = V_{\Lambda}(f, [a, x]) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} \right\},$$

where the supremum is taken over all sequences of non-overlapping intervals  $\{I_n\}$  such that  $\bigcup I_n \subseteq [a, x]$ . We remark that  $\Lambda BV$  functions have some of the properties that  $BV$  (functions which have bounded variation in the sense of Jordan) have. For example, a  $\Lambda BV$  function is bounded and its discontinuities are at most denumerable ([8, p. 108]).

By  $\Lambda BV(I) = \Lambda BV(I, \mathbb{R})$  we will denote the space of all functions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$V_{\Lambda}(f) = V_{\Lambda}(f, I) < \infty,$$

with the norm

$$\|f\|_{\Lambda} = |f(a)| + V_{\Lambda}(f), \quad f \in BV(I, \mathbb{R}),$$



$\Lambda BV(I)$  is a Banach space.

From now on, let  $C\Lambda BV(I) = C(I) \cap \Lambda BV(I)$ , where  $C(I)$  stands for the space of continuous functions defined on  $I$ .

**Lemma 2.1.** *Let  $I \subset \mathbb{R}$  be an interval and let  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ ,  $x_0 < \sup(I)$  be fixed. Then for every sequence  $(x_k, y_k) \in I \times \mathbb{R}$  satisfying the condition*

$$x_{k+1} < x_k; \quad y_{k+1} < y_k, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0), \quad (2.1)$$

there exist a function  $\gamma \in C\Lambda BV(I)$  such that, for all  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\gamma(x_k) = y_k.$$

*Proof.* Take an arbitrary sequence  $(x_k, y_k) \in I \times \mathbb{R}$  satisfying (2.1) and define a sequence of functions  $\gamma_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , by

$$\gamma_k(x) := \begin{cases} y_0 & \text{for } x \in [a, x_0]; \\ \frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}(x - x_0) + y_0 & \text{for } x \in (x_0, x_k]; \\ \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + y_i & \text{for } x \in (x_i, x_{i-1}], \quad i \in \{2, \dots, k\}; \\ y_1 & \text{for } x \in (x_1, b]. \end{cases}$$

Let us observe that

$$\gamma_k(x_0) = y_0, \quad \gamma_k(x_k) = \gamma_{k+\ell}(x_k) = y_k, \quad k, \ell \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

and for every  $x \in I \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$  there exist  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that

$$\gamma_k(x) = \gamma_{k_0}(x), \quad k \geq k_0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Put

$$\gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(x), \quad x \in I. \quad (2.4)$$

From (2.2) and (2.3), the function  $\gamma$  is well defined. Moreover,  $\gamma$  is nondecreasing and

$$\gamma(x_k) = y_k, \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}_0,$$

and by (2.4), for each  $\epsilon > 0$ , we obtain

$$|\gamma_k(x) - \gamma(x)| < \epsilon, \quad \text{for all } x \in I,$$

so  $\|\gamma_k - \gamma\|_\infty \leq \epsilon$ . Thus the sequence  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tends uniformly to  $\gamma$ .

Since  $\gamma_k \in C\Lambda BV(I)$  for all  $k \in \mathbb{N}$ , for any  $\{I_n\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , of non-overlapping intervals  $[a_n, b_n] = I_n \subset I$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma(b_n) - \gamma(a_n)|}{\lambda_n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_k(b_n) - \gamma_k(a_n)|}{\lambda_n} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} V_\Lambda(\gamma_k, I) < \infty, \end{aligned}$$

thus  $V_\Lambda(\gamma, I) < \infty$  and therefore  $\gamma \in C\Lambda BV(I)$ . □

*Remark 2.1.* If  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$  where  $x_0 > \inf(I)$  and  $(x_k, y_k) \in I \times \mathbb{R}$  is a sequence satisfying the condition

$$x_k < x_{k+1}; \quad y_k \leq y_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0),$$

then there exist a function  $\gamma \in C\Lambda BV(I)$  such that, for all  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\gamma(x_k) = y_k.$$

### 3 Locally defined operators

Now, we are in position to introduce the definition of the local defined operators of type  $K : C\Lambda BV(I) \rightarrow C(I)$ .

**Definition 3.1.** An operator  $K : C\Lambda BV(I) \rightarrow C(I)$  is said to be locally defined, if for every two functions  $f, g \in C\Lambda BV(I)$  and for every open interval  $J \subset \mathbb{R}$ ,

$$f|_{J \cap I} = g|_{J \cap I} \quad \Rightarrow \quad K(f)|_{J \cap I} = K(g)|_{J \cap I}.$$

The main result reads as follows.

**Theorem 3.1.** *If a locally defined operator  $K$  maps  $C\Lambda BV(I)$  into  $C(I)$  then there exist a unique function  $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that, for all  $f \in C\Lambda BV(I)$ ,*

$$K(f)(x) = h(x, f(x)), \quad x \in I.$$

*Proof.* We begin by showing that for every  $f, g \in C\Lambda BV(I)$  and for every  $x_0 \in \text{int}(I)$  the condition

$$f(x_0) = g(x_0) \tag{3.1}$$

implies that

$$K(f)(x_0) = K(g)(x_0).$$

To this end choose arbitrary  $x_0 \in \text{int}(I)$  and take an arbitrary pair of functions  $f, g \in C\Lambda BV(I)$  which fulfil (3.1) (that is  $f(x_0) = g(x_0)$ ). The function  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$\gamma(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in [a, x_0]; \\ g(x) & \text{for } x \in (x_0, b] \end{cases}$$

belongs to  $C\Lambda BV(I)$ . Indeed, define the functions  $f_1, g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - f(x_0) & \text{for } x \in [a, x_0]; \\ 0 & \text{for } x \in (x_0, b] \end{cases}$$

and

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in [a, x_0]; \\ g(x) - g(x_0) & \text{for } x \in (x_0, b]. \end{cases}$$

Since  $f, g \in CABV(I)$ ,  $f, g$  are continuous on  $I$ ,  $V_\Lambda(f) < \infty$  and  $V_\Lambda(g) < \infty$ . For any  $\{I_n\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , of non-overlapping intervals  $[a_n, b_n] = I_n \subset I$  with  $a_{n_0} < x_0 < b_{n_0}$  for some  $1 < n_0 < N$ , we have

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{|f_1(b_i) - f_1(a_i)|}{\lambda_i} &\leq \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{|f_1(b_i) - f_1(a_i)|}{\lambda_i} \\ &\quad + \frac{|f_1(x_0) - f_1(a_{n_0})|}{\lambda_{n_0}} + \frac{|f_1(b_{n_0}) - f_1(x_0)|}{\lambda_{n'_0}} \\ &\leq V_\Lambda(f). \end{aligned}$$

Hence  $V_\Lambda(f_1) < \infty$ . By a similar reasoning, we have  $V_\Lambda(g_1) < \infty$ . It is clear that  $f_1, g_1 \in C(I)$ . Finally  $f_1 + g_1 \in CABV(I)$ , as  $CABV(I)$  is a linear space. Thus

$$V_\Lambda(f_1 + g_1) < \infty. \tag{3.2}$$

Since, for all interval  $\{I_n\} \subset I$

$$(f_1 + g_1)(b_n) - (f_1 + g_1)(a_n) = \gamma(b_n) - \gamma(a_n),$$

the condition (3.2) implies that  $\gamma \in CABV(I)$ .

As

$$f|_{(-\infty, x_0) \cap I} = \gamma|_{(-\infty, x_0) \cap I} \quad \text{and} \quad g|_{(x_0, \infty) \cap I} = \gamma|_{(x_0, \infty) \cap I},$$

by definition of a local operator, we get

$$K(f)|_{(-\infty, x_0) \cap I} = K(\gamma)|_{(-\infty, x_0) \cap I} \quad \text{and} \quad K(g)|_{(x_0, \infty) \cap I} = K(\gamma)|_{(x_0, \infty) \cap I}.$$

Therefore, by the continuity of  $K(f)$ ,  $K(g)$  and  $K(\gamma)$  at  $x_0$ , we obtain

$$K(f)(x_0) = K(\gamma)(x_0) = K(g)(x_0).$$

Suppose now that  $x_0$  is the left endpoint of the interval  $I$  (i.e.,  $x_0 = a$ ). There exist a sequence  $(x_k, y_k) \in I \times \mathbb{R}$  such that:  $x_0 < x_{k+1} < x_k$ ,  $y_0 \leq y_{k+1} < y_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , and by the continuity of  $f$  and  $g$  at  $x_0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0).$$

By Lemma 2.1 there exist a function  $\gamma \in CABV(I)$  such that  $\gamma(x_k) = y_k$  for all  $k \in \mathbb{N}_0$ .

There is no loss of generality in supposing that

$$f(x_0) = g(x_0) = y_0, \quad \gamma(x_{2k-1}) = y_{2k-1} = g(x_{2k-1})$$

and

$$\gamma(x_{2k}) = y_{2k} = f(x_{2k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

According to the first part of the proof, we have

$$K(\gamma)(x_{2k-1}) = K(g)(x_{2k-1}) \quad \text{and} \quad K(\gamma)(x_{2k}) = K(f)(x_{2k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hence, by continuity of  $K(\gamma)$ ,  $K(g)$  and  $K(f)$  at  $x_0$ , letting  $k \rightarrow \infty$ , we get

$$K(f)(x_0) = K(\gamma)(x_0) = K(g)(x_0).$$

When  $x_0$  is the right endpoint of  $I$ , the argument is similar.

To define the function  $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , fix arbitrarily an  $y_0 \in \mathbb{R}$ , let us define a function  $P_{y_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$P_{y_0}(x) := y_0, \quad x \in I. \quad (3.3)$$

Of course  $P_{y_0}$ , as a constant function, belongs to  $C\Lambda BV(I)$ . For  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ , put

$$h(x_0, y_0) = K(P_{y_0})(x_0).$$

Since, by (3.3), for all functions  $f$ ,

$$f(x_0) = P_{f(x_0)}(x_0),$$

according to what has already been proved, we have

$$K(f)(x_0) = K(P_{f(x_0)})(x_0) = h(x_0, f(x_0)). \quad (3.4)$$

To prove the uniqueness of  $h$ , assume that  $\bar{h} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is such that

$$K(f)(x) = \bar{h}(x, f(x))$$

for all  $f \in C\Lambda BV(I)$  and  $x \in I$ . To show that  $h = \bar{h}$  let us fix arbitrarily  $x \in I$ ,  $y \in \mathbb{R}$  and take  $f \in C\Lambda BV(I)$  with  $f(x) = y$ . From (3.4), we have

$$\bar{h}(x, y) = \bar{h}(x, f(x)) = K(f)(x) = h(x, f(x)) = h(x, y),$$

which proves the uniqueness of  $h$ . □

**Definition 3.2.** Let  $X \subset \mathbb{R}$  and a function  $h : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be fixed. The mapping  $H : \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}^X$  given by

$$H(f)(x) := h(x, f(x)), \quad f \in \mathbb{R}^X, \quad x \in X,$$

is said to be composition (Nemytskii or superposition) operator. The function  $h$  is referred to as the generator of the operator  $H$ .

As an immediate consequence of Theorema 3.1 we get

**Corollary 3.1.** *If a local operator  $K$  maps  $C\Lambda BV(I)$  into  $C(I)$ , then it is a Nemytskii operator.*

Note, that if a local operator  $K$  maps  $C\Lambda BV(I)$  into itself then, obviously,  $K$  maps  $C\Lambda BV(I)$  into  $C(I)$ . Therefore, by Theorem 3.1, we get

**Theorem 3.2.** *If a local operator  $K$  maps  $C\Lambda BV(I)$  into itself, then there exist a unique function  $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that, for all  $f \in C\Lambda BV(I)$ ,*

$$K(f)(x) = h(x, f(x)), \quad x \in I.$$

**Corollary 3.2.** *If a local operator  $K$  maps  $C\Lambda BV(I)$  into itself, then it is a Nemytskii operator.*

Under the additional assumption that the locally defined operator is uniformly continuous, we get a complete characterization of its generating function  $h$ . Namely, we have the following

**Theorem 3.3.** *If a local operator  $K : C\Lambda BV(I) \rightarrow C\Lambda BV(I)$  is uniformly continuous, then there exist  $f_1, f_2 \in C\Lambda BV(I)$  such that*

$$K(f)(x) = f_1(x)f(x) + f_2(x), \quad f \in C\Lambda BV(I), \quad x \in I.$$

*Proof.* From Theorem 3.2 there exist a unique function  $h : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $K(f)(x) = h(x, f(x))$  for all  $f \in C\Lambda BV(I)$ ,  $x \in I$ . Fix  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ , take an arbitrary sequence  $x_n \in I$  with  $x_n \rightarrow x_0$  and let  $P_{y_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $P_{y_0}(x) = y_0$ ,  $x \in I$ . Since  $h(x_0, y_0) = K(P_{y_0})(x_0)$ ,

$$\begin{aligned} |h(x_n, y_0) - h(x_0, y_0)| &= |h(x_n, P_{y_0}(x_n)) - h(x_0, P_{y_0}(x_0))| \\ &= |K(P_{y_0})(x_n) - K(P_{y_0})(x_0)|, \end{aligned}$$

applying the continuity of  $K(P_{y_0})$  at  $x_0$ , we get the continuity of  $h$  with respect to the first variable. Thus, by [1, Theorem 1],

$$h(x, y) = f_1(x)y + f_2(x), \quad x \in I, \quad y \in \mathbb{R},$$

for some  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Since  $h(\cdot, y_0) = K(P_{y_0})(\cdot) \in C\Lambda BV(I)$  and  $f_2(x) = h(x, 0)$ ,  $f_1(x) = h(x, 1) - f_2(x)$ , the functions  $f_1, f_2 \in C\Lambda BV(I)$ .  $\square$

## Acknowledgments

This research has been partly supported by the Decanato de Investigación, Universidad Nacional Experimental del Táchira-Venezuela, under the Project 04-016-2015, and partially funded by the Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Luis Napoleon Nuñez Molina, Santiago - República Dominicana.

## References

- [1] L. Anzola, N. Merentes and J. L. Sánchez. *Uniformly continuous composition operator in the space of  $\Lambda$ -variation functions in the sense of Waterman*. Submitted.
- [2] J. Appell and P. P. Zabrejko. *Nonlinear superposition operators*. Cambridge-Port Chester-Melbourne-Sydney, 1990.
- [3] W. Aziz, J. A. Guerrero, K. Maldonado and N. Merentes. *Locally defined operators in the space of continuous functions of bounded Riesz-variation*, Journal of Mathematics, Volume 2015, Article ID 925091, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/925091>.
- [4] K. Lichawski, J. Matkowski and J. Miś. *Locally defined operators in the space of differentiable functions*. Bull. Pol. Acad. Sci. Math., **37** (1989), 315–325.

- [5] J. Matkowski and M. Wrobel. *Locally defined operators in the space of Whitney differentiable functions*. *Nonlinear Anal.*, **68** (2008), 2873–3232.
- [6] J. Matkowski and M. Wrobel. *Representation theorem for locally defined operators in the space of Whitney differentiable functions*. *Manuscripta Math.*, **129** (2009), 437–448.
- [7] J. Matkowski and M. Wrobel. *The bounded local operators in the Banach space of Hölder functions*. Jan Długosz University in Częstochowa, Scientific Issues, Mathematics **XV** (2010), 91–98.
- [8] D. Waterman. *On convergence of Fourier series of functions of generalized variation*. *Studia Math.*, **44** (1972), 107–117.
- [9] M. Wrobel. *Locally defined operators and a partial solution of a conjecture*. *Nonlinear Anal.*, **72** (2010), 495–506.
- [10] M. Wrobel. *Representation theorem for local operators in the space of continuous and monotone functions*. *J. Math. Anal. Appl.*, **372** (2010), 45–54.
- [11] M. Wrobel. *Locally defined operators in the Hölder's spaces*. *Nonlinear Anal.*, **74** (2011), 317–323.
- [12] M. Wrobel. *Locally defined operators in the space of functions of bounded  $\varphi$ -variation*. *Real Anal. Exch.*, **38**(1) (2013), 79–94.

# On the $C$ -trace pseudospectrum in the matrix algebra

*Sobre el pseudoespectro de  $C$ -traza en el álgebra matricial*

Aymen Ammar (ammar\_aymen84@yahoo.fr)

Aref Jeribi (Aref.Jeribi@fss.rnu.tn)

Kamel Mahfoudhi (kamelmahfoudhi72@yahoo.com)

University of Sfax, Faculty of Sciences of Sfax  
Route de soukra Km 3.5, B.P. 1171, 3000, Sfax  
Tunisia

## Abstract

In this paper we discuss theoretical properties of the  $C$ -trace pseudospectrum for an element in the matrix algebra. We also make several observations on the  $C$ -trace pseudospectrum.

**Key words and phrases:** Pseudospectrum, condition pseudospectrum, trace pseudospectrum.

## Resumen

En este artículo discutimos las propiedades teóricas del pseudoespectro de  $C$ -traza para un elemento en el álgebra matricial. También hacemos varias observaciones sobre el pseudoespectro de  $C$ -trazas.

**Palabras y frases clave:** Pseudoespectro, condición pseudoespectro, pseudoespectro de traza.

## 1 Introduction

Let  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ( $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) denote the algebra of all  $n \times n$  complex (real) matrices and by  $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$  the group of all unitary matrices in  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  $I$  denotes the  $n \times n$  identity matrix and the conjugate transpose of  $T$  is denoted by  $T^*$ . Let  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , then the eigenvalues of the matrix  $T$  is denoted by  $\sigma(T)$  and is defined as

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ is not invertible} \right\},$$

and its spectral radius by

$$r(T) = \sup \left\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

Now, let  $\lambda \in \mathbb{C}$  and

$$s_n(\lambda I - T) \leq \dots \leq s_2(\lambda I - T) \leq s_1(\lambda I - T)$$

be the singular values of the matrix  $\lambda I - T$  where  $s_1(\lambda I - T)$  is the smallest and  $s_n(\lambda I - T)$  is largest singular values of the matrix. For an  $n \times n$  complex matrix  $T$  and a non-negative real number  $\varepsilon$ , the pseudospectrum of the matrix  $T$  is defined as the following closed set in the complex plane

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : s_n(\lambda I - T) \leq \varepsilon \right\}.$$

Let  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $0 < \varepsilon < 1$ . The condition pseudospectrum of the matrix  $T$  is denoted by  $\Sigma_\varepsilon(T)$  and is defined as

$$\Sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : s_n(\lambda I - T) \leq \varepsilon s_1(\lambda I - T) \right\}.$$

For more information on various details on the above concepts, properties and applications of pseudospectrum [1, 7], condition spectrum [2, 3] and the interested reader may consult the remarkable books [5, 6]. In [4], A. Ammar, A. Jeribi and K. Mahfoudhi defined the notion of trace pseudospectrum for an element in the matrix algebra  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , for every  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , and  $\varepsilon > 0$  by

$$\text{Tr}_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\text{Tr}(\lambda I - T)| \leq \varepsilon \right\},$$

where  $\text{Tr}(\cdot)$  denotes the trace of a matrix.

In this paper, we are interested in another generalization of eigenvalues called  $C$ -trace pseudospectrum for an element in the matrix algebra to give more information about matrix  $T$ . Let  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  and  $\varepsilon > 0$ . Then, the  $C$ -trace pseudospectrum of  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  is denoted by  $\text{Tr}_\varepsilon^C(T)$  and is defined as

$$\text{Tr}_\varepsilon^C(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)| \leq \varepsilon \right\}.$$

The  $C$ -trace pseudoresolvent of  $T$  is denoted by  $\text{Tr}^C \rho_\varepsilon(T)$  and is defined as

$$\text{Tr}^C \rho_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)| > \varepsilon \right\}$$

while the  $C$ -trace pseudospectral radius of  $T$  is defined as

$$\text{Tr}_\varepsilon^C(T) := \sup \left\{ |\lambda| : \lambda \in \text{Tr}_\varepsilon^C(T) \right\}.$$

*Remark 1.1.* Let  $T, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ . Then, for  $C = U = U^* = I$ , the  $C$ -trace pseudospectrum coincides with the trace pseudospectrum, i.e.,  $\text{Tr}_\varepsilon^C(T) = \text{Tr}_\varepsilon(T)$ .

The  $C$ -trace pseudospectrum of a matrix may be used to draw surprisingly strong conclusions about the spectrum and the combinatorial structure of a matrix. In this paper, we will develop some results on the  $C$ -trace pseudospectrum for an element in the matrix algebra, which directly relate its shape to intrinsic properties of the matrix, and thus provide means of detecting such properties.



## 2 $C$ -trace pseudospectrum.

We begin by a simple example in which the  $C$ -trace pseudospectrum can be obtained analytically:

**Example 2.1.** Let  $\varepsilon > 0$  and consider the matrices

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

and

$$U = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ -e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathbb{C})$$

where,  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1$  and  $\gamma_1 \in \mathbb{C}$ . Now, we compute that

$$CU(\lambda I - T)U^* = \begin{pmatrix} -\gamma\gamma_1 e^{-i\phi} - \alpha_1(\lambda - \beta) & \gamma(\lambda - \alpha) \\ -\gamma\beta_1 e^{-2i\phi} & \beta_1(\lambda - \alpha) \end{pmatrix}.$$

Thus

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\varepsilon^C(T) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : |-\gamma\gamma_1 e^{-i\phi} - \alpha_1(\lambda - \beta) + \beta_1(\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : ||\gamma\gamma_1| - |\alpha_1(\lambda - \beta)| - |\beta_1(\lambda - \alpha)|| \leq \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Consequently,  $\gamma = 0$  ( $\gamma_1 = 0$ ) if and only if

$$\text{Tr}_\varepsilon^C(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\alpha_1(\lambda - \beta)| + |\beta_1(\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon \}.$$

If  $\gamma_1 = 0$ ,  $\alpha = \beta$  and  $\alpha_1 = \beta_1$ , then

$$\text{Tr}_\varepsilon^C(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha_1|} \right\}.$$

The following properties of the  $C$ -trace pseudospectrum are easy to check from the definition of the  $C$ -trace pseudospectrum.

**Theorem 2.1.** Let  $T, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $\varepsilon > 0$ . Then,

- (1)  $\text{Tr}_0^C(T) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{Tr}_\varepsilon^C(T)$ .
- (2) If  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , then  $\text{Tr}_{\varepsilon_1}^C(T) \subset \text{Tr}_{\varepsilon_2}^C(T)$ .
- (3)  $\text{Tr}_\varepsilon^C(T)$  is a non-empty compact subset of  $\mathbb{C}$ .
- (4) If  $\alpha \in \mathbb{C}$  and  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Then,  $\text{Tr}_\varepsilon^C(\beta T + \alpha I) = \beta \text{Tr}_{\frac{\varepsilon}{|\beta|}}^C(T) + \alpha$ .
- (5)  $\text{Tr}_\varepsilon^C(\alpha I) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\text{Tr}(C)||\lambda - \alpha| \leq \varepsilon \}$  for all  $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ .
- (6)  $\text{Tr}_\varepsilon^C(UTU^*) = \text{Tr}_\varepsilon^C(T)$ , for all unitary (resp. anti-unitary)  $U$  on  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
- (7)  $\text{Tr}_\varepsilon^C(T^*) = \overline{\text{Tr}_\varepsilon^C(T)}$ .

*Proof.* The first two items, (6) and (7) can be immediately checked from the definitions of  $C$ -trace pseudospectrum, so we only include the proof of item (3), (4) and (5).

(3) Using the continuity from  $\mathbb{C}$  to  $[0, \infty[$  of the map

$$\lambda \rightarrow |\mathrm{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)|,$$

we get that  $\mathrm{Tr}_\varepsilon^C(T)$  is a compact set in the complex plane containing the eigenvalues of  $T$ .

(4) For  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ , we have

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(\beta T + \alpha I) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Tr}(CU(\lambda I - \beta T - \alpha I)U^*)| \leq \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\beta| \left| \mathrm{Tr}\left(CU\left(\frac{\lambda - \alpha}{\beta}I - T\right)U^*\right) \right| \leq \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \mathrm{Tr}\left(CU\left(\frac{\lambda - \alpha}{\beta}I - T\right)U^*\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\beta|} \right\}. \end{aligned}$$

Then,  $\lambda \in \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(\beta T + \alpha I)$ . Hence,  $\frac{\lambda - \alpha}{\beta} \in \mathrm{Tr}_{\frac{\varepsilon}{|\beta|}}^C(T)$ . Thus,  $\lambda \in \beta \mathrm{Tr}_{\frac{\varepsilon}{|\beta|}}^C(T) + \alpha$ .

(5) Let  $\lambda \in \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(\alpha I)$ , then

$$\begin{aligned} |\mathrm{Tr}(CU(\lambda I - \alpha I)U^*)| &= |\lambda - \alpha| |\mathrm{Tr}(CUU^*)| \\ &= |\mathrm{Tr}(C)| |\lambda - \alpha| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

which yields  $\mathrm{Tr}_\varepsilon^C(\alpha I) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Tr}(C)| |\lambda - \alpha| \leq \varepsilon\}$  for all  $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ . □

Next, we give characterization of the  $C$ -trace pseudospectrum  $\mathrm{Tr}_\varepsilon^C(\cdot)$ .

**Theorem 2.2.** *Let  $T, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , and  $\varepsilon > 0$ . If there is  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  such that  $|\mathrm{Tr}(CUDU^*)| \leq \varepsilon$  and  $\mathrm{Tr}(CU(\lambda I - T - D)U^*) = 0$  if, and only if  $\lambda \in \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(T)$ .*

*Proof.* The "if" part. We assume that there exists  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  such that

$$|\mathrm{Tr}(CUDU^*)| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad \mathrm{Tr}(CU(\lambda I - T - D)U^*) = 0$$

for all  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$  and  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Then, for all  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ , we have

$$|\mathrm{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)| = |\mathrm{Tr}(CUDU^*)| \leq \varepsilon.$$

Thus,  $\lambda \in \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(T)$ .

The "only if" part. Suppose  $\lambda \in \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(T)$ . There are two cases:

1<sup>st</sup> case : If  $\lambda \in \mathrm{Tr}_0^C(T)$ , then it is sufficient to take the matrix zero ( $D = 0_{n \times n}$ ).

2<sup>nd</sup> case : If  $\lambda \in \mathrm{Tr}_\varepsilon^C(T) \setminus \mathrm{Tr}_0^C(T)$ . Then, for all  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ ,

$$|\mathrm{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)| \leq \varepsilon.$$

We now consider a square matrix  $D$  by

$$D = \frac{\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)}{\text{Tr}(C)} I$$

where,  $C$  is not a scalar matrix and  $\text{Tr}(C) \neq 0$ . Then,  $D$  is well defined and, as is easily verified,  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(CUDU^*)| &= \left| \text{Tr} \left( CU \left( \frac{\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)}{\text{Tr}(C)} I \right) U^* \right) \right| \\ &= \frac{|\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)|}{|\text{Tr}(C)|} |\text{Tr}(CUIU^*)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also, we have

$$\text{Tr}(CU(\lambda I - T - D)U^*) = \text{Tr} \left( CU(\lambda I - T - \frac{\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)}{\text{Tr}(C)} I)U^* \right) = 0.$$

So, the proof is complete. □

**Theorem 2.3.**  $T, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , and  $\varepsilon > 0$ . Then,

$$\text{Tr}_\delta^C(T) + \mathcal{O}_\varepsilon \subseteq \text{Tr}_{\varepsilon+\delta}^C(T), \tag{1}$$

holds for  $\delta, \varepsilon > 0$  with  $\mathcal{O}_\varepsilon$ , denoting the closed disk in the complex plane centered at the origin with radius  $\frac{\varepsilon}{|\text{Tr}(C)|}$ . If we take  $\delta = 0$ , we obtain an inner bound for  $\text{Tr}_\varepsilon^C(T)$ , namely

$$\text{Tr}_0^C(T) + \mathcal{O}_\varepsilon \subseteq \text{Tr}_\varepsilon^C(T). \tag{2}$$

*Proof.* Let  $\lambda \in \text{Tr}_\delta^C(T) + \mathcal{O}_\varepsilon$ . Then, there exists  $\lambda_1 \in \text{Tr}_\delta^C(T)$  and  $\lambda_2 \in \mathcal{O}_\varepsilon$  such that  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Therefore,

$$|\text{Tr}(CU(\lambda_1 I - T)U^*)| \leq \delta \text{ and } |\lambda_2| \leq \frac{\varepsilon}{|\text{Tr}(C)|}$$

for all  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ . Now, we have for all  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  and  $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$  that

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(CU(\lambda I - T)U^*)| &= |\text{Tr}((CU(\lambda_1 + \lambda_2)I - T)U^*)| \\ &= |\text{Tr}(CU\lambda_2 U^* + CU(\lambda_1 I - T)U^*)| \\ &\leq |\lambda_2| |\text{Tr}(CUU^*)| + |\text{Tr}(CU(\lambda_1 I - T)U^*)| \\ &\leq |\text{Tr}(C)| |\lambda_2| + |\text{Tr}(CU(\lambda_1 I - T)U^*)| \\ &\leq \varepsilon + \delta, \end{aligned}$$

so that (1) holds. Finally, let  $\delta = 0$ , then the desired inclusion (2) is obtained. □

**Theorem 2.4.** Let  $T, B$  and  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  such that  $TB = BT$  and  $\varepsilon > 0$ . If  $T$  is normal (i.e.  $T^*T = TT^*$ ), then

$$\text{Tr}_\varepsilon^C(T + B) \subseteq \sigma(T) + \text{Tr}_\varepsilon^C(B).$$

*Proof.* Let  $T$  is normal, so there exists a unitary matrix  $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  such that

$$Z^*TZ = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \lambda_2 I_{n_2} \oplus \dots \oplus \lambda_k I_{n_k}.$$

The condition  $TB = BT$  implies that

$$Z^*BZ = T_1 \oplus T_2 \dots \oplus T_k$$

where,  $T_i \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ ,  $i = 1, \dots, k$ . From Property (4) and (6) in Theorems 2.1 we obtain that

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\varepsilon^C(T + B) &= \text{Tr}_\varepsilon^C(Z^*TZ + Z^*BZ) \\ &= \text{Tr}_\varepsilon^C((\lambda_1 I_{n_1} + T_1) \oplus \dots \oplus (\lambda_k I_{n_k} + T_k)) \\ &= \bigcup_{i=1}^k \text{Tr}_\varepsilon^C(\lambda_i I_{n_i} + T_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^k \lambda_i + \text{Tr}_\varepsilon^C(T_i) \\ &\subseteq \sigma(T) + \text{Tr}_\varepsilon^C(B). \end{aligned}$$

This is what we wanted to prove. □

Now, the following should be obvious.

**Corollary 2.1.** *If  $B = 0_{n \times n}$ , then*

$$\text{Tr}_\varepsilon^C(T) \subseteq \sigma(T) + \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{\text{Tr}(C)} \right\}.$$

## References

- [1] A. Ammar, A. Jeribi and K. Mahfoudhi, *A characterization of the essential approximation pseudospectrum on a Banach space*, *Filomath* **31**, (11), 3599-3610 (2017).
- [2] A. Ammar, A. Jeribi and K. Mahfoudhi, *A characterization of the condition pseudospectrum on Banach space*, *Funct. Anal. Approx. Comput.* **10** (2) (2018), 13–21.
- [3] A. Ammar, A. Jeribi and K. Mahfoudhi, *The condition pseudospectrum subset and related results*, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* (2018), 1–14.
- [4] A. Ammar, A. Jeribi and K. Mahfoudhi, *Generalized trace pseudo-spectrum of matrix pencils*, *Cubo A Mathematical Journal* **21**, (02), (2019) 65-76.
- [5] A. Jeribi, *Spectral theory and applications of linear operators and block operator matrices*, Springer-Verlag, New-York, (2015).
- [6] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, (1991).
- [7] L. N. Trefethen and M. Embree, *Spectra and pseudospectra: The behavior of nonnormal matrices and operators*. Prin. Univ. Press, Princeton and Oxford, (2005).

# Composition operators from Sobolev spaces into Lebesgue spaces

*Operadores de composición desde espacios de Sobolev en espacios de Lebesgue*

Wadie Aziz (wadie@ula.ve)

Universidad de los Andes  
Departamento de Física y Matemáticas  
Trujillo-Venezuela

## Abstract

In this paper, we shall obtain a compactness of weighted Sobolev embeddings and use it to get a composition operators from Sobolev spaces into Lebesgue spaces. Applying these results we shall study the multiplicity for singular asymptotically linear  $p$ -Laplacian problems.

**Key words and phrases:** Sobolev embeddings, composition operators, eigenvalues,  $p$ -Laplacian, Multiplicity of solutions.

## Resumen

En este artículo, obtenemos una compacidad de inmersiones de Sobolev ponderadas y lo usamos para tener operadores de composición del espacio de Sobolev en espacios de Lebesgue. Aplicando estos resultados estudiaremos la multiplicidad para problemas  $p$ -laplacianos.

**Palabras y frases clave:** Inmersión en espacio de Sobolev, operadores de composición, autovalores,  $p$ -laplaciano, multiplicidad de soluciones.

## 1 Introduction

The compactness of Sobolev embeddings in [1, 5] have been extended in [10, 21, 23]. The results in [21] are very general but not quite convenient to be applied to study partial differential equations. In this paper we obtain a result on the compactness of weighted Sobolev embeddings (see Theorem 2.1). Our results include cases of Poincaré-Sobolev's embeddings and Hardy-Sobolev's embeddings.

The Composition Operators studied in [4, 8, 12, 15, 17, 20, 22, 25] usually act between spaces of same types, for example: Bounded variation spaces, Lebesgue spaces, Sobolev spaces and Orlicz-Sobolev spaces. In this paper, we prove results on Nemytskii operators from Sobolev spaces into Lebesgue spaces (see Theorems 2.2 and 2.3). This idea has appeared in [14]. Our results fit to study problem in partial differential equations. For example, we can study the multiplicity of asymptotically  $p$ -laplacian problem (4.1) with singular condition (4.3). The embedding in [14] may be not compact, therefore it is not convenient to study the asymptotically  $p$ -laplacian

problem nor the multiplicity of solutions. We get the compactness of the embeddings in Theorem 2.2.

We prove the weighted Sobolev embeddings and the Nemytskii Operators from Sobolev spaces into Lebesgue spaces in section 2, extending the results presented in [4, 12, 15, 19] for measurable functions  $\omega \in \Omega$ . In the third section we improve by theorem 3.2 some results on eigenvalues of  $p$ -laplacian in [3, 6]. Finally, we apply these results to study the multiplicity of asymptotically  $p$ -laplacian problem in the fourth section, illustrating by an example (Example 4.1) the application of Main Theorem 4.1.

## 2 A weighted Sobolev embeddings and Nemytskii operators

Let  $N$  be an integer  $\geq 3$ ,  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  with smooth boundary  $\partial\Omega$ , and  $r$  be in the interval  $[1, N)$ . Let  $W_0^{1,p}(\Omega)$  be the usual Sobolev space with the following norm

$$\|u\|_{1,p} = \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Let  $\sigma$  be a measurable function on  $\Omega$ . We put

$$T_{\sigma}(v) = \sigma v \quad \forall v \in W_0^{1,r}(\Omega).$$

We have the following result.

**Theorem 2.1.** *Let  $s$  be in  $[1, \frac{Nr}{N})$ .  $\alpha$  be in  $(0, 1)$ ,  $\omega$  and  $\theta$  be measurable functions on  $\Omega$  such that  $|\theta| \leq |\omega|^{\alpha}$  and  $T_{\omega}$  is a continuous mapping from  $W^{1,r}(\Omega)$  into  $L^s(\Omega)$ . Then  $T_{\theta}$  is a linear compact continuous mapping from  $W^{1,r}(\Omega)$  into  $L^s(\Omega)$ .*

*Proof.* Since  $T_{\omega}$  is linear and continuous from  $W^{1,r}(\Omega)$  into  $L^s(\Omega)$ , there is a positive real number  $C$  and

$$\left\{ \int_{\Omega} |u|^s |\omega|^s dx \right\}^{\frac{1}{s}} \leq C \|u\|_{1,r} \quad \forall u \in W_0^{1,r}(\Omega). \quad (2.1)$$

Thus  $T_{\theta}$  is a linear and continuous mapping from  $W^{1,r}(\Omega)$  to  $L^s(\Omega)$ . Let  $M$  be a positive real number and  $\{u_n\}$  be a sequence in  $W_0^{1,r}(\Omega)$ , such that  $\|u_n\|_{1,r} \leq M$  for any  $n$ . By Rellich-Kondrachov's theorem (Theorem 9.16 in [5]),  $\{u_n\}$  has a subsequence  $\{u_{n_k}\}$  converging to  $u$  in  $L^s(\Omega)$  and  $\{u_{n_k}\}$  converging weakly to  $u$  in  $W_0^{1,r}(\Omega)$ , therefore  $\|u\|_{1,r} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_{n_k}\|_{1,r} \leq M$ .

We shall prove  $\{T_{\theta}(u_{n_k})\}$  converges to  $T_{\theta}(u)$  in  $L^s(\Omega)$ .

Let  $\varepsilon$  be a positive real number. Choose a positive real number  $\mu$  such that

$$(2CM)^s \mu^{(1-\alpha)s} < \frac{\varepsilon^s}{2}. \quad (2.2)$$

Put  $\Omega' = \{x \in \Omega : \omega(x) > \mu\}$ . We have by (2.1) and (2.2)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s |\theta|^s dx &\leq \int_{\Omega'} |u_{n_k} - u|^s |\omega|^{\alpha s} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega'} |u_{n_k} - u|^s |\omega|^{\alpha s} dx \\
&\leq \mu^{(1-\alpha)s} \int_{\Omega'} |u_{n_k} - u|^s |\omega|^{\alpha s} dx + \mu^{\alpha s} \int_{\Omega \setminus \Omega'} |u_{n_k} - u|^s dx \\
&\leq \mu^{(1-\alpha)s} \int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s |\omega|^{\alpha s} dx + \mu^{\alpha s} \int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s dx \\
&\leq \mu^{(1-\alpha)s} (C \|u_{n_k} - u\|_{1,r})^s + \mu^{\alpha s} \int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s dx \\
&\leq \mu^{(1-\alpha)s} (2CM)^s + \mu^{\alpha s} \int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s dx \\
&\leq \frac{\varepsilon^s}{2} + \mu^{\alpha s} \int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s dx.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Since  $\{u_{n_k}\}$  converges in  $L^s(\Omega)$ , there is an integer  $k_0$  such that

$$\int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^s dx \leq \mu^{-\alpha s} \frac{\varepsilon^s}{2} \quad \forall k \geq k_0. \tag{2.4}$$

Combining (2.3) and (2.4), we get the theorem.  $\square$

*Remark 2.1.* Let  $\rho(x)$  be the distance from  $x$  to the boundary  $\partial\Omega$  of  $\Omega$  for any  $x$  in  $\Omega$ . If  $s = r$ ,  $\omega = \rho^{-1}$  and  $\theta = \rho^{-\alpha}$  with  $\alpha$  in  $(0, 1)$ , the inequality (2.1) is Theorem 8.4 in [16], and (ii) of Theorem 2.1 is proved in [23]. We have Poincaré–Sobolev embeddings in this case.

If 0 is in  $\Omega$ ,  $s = r$  and  $\omega(x) = \frac{1}{|x|}$  for any  $x$  in  $\Omega$ , we have Hardy’s embeddings (see [5]). There are other examples of  $\omega$  in [10, 16, 17, 19, 21, 23].

**Theorem 2.2.** *Let  $s$  and  $\omega$  be as in Theorem 2.1 and  $\beta$  be in  $(0, 1]$ . Let  $t$  be in  $[1, +\infty)$  and  $g$  be a Caratheodory function from  $\Omega \times \mathbb{R}$  into  $\mathbb{R}$ . Assume that there are a positive real number  $c$ , a real number  $\beta$  in  $(0, 1]$  and a function  $b \in L^t(\Omega)$ ; such that*

$$|g(x, z)| \leq c |\omega(x)|^{\frac{\beta s}{t}} |z|^{\frac{s}{t}} + b(x) \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Put

$$N_g(v)(x) = g(x, v(x)) \quad \forall v \in W_0^{1,r}(\Omega), x \in \Omega. \tag{2.6}$$

We have

i)  $N_g$  is a continuous mapping from  $W_0^{1,r}(\Omega)$  into  $L^t(\Omega)$ .

ii) If  $A$  is a bounded subset in  $W_0^{1,r}(\Omega)$ , then  $N_g(A)$  is bounded in  $L^t(\Omega)$ .

iii) If  $A$  is a bounded subset in  $W_0^{1,r}(\Omega)$  and  $\beta < 1$ , then  $\overline{N_g(A)}$  is compact in  $L^t(\Omega)$ .

*Proof.* i) Put

$$g_1(x, \zeta) = g(x, |\omega(x)|^{-\beta} \zeta) \quad \forall (x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

By (2.5), we have

$$|g_1(x, \zeta)| \leq c |\zeta|^{\frac{s}{t}} + b(x) \quad \forall (x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

On the other hand

$$N_g(v) = N_{g_1} \circ T_{|\omega|^\beta}(v) \quad v \in W^{1,r}(\Omega). \quad (2.8)$$

Applying Theorem 2.3 in [12] and Theorem 2.1, we get the theorem.  $\square$

**Theorem 2.3.** *Let  $g$  be as in Theorem 2.2 with  $s \in \left(1, \frac{Nr}{N-r}\right)$  and  $t = \frac{s}{s-1}$ . Put*

$$\Psi_g(u) = \int_{\Omega} \int_0^{u(x)} g(x, \xi) d\xi dx \quad \forall u \in W_0^{1,r}(\Omega). \quad (2.9)$$

We have

i)  $\Psi_g$  is continuously Fréchet differentiable mapping from  $W_0^{1,r}(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$  and

$$D\Psi_g(u)(\phi) = \int_{\Omega} g(x, \xi) \phi dx \quad \forall u, \phi \in W_0^{1,r}(\Omega). \quad (2.10)$$

ii) If  $A$  is a bounded subset in  $W_0^{1,r}(\Omega)$ , then there is a positive real number  $M$  such that

$$|\Psi_g(v)| + \|D\Psi_g(v)\| \leq M \quad \forall v \in A.$$

*Proof.* Let  $g_1$  be as in the proof of Theorem 2.2. Put

$$\Psi_{g_1}(u) = \int_{\Omega} \int_0^{u(x)} g_1(x, \xi) d\xi dx \quad \forall u \in W_0^{1,r}(\Omega).$$

By Theorem 2.8 in [12], then  $\Psi_{g_1}$  is continuously Fréchet differentiable mapping from  $L^s(\Omega)$  into  $\mathbb{R}$ . We see that  $\Psi_g = \Psi_{g_1} \circ T_{|\omega|^\beta}$ . By Theorem 2.1, we get the theorem.  $\square$

*Remark 2.2.* If  $\omega = 1$ , Theorems 2.2 and 2.3 were proved in [4, 12, 15, 19].

### 3 Eigenvalues for $p$ -laplacian

Let  $r = s = p$  be in  $[2, N)$ ,  $\omega$  and  $\alpha$  be as in Theorem 2.1 such that  $\omega \neq 0$ . Put  $\sigma = |\omega|^{\alpha p}$ . By Theorem 2.1, there is a real number  $\lambda$  such that

$$\lambda = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : u \in W_0^{1,r}(\Omega), \int_{\Omega} \sigma |u|^p dx = 1 \right\}. \quad (3.1)$$

We have the following result.

**Theorem 3.1.** *There are  $v_1$  and  $v_2$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  such that  $v_1 \geq 0$  and  $v_2 \leq 0$  and*

$$\int_{\Omega} |\nabla v_i|^{p-2} \nabla v_i \nabla \phi dx = \lambda \int_{\Omega} \sigma |v_i|^{p-2} v_i \phi dx \quad \forall i = 1, 2; \phi \in W_0^{1,r}(\Omega). \quad (3.2)$$



*Proof.* Put

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx & \forall u \in W_0^{1,r}(\Omega), \\ S(u) &= \int_{\Omega} \sigma |u|^p dx & \forall u \in W_0^{1,r}(\Omega), \\ S_1(u) &= \int_{\Omega} |u|^p dx & \forall u \in W_0^{1,r}(\Omega), \\ M &= \left\{ u \in W_0^{1,r}(\Omega) : S_1(u) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

By Theorem 2.1,  $M$  is weakly closed in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . We see that  $E$  is coercive and weakly lower semi-continuous on  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . By Theorem 1.2 in [24], there is  $w$  in  $M$  such that

$$E(w) = \min\{E(u) : u \in M\}. \quad (3.3)$$

Hence

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^p dx = \lambda \int_{\Omega} \sigma |w|^p dx. \quad (3.4)$$

Put  $v_1 = |w|$  and  $v_2 = -|w|$ . By Lemma 7.6 in [13],  $v_1$  and  $v_2$  belong to  $W_0^{1,p}(\Omega)$  and  $E(v_1) = E(v_2) = E(w)$ . By Theorem 9 in [7],  $E$  is continuously Fréchet differentiable on  $W^{1,p}(\Omega)$ . Since  $S_1$  is continuously Fréchet differentiable on  $W^{1,p}(\Omega)$  and  $S = S_1 \circ T_{|w|^\alpha}$ , by Theorem 2.1,  $S$  is continuously Fréchet differentiable on  $W^{1,p}(\Omega)$ . Thus by Theorem 43.D in [26], there are real numbers  $\lambda'_1$  and  $\lambda'_2$  such that

$$\begin{aligned} DE(v_i)\varphi &= \lambda'_i DS(v_i)\varphi & \forall i = 1, 2; \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega) \text{ or} \\ \int_{\Omega} |\nabla v_i|^{p-2} \nabla v_i \cdot \nabla \varphi dx &= \lambda'_i \int_{\Omega} \sigma |v_i|^{p-2} v_i \varphi dx & \forall i = 1, 2; \varphi \in W_0^{1,r}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Taking  $\varphi = v_i$  in (3.5), we see that  $\lambda'_i = \lambda$  for any  $i = 1, 2$  and we get the theorem.  $\square$

Put  $\gamma(\sigma) = \lambda$  and  $\phi(\sigma) = \|v_1\|^{-1} v_1$  where  $\theta$ ,  $\lambda$  and  $v_1$  are as in Theorem 2.3. If  $\sigma = 1$ , we denote  $\gamma(\sigma)$  by  $\lambda_1$ . We have the following results.

**Theorem 3.2.** *Let  $\alpha$  be in  $(0, 1)$ ,  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  be two measurable functions on such that  $0 < \sigma_1 < \sigma_2$  and  $\sigma_2^p < |\omega|^{\alpha p}$ . Then  $0 < \gamma(\sigma_2) \leq \gamma(\sigma_1)$ .*

*Proof.* By Poincaré's inequality,  $\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx > 0$  when  $\int_{\Omega} \sigma_2 |u|^p dx = 1$ . Thus by the proof of Theorem 2.3, we get  $0 < \gamma(\sigma_2)$ .

Since  $\int_{\Omega} \sigma_1 |u|^p dx \leq \int_{\Omega} \sigma_2 |u|^p dx$ , we see that  $\gamma(\sigma_2) \leq \gamma(\sigma_1)$ .  $\square$

*Remark 3.1.* If  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  are in  $L^s(\Omega)$  with some  $s$  in  $\left(\frac{N}{p}, +\infty\right)$ , Theorems 2.3 and 3.2 were proved in [3, 6].

## 4 Multiplicity of asymptotically linear $p$ -laplacian problems

Let  $p$  be in  $[2, N)$  and  $q$  be in  $(1, p)$ ,  $f$  be the real Caratheodory function on  $\Omega \times \mathbb{R}$ , and  $h$  be a real measurable function on  $\Omega$ . We consider the following  $p$ -Laplacian problem:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x)|u|^{q-2}u + f(x, u) \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Our main result is

**Theorem 4.1.** *Suppose*

(F1) *There exist  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\alpha' = \alpha^{\frac{p-1}{p}}$ ,  $C \in (0, +\infty)$ , a measurable real function  $V_0$  on  $\Omega$ , positive measurable real functions  $V_1, V_2$  and  $\eta$  on  $\Omega$  such that  $T_{|\eta|}$  is a continuous mapping from  $W_0^{1,p}(\Omega)$  into  $L^p(\Omega)$  and*

$$\left( \int_{\Omega} |\eta v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|v\|_{1,p} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.2)$$

$$|f(x, s)| \leq \eta^{\alpha(p-1)}(x)|s|^{p-1} = \eta^{\alpha'p}(x)|s|^{p-1} \quad \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2}s} = V_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.4)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2}s} = V_1(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.5)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2}s} = V_2(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.6)$$

(V1) *There exists a positive constant  $c_0$  such that*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p - V_0|u|^p) dx \geq c_0 \|u\|_{1,p}^p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.7)$$

(V2)  $V_i \not\equiv 0$  and  $0 < \gamma(V_i) < 1$  for any  $i = 1, 2$ .

(V3)  $V_0 \geq 0$  for e.a.  $x \in \Omega$ .

(H1)  $|h|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha pq}{p-q}}$  is integrable on  $\Omega$ .

(H2) *There is a sufficiently small positive number  $\tau$  such that  $\left\| |h|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha pq}{p-q}} \right\|_{L^1} \leq \tau$ .*

*Then the problem (4.1) has at least two non-trivial solutions  $u_1$  and  $u_2$  such that  $u_1 \geq 0$ ;  $u_2 \leq 0$ ;  $J(u_1) > 0$  and  $J(u_2) < 0$ , where*

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt \quad \forall (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ and} \quad (4.8)$$

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)|u|^q dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx. \quad (4.9)$$

**Corollary 4.1.** *Theorem 4.1 still holds if we replace (V3) and (H2) by the following condition:*

(H3)  $h \leq 0$  a.e on  $\Omega$ .

**Corollary 4.2.** *Corollary 4.1 still holds if we replace (V1) and (H3) by the following conditions*

(V1')

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p - V_0|u|^p) dx \geq 0 \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(H4)  $h < 0$  a.e on  $\Omega$ .

**Theorem 4.2.** *Suppose that conditions (F1), (V1), (V2), (V3), (H1) and (H2) hold. Assume also that (H5) There exists  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  such that*

$$\int_{\Omega} h(x)|v^+|^q dx > 0.$$

*Then the problem (4.1) has at least four non-trivial solutions  $u_1, u_2, u_3$  and  $u_4$  such that  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0, u_4 \leq 0$  and  $J(u_1) > 0, J(u_3) > 0, J(u_2) < 0$  and  $J(u_4) < 0$ .*

To prove these results we need the following notations. Let  $u$  be in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $F$  and  $J$  be as in (4.8) and (4.9). Put

$$\begin{aligned} u^+ &= \max\{u, 0\}, & u^- &= \min\{u, 0\}, \\ J^\pm &= \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)|u^\pm|^q dx - \int_{\Omega} F(x, u^\pm) dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

By Theorem 9 in [7], (F1) and Theorem 2.2 (with  $r = s = p, t = \frac{p}{p-1}$  and  $\beta = \alpha$ ), the functionals  $J$  and  $J^\pm$  belong to  $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ . Moreover, for every  $u$  and  $v$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,

$$\langle DJ(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} h(x)|u|^{q-2} u v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \quad (4.11)$$

$$\langle DJ^+(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} h(x)(u^+)^{q-2} u^+ v dx - \int_{\Omega} f(x, u^+) v dx \quad (4.12)$$

$$\langle DJ^-(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} h(x)|u^-|^{q-2} u^- v dx - \int_{\Omega} f(x, u^-) v dx \quad (4.13)$$

We have the following lemmas.

**Lemma 4.1.** *Under (F1), (V2) and (H1), the functionals  $J^\pm$  satisfy the Palais–Smale condition.*

*Proof.* We prove  $J^+$  satisfies the Palais–Smale condition, the other case is similar. Let  $\{u_n\}$  be a sequence in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Assume  $\lim_{n \rightarrow +\infty} DJ^+(u_n) = 0$  and  $|J^+(u_n)| \leq M$  for a real number  $M$ . We shall prove that  $\{u_n\}$  has a convergent subsequence in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . By (4.10) and (4.12), we obtain

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)(u_n^+)^q dx - \int_{\Omega} F(x, u_n^+) dx \right| \leq M, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \Delta v dx - \int_{\Omega} h(x)(u_n^+)^{q-2} u_n^+ v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n^+) dx \right| \\ \leq \|DJ^+(u_n)\| \|v\|_{1,p} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.15)$$

First, we prove  $\{u_n^-\}$  is bounded, indeed, take  $v = u_n^-$  in (4.15) we have

$$\|u_n^-\|_{1,p}^p = \left| \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u_n^-|^p dx \right| \leq \|DJ^+(u_n)\| \|u_n^-\|_{1,p}.$$

Hence  $\|u_n^-\|_{1,p}^{p-1} \leq \|DJ^+(u_n)\| \rightarrow 0$ , or  $\|u_n^-\|_{1,p} \rightarrow 0$ .

Now we prove the boundedness of  $\{u_n^+\}$ . Suppose by contradiction that  $\{u_n^+\}$  is unbounded, then there exists a subsequence of  $\{u_n\}$  (also denoted by  $\{u_n\}$ ) such that  $a_n = \|u_n^+\|_{1,p} > 0$  for any integer  $n$  and  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . By (4.12), we have

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx - \int_{\Omega} h(x) (u_n^+)^{q-2} u_n^+ v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n^+) dx \right| \\ & \leq \|DJ^+(u_n)\| \|v\|_{1,p} + \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^{p-2} \nabla u_n^- \nabla v dx \right| \\ & \leq \|DJ^+(u_n)\| \|v\|_{1,p} + \left( \int_{\Omega} |\nabla u_n^-|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|DJ^+(u_n)\| \|v\|_{1,p} + \|u_n^-\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Put  $w_n = \frac{u_n^+}{a_n}$ . Divide both sides by  $a_n^{p-1}$ , we obtain

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v dx - \int_{\Omega} h(x) (u_n^+)^{q-2} u_n^+ v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n^+) dx \right| \\ & \leq \frac{\|DJ^+(u_n)\| \|v\|_{1,p}}{a_n^{p-1}} + \frac{1}{a_n^{p-1}} \|u_n^-\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Note that  $\|w_n\|_{1,p} = 1$ . By Theorem 9.16 and Theorem 4.4 in [5], (4.2), (4.3) and Theorem 2.1, there exist a subsequence of  $\{w_n\}$  (also denoted by  $\{w_n\}$ ), a function  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  and  $k \in L^1(\Omega)$  such that:

- (i)  $\{w_n\}$  weakly (resp. strongly, pointwisely) converges to  $w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  (resp. in  $L^p(\Omega)$ , on  $\Omega$ ),
- (ii)  $\{w_n \eta^\alpha\}$  strongly (resp. pointwisely) converges to  $w \eta^\alpha$  in  $L^p(\Omega)$  (resp. on  $\Omega$ ), and
- (iii)  $|w_n|^p + |w_n|^p \eta^{\alpha p} \leq k$ .

By (H1), we have

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} h(x) |w_n(x)|^{q-1} v(x) dx \right| = \left| \int_{\Omega} h(x) \eta^{\alpha q} |w_n(x)|^{q-1} v(x) \eta^\alpha dx \right| \\ & \leq \left( \int_{\Omega} |h(x)|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha p q}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \left( \int_{\Omega} k_1 dx \right)^{\frac{q-1}{p}} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p \eta^{\alpha p} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Thus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{q-p} \int_{\Omega} h(x) |w(x)|^{q-1} v(x) dx = 0. \quad (4.18)$$

By (4.3)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x, u_n^+(x))}{a_n^{p-1}} v(x) \right| = \begin{cases} 0 & \text{if } u_n^+(x) = 0 \\ \left| \frac{f(x, u_n^+(x))}{u_n^+(x)^{p-1}} w_n(x)^{p-1} v(x) \right| & \text{if } u_n^+(x) \neq 0 \end{cases} \\ & \leq \eta^{\alpha(p-1)}(x) |w_n(x)|^{p-1} |v(x)| \leq k^{\frac{p-1}{p}} |v(x)|. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Let  $\Omega^0 = \{x \in \Omega : w(x) = 0\}$  and  $\Omega^+ = \{x \in \Omega : w(x) > 0\}$ . Since  $w(x) \geq 0$  for all  $x \in \Omega$ , result that  $\Omega = \Omega^0 \cup \Omega^+$ . Let  $x$  be in  $\Omega^+$ , we have  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$ . By (4.6) and (4.19), we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u_n^+(x))}{a_n^{p-1}} v(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } w(x) = 0 \\ V_2(x)w(x)^{p-1}v(x) & \text{if } w(x) \neq 0. \end{cases}$$

By (4.6), (4.3) and (4.2), we have

$$\int_{\Omega} |V_2 w^{p-1} v| dx \leq \int_{\Omega} \eta^{\alpha(p-1)} w^{p-1} |v| dx \leq \left( \int_{\Omega} |\eta^{\alpha} w|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Since  $k \in L^1(\Omega)$  and  $v \in L^p(\Omega)$ , by Hölder's inequality,  $k^{\frac{p-1}{p}} v$  belongs to  $L^1(\Omega)$ . Applying Lebesgue's Dominated Convergence Theorem, we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n^+(x))}{a_n^{p-1}} v(x) dx = \int_{\Omega} V_2(x)w(x)^{p-1}v(x) dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.20)$$

We shall prove that  $\{w_n\}$  converges to  $w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Let  $T$  be the operator  $-\Delta_p$  from  $W_0^{1,p}(\Omega)$  into  $W_0^{1,p'}(\Omega)$ , where  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . By Theorem 10 in [8],  $T$  is of class  $S_+$ , that is,  $\{\psi_n\}$  strongly converges to  $\psi$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  if  $\{\psi_n\}$  weakly converges to  $\psi$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  and  $\limsup_{m \rightarrow \infty} T(\psi_m)(\psi_m - \psi) \leq 0$ . Note that

$$T(\phi)(\theta) = \int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p-2} \nabla \phi \nabla \theta dx, \quad \forall \phi, \theta \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Using a similar argument as above for  $w_m - w$  instead of  $v$ , we obtain the following results

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |\nabla w_m|^{p-2} \nabla w_m \nabla (w_m - w) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{a_n^{p-q}} \int_{\Omega} h(x) |w_m|^{q-1} (w_m - w) dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_m^+)}{|u_m^+|^{p-1}} w_m^{p-1} (w_m - w) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{a_n^{p-1}} \|DJ^+(u_m)\| \|w_m - w\|_{1,p} + \\ & + \frac{1}{a_n^{p-1}} \|u_m^-\|_{1,p}^{p-1} \|w_m - w\|_{1,p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n^{p-q}} \int_{\Omega} h(x) |w_m|^{q-1} (w_m - w) dx = 0 \quad (4.22)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, u_m^+)}{|u_m^+|^{p-1}} w_m^{p-1} (w_m - w) dx = 0. \quad (4.23)$$

Since  $\{\|w_m - w\|_{1,p}\}$  is bounded and  $\|u_m^-\|_{1,p} \rightarrow 0$ , by (4.22), (4.23) and (4.21), we have

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} T(w_m)(w_m - w) \leq 0,$$

which implies that  $\{w_m\}$  strongly converges to  $w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  and thus

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla w_m|^{p-2} \nabla w_m \nabla v dx = \int_{\Omega} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.24)$$

(c.f. Theorem 9, [8]). Combining (4.17), (4.18), (4.20) and (4.24), we get

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla v dx - \int_{\Omega} V_2(x) w^{p-1} v dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.25}$$

Note that  $w \geq 0$  and  $w \not\equiv 0$ , by (4.25) we have  $w \equiv \phi(V_2)$  and  $\gamma(V_2) = 1$ , which is a contradiction to (V2). This contradiction gives us the conclusion that  $\{\|u_m^+\|\}$  is bounded.

Therefore  $\{u_m\}$  is bounded in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . By Lemma 6.2 in [12],  $\{u_m\}$  is strongly convergent in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . □

**Lemma 4.2.** *Suppose conditions (4.4), (F1), (V1), (H1) and (H3) hold. Then there exist positive real numbers  $R$  and  $C$  such that*

$$J^\pm(u) \geq C \|u\|_{1,p}^p, \quad \forall u \in B_R(0).$$

*Proof.* If we have

$$J(u) \geq K \|u\|_{1,p}^p, \quad \forall u \in B_R(0) \setminus \{0\}.$$

then the result follows. Indeed,

$$J^\pm(u) = J(u^\pm) + \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u^\mp|^p dx \geq K \|u^\pm\|_{1,p}^p + \frac{1}{p} \|u^\mp\|_{1,p}^p \geq \min\{K, \frac{1}{p}\} \|u\|_{1,p}^p.$$

Suppose by contradiction that for each  $n \in \mathbb{N}$  there exists  $u_n \in B_{\frac{1}{n}}(0) \setminus \{0\}$  such that  $J(u_n) < \frac{1}{n} \|u_n\|_{1,p}^p$ , that is

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x) |u_n|^q dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx < \frac{1}{n} \|u_n\|_{1,p}^p. \tag{4.26}$$

Put  $a_n = \|u_n\|_{1,p} \in (0, \frac{1}{n})$ , and  $w_n = \frac{u_n}{a_n}$ . Divide both sides of (4.26) by  $a_n^p$ , we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{h(x) |w_n|^q}{a_n^{p-q}} - \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w_n)}{a_n^p} dx < \frac{1}{n}.$$

Since  $h \leq 0$  a.e. on  $\Omega$  and  $a_n > 0$ , we have

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \frac{F(x, a_n w_n)}{a_n^p} dx < \frac{1}{n}. \tag{4.27}$$

Since  $\|w_n\|_{1,p} = 1$ , as in the proof of Lemma 4.1 and (4.19), there are  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  and  $k \in L^1(\Omega)$  such that for any  $x$  in

$$\left| \frac{f(x, s a_n w_n(x))}{a_n^p} a_n w_n(x) \right| \leq \eta^{\alpha(p-1)} s^{p-1} |w_n(x)|^{p-1} \leq s^{p-1} k \quad s \in (0, 1) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Thus by *Lebesgue's Dominated Convergence Theorem*, *Fubini's theorem* and (4.4), we have

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, a_n w_n(x))}{a_n^p} dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{f(x, s a_n w_n(x))}{a_n^p} a_n w_n(x) ds dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{f(x, s a_n w_n(x))}{|s a_n w_n(x)|^{p-1}} s^{p-1} |w_n(x)|^{p-1} w_n(x) ds dx &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^{p-1} w dx. \end{aligned}$$

Replace  $w_n$  by  $w$ , we have a similar result

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{f(x, a_n w_n(x))}{a_n^p} dx = \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^{p-1} w dx. \tag{4.28}$$

By (V1) (actually, we only need (V1')), we have

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx \geq \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx.$$

It follows that for any  $\varepsilon > 0$ , there exist  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  such that,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx - \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w(x))}{a_n^p} dx \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.29}$$

From (4.27) and (4.29), for  $n \geq N_{\varepsilon}$ , we have

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w_n(x))}{a_n^p} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx + \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w(x))}{a_n^p} dx < \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

This implies

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx \right] \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Hence

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx \right] \leq 0.$$

By Theorem 6 in [7], the space  $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$  is uniformly convex, then by Proposition 3.32 in [5], we have  $w_n \rightarrow w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  and therefore,  $\|w\|_{1,p} = 1$ . On the one hand, from (V1), we have

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx \geq c_0 \|w\|_{1,p} = c_0 > 0.$$

On the other hand, let  $n \rightarrow +\infty$  in (4.27), we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx \leq 0$$

This is a contradiction. Thus we get the lemma. □

**Lemma 4.3.** *Suppose conditions (4.4), (F1) (V1'), (H1), and (H4) hold. Then there exist positive real numbers  $R$  and  $C$  such that*

$$J^{\pm}(u) \geq C \|u\|_{1,p}^p, \quad \forall u \in B_R(0).$$

*Proof.* Arguing as in Lemma 4.2, we only need to show

$$J(u) \geq K \|u\|_{1,p}^p, \quad \forall u \in B_R(0) \setminus \{0\}.$$

Suppose by contradiction that for each  $n \in \mathbb{N}$  there exists un  $u_n \in B_{\frac{1}{n}}(0) \setminus \{0\}$  such that  $J(u_n) < \frac{1}{n} \|u_n\|_{1,p}^p$ , that is

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x) |u_n|^q dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx < \frac{1}{n} \|u_n\|_{1,p}^p. \tag{4.30}$$

Divide both sides of (4.30) by  $a_n^p$ , where  $a_n = \|u_n\|_{1,p} \in (0, \frac{1}{n})$ , and  $w_n = \frac{u_n}{a_n}$ , we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{h(x)|w_n|^q}{a_n^{p-q}} dx - \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w_n)}{a_n^p} dx < \frac{1}{n}. \quad (4.31)$$

Since  $a_n \in (0, 1)$  and  $h < 0$  a.e. on  $\Omega$ , then (4.31) becomes

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)|w_n|^q dx - \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w_n)}{a_n^p} dx < \frac{1}{n}. \quad (4.32)$$

Since  $\|w_n\|_{1,p} = 1$  for any  $n$ , then we can assume  $\{w_n\}$  weakly converges to  $w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Arguing as in the proof of Lemma 4.1, we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} h(x)|w_n|^q dx &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x)|w_n|^q dx = \int_{\Omega} h(x)|w|^q dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w_n)}{a_n^p} dx &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx \quad \text{and} \\ \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)|w|^q dx - \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx &\leq 0. \end{aligned}$$

By (V1'), we get

$$- \int_{\Omega} h(x)|w|^q dx = 0.$$

Thus by (H4),  $w = 0$  a.e. on  $\Omega$ , which contradicts to  $\|w\|_{1,p} = 1$ . The lemma is proved.  $\square$

**Lemma 4.4.** *Suppose conditions (4.4), (F1), (V1), (V3) and (H1) hold. Then there exists a constant  $\tau > 0$  having the following properties: for all measurable function  $h$  on  $\Omega$  with  $\left\| |h_n|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha pq}{p-q}} \right\|_{L^1} \leq \tau$ , there exist positive numbers  $\sigma$  and  $\mu$  such that  $J^{\pm}(u) \geq \mu$  for all  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  with  $\|u\|_{1,p} = \sigma$ .*

*Proof.* We consider the case of  $J^+$ , the case of  $J^-$  is similar. Suppose by contradiction that: for all  $\tau > 0$ , there exists a measurable function  $h$  with  $\left\| |h_n|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha pq}{p-q}} \right\|_{L^1} \leq \tau$  such that, for all  $\sigma > 0$  and  $\eta > 0$ , we have  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  with  $\|u\|_{1,p} = \sigma$  and  $J^+(u) < \eta$ .

Choose  $\tau = \frac{1}{n^{p-q+1}}$ ,  $\sigma = \frac{1}{n}$ ,  $\eta = \frac{1}{n^{p+1}}$  where  $n \in \mathbb{N}$ , we have: for any  $n \in \mathbb{N}$ , there exist a measurable function  $h_n$  and  $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$  such that  $\left\| |h_n|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha pq}{p-q}} \right\|_{L^1}^{\frac{p-q}{p}} \leq \frac{1}{n^{p-q+1}}$ ,  $\|u_n\|_{1,p} = \frac{1}{n}$  and

$$J^+(u_n) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)(u_n^+)^q dx - \int_{\Omega} F(x, u_n^+) dx < \frac{1}{n^{p+1}}. \quad (4.33)$$

Divide both sides of (4.33) by  $a_n^p$ , where  $a_n = \|u_n\|_{1,p} = \frac{1}{n}$ , and  $w_n = \frac{u_n}{a_n}$ , we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w_n|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{h_n(x)(w_n^+)^q}{a_n^{p-q}} dx - \int_{\Omega} \frac{F(x, a_n w_n^+)}{a_n^p} dx < \frac{1}{n}, \quad (4.34)$$

and  $\|w_n\|_{1,p} = 1$ , then we can assume  $\{w_n\}$  weakly converges to  $w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Arguing as in the proof of Lemma 4.2 we obtain

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x, a_n w_n^+)}{a_n^p} dx = \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w^+|^p dx. \quad (4.35)$$



By Hölder inequality and (4.2), we have

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{h_n(x)|w_n^+|^q}{a_n^{p-q}} dx \right| &\leq n^{p-q} \left( \int_{\Omega} |h_n|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{\alpha pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left( \int_{\Omega} |w_n^+|^p \eta^{\alpha p} \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \frac{n^{p-q} C}{n^{p-q+1}} \|w_n\|_{1,p}^q \leq \frac{n^{p-q} C}{n^{p-q+1}} = \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{h_n(x)|w_n^+|^q}{a_n^{p-q}} dx = 0. \quad (4.36)$$

From (4.34), (4.35), (4.36), (V3) and (V1), we get

$$1 \leq \int_{\Omega} V_0 |w^+|^p dx \leq \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx.$$

By Theorem 6 in [7], the space  $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$  is uniformly convex, then by Proposition 3.32 in [5], we have  $w_n \rightarrow w$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  and therefore,  $\|w\|_{1,p} = 1$ . From (4.35), (4.36) and letting  $n \rightarrow +\infty$  in (4.34), we have

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla w|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_0 |w|^p dx \leq 0,$$

which contradicts to (V1). Therefore we get the lemma.  $\square$

**Lemma 4.5.** *Under conditions (V2), (F1), (V2) and (H1), we have*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J^+(t\phi(V_2))}{t^p} < 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J^-(-t\phi(V_2))}{t^p} < 0$$

*Proof.* Put  $v = \phi_1(V_2)$ , then  $\|v\|_{1,p} = 1$ ,  $v > 0$  and

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w dx = \gamma(V_2) \int_{\Omega} V_2(x) |v|^p v w dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.37)$$

Thus

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx = \gamma(V_2) \int_{\Omega} V_2(x) |v|^p dx. \quad (4.38)$$

By (4.10) we have

$$J^+(tv) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla(tv)|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x) (tv^+)^q dx - \int_{\Omega} F(x, tv^+) dx.$$

It implies that

$$\frac{J^+(tv)}{t^p} = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \frac{1}{q t^{p-q}} \int_{\Omega} h(x) |v|^q dx - \frac{1}{t^p} \int_{\Omega} F(x, tv) dx. \quad (4.39)$$

By Hölder's inequality, (H1) and (4.2), we have

$$\int_{\Omega} |h| |v|^q dx = \int_{\Omega} |h| \eta^{-q\alpha} |v| \eta^{q\alpha} dx \leq \left( \int_{\Omega} |h|^{\frac{p}{p-q}} \eta^{-\frac{pq\alpha}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \left( \int_{\Omega} |v|^p \eta^{p\alpha} dx \right)^{\frac{q}{p}} < \infty.$$

Hence

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^{t^{p-q}}} \int_{\Omega} h(x)|v|^q dx = 0. \quad (4.40)$$

As in (4.28), we get

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^p} \int_{\Omega} F(x, tv) dx = \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_2(x)|v(x)|^p dx. \quad (4.41)$$

Combining (4.38), (4.39), (4.40) and (4.41), we have

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J^+(tv)}{t^p} &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} V_2|v|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \frac{1}{p\gamma(V_2)} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{\gamma(V_2)} \right) < 0, \end{aligned}$$

which contradicts to (V2) and that completes the proof of Lemma.  $\square$

**Lemma 4.6.** *Under conditions (F1), (H1) and (H5), we have*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J^{\pm}(\pm tv)}{t^p} < 0,$$

where  $v$  is given in (H5).

*Proof.* Let  $\{t_n\}$  be a sequence of positive real numbers such that  $t_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . First, we consider the case of  $J^+$ . We have

$$\begin{aligned} \frac{J^+(t_n v)}{t_n^q} &= \frac{1}{t_n^q} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla t_n v|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)(t_n v^+)^q dx - \int_{\Omega} F(x, t_n v^+) dx \right] \\ &= \frac{t_n^{p-q}}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)(v^+)^q dx - \frac{1}{t_n^q} \int_{\Omega} F(x, v^+) dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

By (F1), we have

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} F(x, v^+) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \int_0^{t_n v^+} f(x, \tau) d\tau dx \right| = \left| \int_{\Omega} \int_0^1 f(x, \xi t_n v^+) d\xi dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \eta^{\alpha(p-1)} (|\xi t_n v^+|)^{p-1} t_n v^+ \right| d\xi dx = \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \eta^{\alpha(p-1)} \xi^{p-1} t_n^p (v^+)^p \right| d\xi dx \\ &\leq \frac{1}{p} t_n^p \int_{\Omega} \eta^{\alpha(p-1)} |v|^p dx. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n^q} \int_{\Omega} F(x, t_n v^+) dx &= 0 \quad \text{and} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J^+(tv)}{t^q} &= -\frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x)(v^+)^q dx < 0. \end{aligned}$$

In case of  $J^-$ , note that  $-v^+ = (-v)^-$  then  $(-t_n v)^- = -t_n v^+ = t_n v$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{J^-(t_n v)}{t_n^q} &= \frac{1}{t_n^q} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla(-t_n v)|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x) |(-t_n v)^-|^q dx - \int_{\Omega} F(x, (-t_n v)^-) dx \right] \\ &= \frac{t_n^{p-q}}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x) v^q dx - \frac{1}{t_n^q} \int_{\Omega} F(x, -t_n v) dx. \end{aligned}$$

Arguing as in the case  $J^+$ , we also have

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J^-(-tv)}{t^q} = -\frac{1}{q} \int_{\Omega} h(x) |v^+|^q dx < 0.$$

□

**Proof of Theorem 4.1** We have  $J^+(0) = 0$ . By Mountain Pass Theorem in [2], Lemma 4.1, Lemma 4.4 and Lemma 4.5, there exists a critical point  $u_1$  of  $J^+$  with  $J^+(u_1) \geq \mu > 0$  ( $\mu$  is given in Lemma 4.4). We prove that  $u_1 \geq 0$ . Since  $u_1$  is the critical point of  $J^+$ , by (4.12), for any  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla v dx - \int_{\Omega} h(x) (u_1^+)^{q-2} u_1^+ v dx - \int_{\Omega} f(x, u_1^+) dx = 0. \tag{4.43}$$

Take  $v = u_1^-$  in (4.43), we obtain

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1^-|^p dx = 0.$$

Hence  $u_1^- = 0$  a.e. on  $\Omega$ , this implies  $u_1 \geq 0$  a.e. on  $\Omega$ . Since  $J^+(u_1) > 0$ , then  $u_1 \not\equiv 0$ , therefore  $u_1$  is a non-trivial nonnegative weak solution of the problem (4.1) such that  $J(u_1) = J^+(u_1) > 0$ .

Arguing similarly for  $J^-$ , we obtain a non-trivial non-positive weak solution  $u_2$  of (4.1) such that  $J(u_2) > 0$ .

**Proof of Corollary 4.1** Using Mountain Pass Theorem in [2], Lemma 4.1, Lemma 4.2 and Lemma 4.5, and arguing as in Proof of Theorem 4.1, we get the corollary.

**Proof of Corollary 4.2** Using Mountain Pass Theorem in [2], Lemma 4.1, Lemma 4.3 and Lemma 4.5, and arguing as in Proof of Theorem 4.1, we get the corollary.

**Proof of Theorem 4.2** By Theorem 4.1, we have two nontrivial weak solutions for (4.1), one solution is non-negative and one solution is non-positive, but both of them have positive energy. Therefore, we only need to find two nontrivial weak solutions for (4.1) which have negative energy. The first one is found by  $J^+$ , and the second is found by a similar argument for  $J^-$ .

$J$  is lower semi-continuous by its differentiability. Let  $\tau, \sigma$  and  $\mu$  as in Lemma 4.4. Put  $B = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p} \leq \sigma\}$ . Arguing as in (4.39) and using (ii) of Theorem 2.4, we see that  $J^+(B)$  is bounded. Put  $c = \inf_B J^+$ , then by Lemma 4.6, we have  $c < 0$ .

For  $n \in \mathbb{N}$ , let  $u_n \in B$  such that

$$c \leq J^+(u_n) \leq c + \frac{1}{n^2}. \tag{4.44}$$

Let  $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$  with  $\|e\|_{1,p} = 1$ . Apply Ekeland's Variational Principle in [11] with  $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$  and  $\delta = \frac{1}{n}$ , there exists  $v_n \in B$  such that

$$\begin{aligned} J^+(v_n) = J_{v_n}^+(v_n) &\leq J_{v_n}^+(v_n + te) = J^+(v_n + te) + \frac{1}{n} |t| \|e\|_{1,p} \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ J^+(v_n) &\leq J^+(u_n). \end{aligned} \tag{4.45}$$

From (4.45), we have

$$\frac{J^+(v_n + te) - J^+(v_n)}{|t|} \geq -\frac{1}{n}.$$

Thus

$$\begin{cases} \frac{J^+(v_n + te) - J^+(v_n)}{t} \geq -\frac{1}{n} & \text{if } t > 0, \\ \frac{J^+(v_n + te) - J^+(v_n)}{-t} \geq -\frac{1}{n} & \text{if } t < 0. \end{cases}$$

Therefore

$$\left| \frac{J^+(v_n + te) - J^+(v_n)}{t} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Letting  $t \rightarrow 0$ , we have

$$|DJ^+(v_n)(e)| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall e \in W_0^{1,p}(\Omega), \|e\|_{1,p} = 1.$$

Therefore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|DJ^+(v_n)\|_{(W_0^{1,p})^*} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_{\|e\|_{1,p}=1} |DJ^+(v_n)(e)| \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Since  $c = \inf_B J^+$ , by (4.44) and (4.45), we have

$$c \leq J^+(v_n) \leq c + \frac{1}{n^2}. \quad (4.46)$$

Therefore,  $J^+(v_n) \rightarrow c$  as  $n \rightarrow +\infty$ . It follows that  $\{v_n\}$  is a Palais–Smale sequence. By (4.5), we can assume that  $v_n \rightarrow v_0$  in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Hence,

$$DJ^+(v_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} DJ^+(v_n) = 0 \quad \text{and} \quad J^+(v_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J^+(v_n) = c < 0.$$

Therefore,  $v_0$  is a critical point of  $J^+$  with negative energy. Arguing as in Proof of Theorem 4.1 we get have  $v_0 \geq 0$  and Theorem 4.2.

*Remark 4.1.* If  $\eta$  in (4.3) is constant, the results in this section have been proved in [9].

**Example 4.1.** Let  $p = 2$ ,  $\Omega$  be the unit ball  $B_1(0)$  in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) and  $\eta(x) = (2\lambda_1)^{\frac{2}{3}}(1 - |x|)^{-1}$  for any  $x$  in  $\Omega$ . By Theorem 8.4 in [16], there is a real number  $c \geq 1$  such that

$$\int_{\Omega} |\eta u|^2 dx \leq c \|u\|_{1,2}^2 \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (4.47)$$

Let  $\delta$  be in  $\left(0, \frac{2\lambda_1}{c(1 + 2\lambda_1)}\right)$  and  $f$  be a real  $C^1$ -function on  $\Omega \times \mathbb{R}$  such that

$$\begin{cases} f(x, s) = \delta(1 - |x|^2)^{-\frac{2}{3}} s & \text{if } |s| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \Omega, \\ |f(x, s)| \in \left[0, 2\lambda_1(1 - |x|^2)^{-\frac{2}{3}} |s|\right] & \text{if } |s| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \forall x \in \Omega, \\ f(x, s) = \frac{2\lambda_1 s^3 (1 - |x|^2)^4}{1 + s^2 (1 - |x|^2)^4} (1 - |x|^2)^{-\frac{3}{2}} & \text{if } |s| \geq 1, \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.48)$$

(i) We have

$$V_0(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} = \delta(1 - |x|)^{-\frac{2}{3}}, \quad \forall x \in \Omega.$$

We get (V2), (F1) with  $\alpha = \frac{2}{3}$  and

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p - V_0|u|^2) dx \geq (1 - c\delta)\|u\|_{W_0^{1,2}}^2 \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Thus (V1) is fulfilled.

(ii) Put  $V_1(x) = V_2(x) = 2\lambda_1(1 - |x|)^{-\frac{2}{3}}$  for every  $x$  in  $\Omega$ . Since  $V_1(x) = V_2(x) > \lambda_1$  for every  $x$  in  $\Omega$ , by Theorem 3.2,  $\lambda(V_1) = \lambda(V_2) < 1$  and we get the condition (V2).

(iii) Let  $q = \frac{3}{2}$  and  $h = \varepsilon\eta^{\frac{\alpha q}{p}} = \varepsilon\eta^{\frac{9}{8}}$  with a sufficiently small positive real number  $\varepsilon$ , then we get (H1).

Thus we can apply Theorem 4.1 for  $f$  and  $h$ , but the results in [9] do not work in this case.

## 5 Acknowledgements

The author would like to thank to Prof. Dr. Jürgen Appell's for their valuable comments, suggestions, review and approval about of the paper. Also, the author would like to express their sincere gratitude to the referee of this paper for a very careful reading of it and for all the insightful comments and suggestions, which help us to improve the quality of this manuscript.

## References

- [1] R. Adam and J. Fournier, *Sobolev spaces*. Academic Press, New York 2005.
- [2] Z. W. Birnbaum and W. Orlicz. *Über die verallgemeinerung des berriffes der zueinander konjugierten potenzen*. *Stu. Math.*, **30** (1968), 21–42.
- [3] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*. *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 349–381.
- [4] A. Anane, *Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur  $p$ -laplacien*. *C. R. Ac. Sc. Paris*, **305** (1987), 725–728.
- [5] J. Appell and P. Zabreiko, *Nonlinear superposition operators*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [7] M. Cuesta. *Eigenvalue problems for the  $p$ -laplacian with indefinite weights*. *Electronic Journal of Differential Equations*. **2001**(33) (2001), 1–9.
- [8] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin. *Variational and topological methods for Dirichlet problems with  $p$ -laplacian*. *Portugaliae Mathematica* **58** (2001), 339–378.

- 
- [9] T. K. Donaldson and N. S. Trudinger. *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*. J. Funct. Anal. **8** (1971), 52–75.
- [10] D. M. Duc and N. Q. Huy. *Non-uniformly asymptotically linear  $p$ -Laplacian problems*. Non-linear Analysis **92** (2013), 183–197.
- [11] D. M. Duc. *Nonlinear singular elliptic equations*. J. London Math. Soc. **40**(2) (1989), 420–440.
- [12] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979), 443–474.
- [13] D. G. De Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Tata Institute of Foundational research, Bombay, 1989.
- [14] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 2001.
- [15] B. J. Jaye, V. G. Mazya and I. E. Verbitsky. *Quasilinear elliptic equations and weighted Sobolev-Poincaré inequalities with distributional weights*, Advances in Mathematics **232** (2013), 513–542.
- [16] M. A. Kransel'skii. *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Macmillan, New York, 1964.
- [17] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. Wiley, New York, 1985.
- [18] A. Kufner, O. John and S. Fucik. *Function spaces*. Noordhoff, Leyden 1977.
- [19] S. Fucik and A. Kufner. *Nonlinear Differential Equations*. Vol. 2, Elsevier, 1980.
- [20] M. Marcus and V. J. Mizel. *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous*, J. Funct. Anal. **33** (1979), 217–229.
- [21] M. Marcus and V. J. Mizel. *Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev spaces*. Transactions of AMS **251** (1979), 187–218.
- [22] J. Matkowski. *Functional equation and Nemytskii operators*. Funkc. Ekvac. **25** (1982) 127–132.
- [23] V. G. Mazja. *Sobolev spaces*, Springer, Berlin, 1985.
- [24] B. Opic and A. Kufner. *Remark on compactness of imbeddings in weighted spaces*. Math. Nachr. **133** (1987), 63–70.
- [25] T. Runst and W. Sickel, *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. Series: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications **3**, 2011.
- [26] M. Struve. *Variational methods*. Springer, Berlin, 2008.
- [27] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications III: Variational methods and optimization*. Springer, Berlin, 1985.

# On some interesting properties of $p$ -laplacian equation

*Sobre algunas propiedades interesantes de la ecuación  $p$ -laplaciana*

Gustavo Asumu Mboro Nchama (becquerrrr10@hotmail.com)

Universidad Nacional de Guinea Ecuatorial  
Calle Hassan II, Malabo  
Guinea Ecuatorial

Mariano Rodríguez Ricard (aangela@matcom.uh.cu)

Ángela León Mecías (rrricard@matcom.uh.cu)

Facultad de Matemática y Computación  
Universidad de la Habana  
Cuba

## Abstract

In the present paper we establish, on the one hand, some singular solutions concerning to the 1-laplacian equation. On the other hand, we give some properties related to the weak solutions of  $p$ -laplacian equation

**Key words and phrases:** Singular solution,  $p$ -laplacian equation,  $p$ -harmonic function.

## Resumen

En el presente artículo establecemos, por una parte, algunas soluciones singulares concernientes a la ecuación 1-laplaciana. Por otro lado, damos algunas propiedades relacionadas a la débil solución de la ecuación  $p$ -laplaciana.

**Palabras y frases clave:** Solución singular, ecuación  $p$ -laplaciana, función  $p$ -armónica.

## 1 Introduction

In this paper, we are investigating singular solutions and properties to the following equation which we shall call the  $p$ -Laplace equation [1-6, 9-11].

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0, \quad (1.1)$$

where  $p$  satisfies  $1 \leq p \leq \infty$ . The  $p$ -laplacian operator is defined as

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \\ &= |\nabla u|^{p-4} \left( |\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Received 28/10/2019. Revised 10/11/2019. Accepted 19/12/2019.

MSC (2010): Primary 35J05; Secondary 47F05.

Corresponding author: Gustavo Asumu Mboro Nchama

There are several noteworthy values of  $p$ :

a)  $p = \infty$ . As  $p \rightarrow \infty$  one encounters the infinity Laplacian equation

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (1.3)$$

in  $\mathbb{R}^n$ , which some singular solutions are given by

$$a\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2} + b \quad (1 \leq k \leq n) \quad (1.4)$$

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b \quad (1.5)$$

$$a_1 x_1^{4/3} + \cdots + a_n x_n^{4/3} \quad \left( \sum_{j=1}^n a_j^3 = 0 \right) \quad (1.6)$$

b)  $p = 2$ . In this case we have the Laplace equation

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1.7)$$

c)  $p = 1$ . In this case we obtain the 1-laplacian equation

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \quad (1.8)$$

For  $x \in \mathbb{R}^3$  and under the assumption that  $|\nabla u| \neq 0$ , it then follows from (1.8)

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 \cdot \Delta u - \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

The purpose of this paper is to obtain nontrivial singular solutions of (1.8) and some properties of weak solutions concerning the equation (1.1). The paper has been organized as follows: in section 2, we briefly review the basic definitions used in our subsequent discussions, next, the preliminary results are established in section 3. Section 4 present the main results.

## 2 Basic definitions

Here, we give some definitions used in our subsequent discussions. For more details, see [7-8, 12]

**Definition 2.1.** We denote by  $C_0(\Omega)$  the space of all continuous functions on  $\Omega$  with compact support.



Other interesting notations are

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega) \tag{2.1}$$

**Definition 2.2.** The Sobolev space  $W^{1,p}(\Omega)$  is defined by

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p \mid \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p \text{ such that } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

**Definition 2.3.** Let  $\Omega$  be a domain in  $\mathbb{R}^n$ . We say that  $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  is a weak solution of the  $p$ -harmonic equation (1.1) in  $\Omega$ , if

$$\int |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

If, in addition,  $u$  is continuous, then we say  $u$  is a  $p$ -harmonic function.

**Definition 2.4.** Let  $\Omega$  be a domain in  $\mathbb{R}^n$ . We say that  $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  is a classical solution of (1.1), if  $u$  satisfies (1.1)

**Definition 2.5.** We say that  $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  is a weak supersolution of the  $p$ -harmonic equation (1.1) in  $\Omega$ , if

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla \eta dx \geq 0 \tag{2.3}$$

for all nonnegative  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ . For weak subsolution, the inequality is reversed.

**Definition 2.6.** Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  be an open set, a linear differential operator of second order  $L : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$  is defined as

$$L(u) = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u \tag{2.4}$$

where  $a_{ij} \in C^1(\Omega), a_i \in C(\Omega), \forall i, j = 1, \dots, n$  y  $a_0 \in C(\bar{\Omega})$ .

**Definition 2.7.** Let  $V$  an  $K$ -vectorial space. A function  $g : V \times V \rightarrow K$  is called a *bilinear form* if

- i)  $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w), \quad \forall u, v, w \in V,$
- ii)  $g(\lambda v, w) = \lambda g(v, w), \quad \forall \lambda \in K, \forall v, w \in V,$
- iii)  $g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w), \quad \forall u, v, w \in V,$
- iv)  $g(v, \lambda w) = \lambda g(v, w), \quad \forall \lambda \in K, \forall v, w \in V.$

**Definition 2.8.** Let  $H$  be a Hilbert space, we say that a bilinear form  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  is

- a) continuous if there exists a constant  $C > 0$  such that

$$|g(u, v)| \leq C \|u\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall u, v \in H. \tag{2.5}$$

b) coercive if there exists a constant  $\theta > 0$  such that

$$g(u, v) \geq \theta \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H. \quad (2.6)$$

**Definition 2.9.** The bilinear form  $g : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  connected with the operator  $L$  is defined as

$$g(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v + \int_{\Omega} a_0 uv \quad (2.7)$$

for all  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

### 3 Preliminary results

**Theorem 3.1.** *Let suppose that the bilinear form (2.7) is coercive with the constant of coersity  $\theta$ . Then the bilinear form (2.7) is continuous and furthermore exist  $\alpha, \gamma \geq 0$  such that [8]*

$$\alpha \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq g(u, u) + \gamma \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.1)$$

for all  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Where

$$\alpha = \frac{\theta}{2} \quad \gamma = \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.2)$$

**Theorem 3.2.** (Caccioppoli) *If  $u$  is a weak solution of (1.1) in  $\Omega$ , then*

$$\int_{\Omega} \xi^p \cdot |\nabla u|^p dx \leq p^p \cdot \int_{\Omega} |u|^p \cdot |\nabla \xi|^p dx \quad (3.3)$$

for al  $\xi \in C_c^\infty(\Omega), \xi \geq 0$ .

*Proof.* Use

$$\begin{aligned} \eta &= \xi^p u \\ \nabla \eta &= \xi^p \nabla u + p \xi^{p-1} u \nabla \xi \end{aligned}$$

By the equation (2.2) and Holder's inequality

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi^p |\nabla u|^p dx &= -p \int_{\Omega} \xi^{p-1} \cdot u \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \xi \rangle dx \\ &\leq p \int_{\Omega} |\xi \cdot \nabla u|^{p-1} \cdot |u \cdot \nabla \xi| dx \\ &\leq p \left\{ \int_{\Omega} \xi^p |\nabla u|^p dx \right\}^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |u|^p \cdot |\nabla \xi|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

The estimate follows. □

**Theorem 3.3.** *If  $v > 0$  is a weak supersolution of (1.1) in  $\Omega$ , then*

$$\int_{\Omega} \xi^p \cdot |\nabla \log v|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot \int_{\Omega} |\nabla \xi|^p dx \tag{3.4}$$

whenever  $\xi \in C_c^\infty(\Omega), \xi \geq 0$ .

*Proof.* One may add constants to the weak supersolutions. First, prove the estimate for  $v(x) + \epsilon$  in place of  $v(x)$ . Then let  $\epsilon \rightarrow 0$  in

$$\int_{\Omega} \frac{\xi^p \cdot |\nabla v|^p}{(v + \epsilon)^p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot \int_{\Omega} |\nabla \xi|^p dx \tag{3.5}$$

Hence we may assume that  $v(x) \geq \epsilon > 0$ . Next use the test function  $\eta = \xi^p v^{1-p}$ . Then

$$\nabla \eta = p \xi^{p-1} v^{1-p} \nabla \xi - (p-1) \xi^p v^{-p} \nabla v \tag{3.6}$$

and we obtain

$$\begin{aligned} (p-1) \int_{\Omega} \xi^p v^{-p} |\nabla v|^p dx &\leq p \int_{\Omega} \xi^{p-1} \cdot v^{1-p} \langle |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \xi \rangle dx \\ &\leq p \int_{\Omega} \xi^{p-1} \cdot v^{1-p} \cdot |\nabla v|^{p-1} \cdot |\nabla \xi| dx \\ &\leq p \left\{ \int_{\Omega} \xi^p \cdot v^{-p} |\nabla v|^p dx \right\}^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \xi|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

from which the result follows. □

**Theorem 3.4.** *Suppose that  $1 \leq p \leq \infty$  and  $\Omega$  is a bounded open set. Then exists a constant  $C$  (depending on  $\Omega$  and  $p$ ) such that [7]*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) (1 \leq p \leq \infty)$$

*In particular, the expression  $\|\nabla u\|_{L^p}$  is a norm on  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , and it is equivalent to the norm  $\|u\|_{W^{1,p}}$*

## 4 Main Results

### 4.1 Some results of weak solutions

**Theorem 4.1.** *A  $C^2$  function  $u$  that satisfies (1.1) is a weak solution of (1.1)*

*Proof.* Multiply (1.1) by  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$  and integrate by parts; we obtain

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

as required. □

**Theorem 4.2.** *Let  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  be a weak solution of  $p$ -harmonic equation (1.1) in  $\Omega$ , then*

$$\|\xi \cdot |\nabla u|\|_{L^p} \leq p(\|u\|_{L^{2p}}^2 + \|\nabla \xi\|_{L^{2p}}^2) \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega), \xi \geq 0.$$

*Proof.* From Theorem 3.2, we have

$$\int_{\Omega} \xi^p \cdot |\nabla u|^p dx \leq p^p \cdot \int_{\Omega} |u|^p \cdot |\nabla \xi|^p dx \quad (4.1)$$

In terms of (4.1), it then follows that

$$\|\xi \cdot |\nabla u|\|_{L^p} \leq p \cdot \| |u| \cdot |\nabla \xi| \|_{L^p} \quad (4.2)$$

To continue we need the Young inequality

$$a \cdot b \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad (4.3)$$

We obtain

$$\begin{aligned} \|\xi \cdot |\nabla u|\|_{L^p} &\leq p \| |u| \cdot |\nabla \xi| \|_{L^p} \\ &\leq p \left( \varepsilon \| |u|^2 \|_{L^p} + \frac{1}{4\varepsilon} \| |\nabla \xi|^2 \|_{L^p} \right) \\ &\leq p \left( \varepsilon \| |u|^2 \|_{L^p} + \frac{1}{4\varepsilon} \| |\nabla \xi|^2 \|_{L^p} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

We insert  $\varepsilon \in [\frac{1}{4}, 1]$  into the inequality (4.4). This yields

$$\begin{aligned} \|\xi \cdot |\nabla u|\|_{L^p} &< p \left[ \varepsilon \| |u|^2 \|_{L^p} + (1 - \varepsilon) \| |u|^2 \|_{L^p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\varepsilon} \| |\nabla \xi|^2 \|_{L^p} + \frac{4\varepsilon - 1}{4\varepsilon} \| |\nabla \xi|^2 \|_{L^p} \right] \\ &= p \left[ \| |u|^2 \|_{L^p} + \| |\nabla \xi|^2 \|_{L^p} \right] \\ &= p(\|u\|_{L^{2p}}^2 + \|\nabla \xi\|_{L^{2p}}^2), \end{aligned}$$

as required.  $\square$

**Theorem 4.3.** *Let suppose that the constant of coersity of the bilinear form (2.7) is  $\theta$ . Let also  $v \in W^{1,p}(\Omega)$  be a positive ( $v > 0$ ) weak supersolution of the  $p$ -harmonic equation (1.1) in  $\Omega$ , then there exist constants  $\beta > 0$  and  $\gamma \geq 0$  such that*

$$\beta \|u \cdot |\nabla \log v|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq g(u, u) + \gamma \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.5)$$

for all  $u \in C_0^\infty(\Omega), u \geq 0$ , with  $\gamma$  and  $g(u, u)$  given by (3.2) and (2.7) respectively.

*Proof.* Let  $p = 2$ . By Theorem 3.3, we obtain inequality

$$\|u \cdot |\nabla \log v|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4 \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

which can be written as

$$\|u \cdot |\nabla \log v|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4 \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4 \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (4.6)$$

Combining the inequality (3.1) with the estimate (4.6), we obtain

$$\alpha \|u \cdot |\nabla \log v|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4 \cdot g(u, u) + 4 \cdot \gamma \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.7)$$

Divide out the common factor. We arrive at

$$\beta \|u \cdot |\nabla \log v|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq g(u, u) + \gamma \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.8)$$

with the constant  $\beta = \frac{\alpha}{4}$ . This concludes the proof.  $\square$

## 4.2 Singular solutions of 1-Laplacian equation

The purpose of this section is to prove that the functions

$$u = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + d_0)e^{x_1+x_2+\cdots+x_n+d_1} + d_2 \quad (4.9)$$

$$u = e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d} + d_0 \quad (4.10)$$

$$u = \ln(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d) + d_0 \quad (4.11)$$

$$u = \ln(e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d_0} + d_1) + d_2 \quad (4.12)$$

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d_0 + e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d_1} \quad (4.13)$$

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d_0 + \ln(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d_1) \quad (4.14)$$

$$u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d_0 + \ln(e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d_2} + d_1) \quad (4.15)$$

$$u = e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+d_0} + \ln(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + d_1) + d_2 \quad (4.16)$$

are singular solutions of the equation (1.8). Where  $a_i (i = 0, \dots, n), a, b, c, d, d_0, d_1, d_2, d_3$  are real numbers. For  $x \in \mathbb{R}^3$ , we shall have

$$u = (x + y + z + d_0)e^{x+y+z+d_1} + d_2 \quad (4.17)$$

$$u = e^{ax+by+cz+d} + d_0 \quad (4.18)$$

$$u = \ln(ax + by + cz + d) + d_0 \quad (4.19)$$

$$u = \ln(e^{ax+by+cz+d_0} + d_1) + d_2 \quad (4.20)$$

$$u = ax + by + cz + d_0 + e^{ax+by+cz+d_1} \quad (4.21)$$

$$u = ax + by + cz + d_0 + \ln(ax + by + cz + d_1) \quad (4.22)$$

$$u = ax + by + cz + d_0 + \ln(e^{ax+by+cz+d_2} + d_1) \quad (4.23)$$

$$u = e^{ax+by+cz+d_0} + \ln(ax + by + cz + d_1) + d_2 \quad (4.24)$$

**Theorem 4.4.** *The function (4.17) is singular solution of the equation (1.9)*

*Proof.* Noticing that

$$|\nabla u|^2 \cdot \Delta u = 9 \cdot (x + y + z + d_0 + 1)^2 \cdot (x + y + z + d_0 + 2) \cdot e^{3(x+y+z+d_1)} \quad (4.25)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cdot (x + y + z + d_0 + 1)^2 \cdot (x + y + z + d_0 + 2) \cdot e^{3(x+y+z+d_1)} \quad (4.26)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cdot (x + y + z + d_0 + 1)^2 \cdot (x + y + z + d_0 + 2) \cdot e^{3(x+y+z+d_1)} \quad (4.27)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = 3 \cdot (x + y + z + d_0 + 1)^2 \cdot (x + y + z + d_0 + 2) \cdot e^{3(x+y+z+d_1)} \quad (4.28)$$

and inserting (4.25)-(4.28) into the equation (1.9), we obtain

$$0 \cdot (x + y + z + d_0 + 1)^2 \cdot (x + y + z + d_0 + 2) \cdot e^{3(x+y+z+d_1)} = 0, \quad (4.29)$$

from which the proof follows.  $\square$

Similar to the proof of the foregoing theorem, we have

**Theorem 4.5.** *Functions (4.18)-(4.24) are singular solutions of the equation (1.9).*

## References

- [1] ZuChi Chen and Tao Luo. *The eigenvalue problem for the  $p$ -laplacian like equations*. I.J.M.M.S., **S0161171203006744** (2011), 575–576.
- [2] Benjin Xuan. *Existence results for a superlinear  $p$ -laplacian equation with indefinite weights*. Nonlinear Analysis **54** (2003), 949–950.
- [3] Fang Li and Zuodong Yang. *Existence of positive solutions of singular  $p$ -laplacian equations in a ball*. J. Nonlinear Sci. Appl. **5** (2012), 44–45.
- [4] Huashui Zhan and Zhaosheng Feng. *Existence of solutions to an evolution  $p$ -laplacian equation with a nonlinear gradient term*. Electronic Journal of Differential Equations, **2017(311)** (2017), 1–2.
- [5] Patrizia Pucci and Raffaella Servadei. *On weak solutions for  $p$ -laplacian equations with weights*. Rend. Lincei Mat. Appl. **18** (2017), 257–258.
- [6] Patrizia Pucci and Raffaella Servadei. *On weak solutions for  $p$ -laplacian equations with weights*. Discrete and continuous Dynamical Systems, Supplement Volume **2007**, 1–2.
- [7] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, 1987.

- 
- [8] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society Equations. **19**.
- [9] Abimbola Abolarinwa. *The first figenvalue of  $p$ -laplacian and geometric estimates*. Nonl. Analysis and Differential Equations. **2** (2014), 105–106.
- [10] Lorenzo Brasco and Erik Lindgren. *Higher Sobolev regularity for the fractional  $p$ -Laplace equation in the superquadratic case*. Advances in Mathematics, Elsevier. **304** (2017), 1–2.
- [11] Aomar Anane et. al.. *Nodal domains for the  $p$ -laplacian*, Advances in Dynamical Systems and Applications. **2** (2007), 135–136.
- [12] N. Sauer. *Properties of bilinear forms on Hilbert spaces related to stability properties of certain partial differential operators*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **20** (1967), 124–126.

# Problemas y Soluciones

## *Problems and Solutions*

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@gmail.com)  
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias  
Universidad del Zulia, Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en  $\text{\LaTeX}$ ). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

*Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a  $\text{\LaTeX}$  source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.*

## 1 Problemas propuestos

El problema propuesto a continuación se planteó en la 34<sup>a</sup> Olimpiada Iberoamericana celebrada en Guanajuato, México, en septiembre del 2019.

146. Determine todos los polinomios  $P(x)$  de grado  $n \geq 1$  con coeficientes enteros tales que

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n - 1)).$$

## 2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 27–28, 44, 51, 54, 59, 69, 79, 82–91, 94–100, 106, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

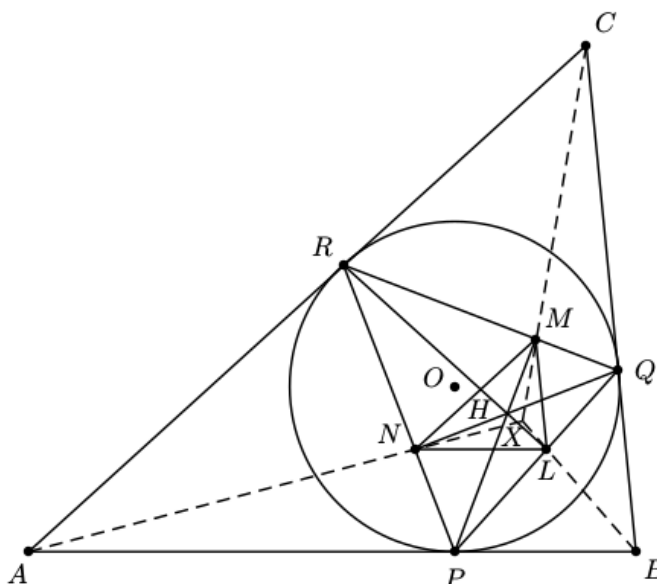
103. [13(1) (2005) p. 79.] En el triángulo  $ABC$  sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los puntos de tangencia del incírculo en los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$  respectivamente. Sean  $L$ ,  $M$  y  $N$  los pies de las alturas del triángulo  $PQR$  en  $PQ$ ,  $QR$  y  $PR$ , respectivamente.

- Demuestre que las rectas  $AN$ ,  $BL$  y  $CM$  se cortan en el mismo punto.
- Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo  $PQR$ .



*Solución del editor:* (a)  $\angle BPL = \angle PRQ$  por ángulo semi-inscrito,  $\angle PRQ = 180^\circ - \angle NHM = \angle NHP$  pues  $RNHM$  es cíclico,  $\angle NHP = \angle NLP$  pues  $PNHL$  es cíclico. Por lo tanto  $\angle BPL = \angle NLP$  y  $AB \parallel NL$ . Análogamente  $BC \parallel LM$  y  $CA \parallel MN$ . Por lo tanto los triángulos  $ABC$  y  $NLM$  son homotéticos, y las rectas  $AN$ ,  $BL$  y  $CM$  se cortan en el centro de homotecia  $X$ .

(b) El ortocentro  $H$  de  $PQR$  es el incentro de su triángulo órtico  $NLM$ . Pero la homotecia que transforma  $NLM$  en  $ABC$  lleva el incentro de  $NLM$  en el incentro de  $ABC$ , que es el circuncentro  $O$  de  $PQR$ . Por lo tanto  $X$ ,  $H$  y  $O$  están alineados.



104. [13(1) (2005) p. 79.] Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de  $10 \times 10$ . Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

*Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.*

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

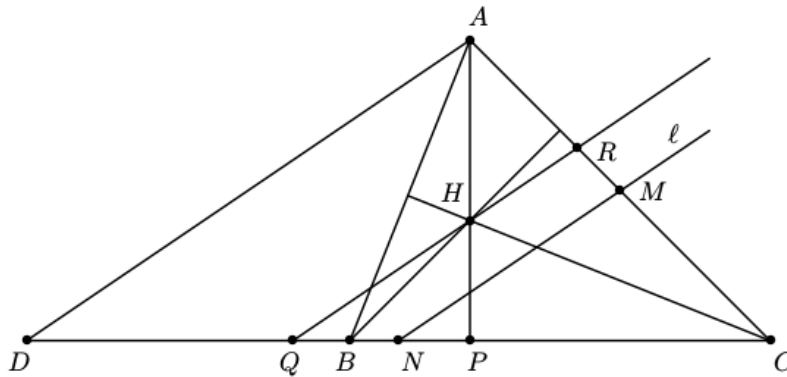
*Solución del editor:* Rojo tiene una estrategia ganadora, que consiste en seleccionar, cada vez que le toca jugar, una línea del tablero perpendicular a la seleccionada por Azul en su jugada previa. Es claro que esto es siempre posible, ya que luego de las dos primeras

jugadas quedarán 9 filas y 9 columnas disponibles, luego de la cuarta jugada quedarán 8 filas y 8 columnas disponibles, etc.

Para probar que esta estrategia es ganadora observemos que cada casilla del tablero es pintada exactamente dos veces, una cuando uno de los jugadores selecciona la fila en la cual se encuentra la casilla, y otra cuando alguno selecciona su columna. Para fijar ideas numeremos las filas de 1 a 10 y también las columnas de 1 a 10, y convengamos en que en el turno de Rojo, si en la jugada previa Azul escogió la fila  $k$  entonces Rojo escoge la columna  $k$ , mientras que si Azul escogió la columna  $k$ , entonces Rojo escoge la fila  $k$ . Si en sus primeras jugadas Azul y Rojo seleccionaron la fila y columna  $i_1$  (en ese orden o en el contrario) entonces la casilla  $(i_1, i_1)$  que está en la intersección de ambas líneas es la única que queda con su color definitivo, que será el rojo. Si en la tercera y cuarta jugadas seleccionan la fila y columna  $i_2$  entonces tres nuevas casillas alcanzan su color final, a saber las  $(i_1, i_2)$ ,  $(i_2, i_2)$  y  $(i_2, i_1)$ . De estas tres, dos son rojas y una azul. En general, con cada par de jugadas sucesivas la ventaja de las casillas con color definitivo rojo sobre las azules se incrementa en 1. En efecto, si en las jugadas  $2k - 1$  y  $2k$  Azul selecciona la fila  $i_k$  y Rojo la columna  $i_k$  entonces las casillas  $(i_k, i_1), (i_k, i_2), \dots, (i_k, i_{k-1})$  quedan con color definitivo azul, mientras que  $(i_1, i_k), (i_2, i_k), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_k)$  quedan con color definitivo rojo. Si Azul selecciona la columna  $i_k$  y Rojo la fila  $i_k$  entonces entonces las casillas  $(i_1, i_k), (i_2, i_k), \dots, (i_{k-1}, i_k)$  quedan con color definitivo azul y las  $(i_k, i_1), (i_k, i_2), \dots, (i_k, i_{k-1}), (i_k, i_k)$  quedan con color definitivo rojo. De este modo, al finalizar el juego el número de casillas rojas superará en diez unidades al número de casillas azules y Rojo ganará el juego.

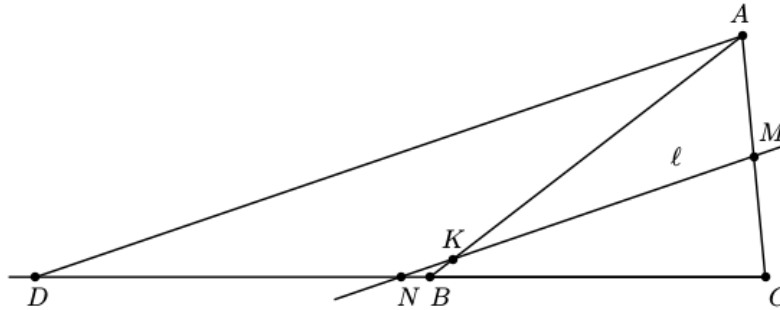
105. [13(1) (2005) p. 80.] En un triángulo acutángulo  $ABC$ , sean  $H$  su ortocentro y  $M$  el punto medio del lado  $AC$ . Por  $M$  se traza una recta  $L$  paralela a la bisectriz del ángulo  $AHC$ . Demuestre que la recta  $L$  divide al triángulo  $ABC$  en dos partes que tienen el mismo perímetro.

*Solución del editor:* Sea  $P$  el pie la altura desde  $A$ . Entonces  $\angle PHC = 90^\circ - \angle HCB = \angle CBA = \beta$ . Por lo tanto  $\angle AHC = 180^\circ - \angle PHC = 180^\circ - \beta$ . Si la bisectriz de  $\angle AHC$  corta a la recta  $BC$  en  $Q$  y a  $AC$  en  $R$ , entonces  $\angle CHR = 90^\circ - \beta/2$  y  $\angle CQH = \angle CHR - \angle HCB = 90^\circ - \beta/2 - (90^\circ - \beta) = \beta/2$ .



Tomemos ahora  $D$  en la prolongación de  $CB$  de modo que  $BD = BA$ . Es fácil ver que  $\angle ADB = \beta/2$  y por lo tanto  $DA \parallel QR \parallel \ell$ . Por lo tanto  $\ell$  es paralela media del triángulo  $ADC$  y el punto  $N$  donde se cortan  $\ell$  y la recta  $BC$  es el punto medio de  $DC$ .

Si  $N$  está en el segmento  $BC$  como en la figura anterior, se tiene  $NB + BA = ND = NC$  y como  $MC = MA$  resulta que  $NBAM$  y  $NCM$  tienen igual perímetro. Si en cambio  $N$  está fuera del segmento  $BC$  como en la figura siguiente, y  $K$  es la intersección de  $\ell$  con el lado  $AB$ , es claro que  $BN = BK$  y por tanto  $KA = BA - BK = BD - BN = ND = NC = NB + BC = BK + BC$  y como  $MC = MA$  resulta que  $KAM$  y  $KBCM$  tienen igual perímetro.



# Guía para los Autores

**Divulgaciones Matemáticas** es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

**Identificación.** Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

**Resumen:** Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

**Abstract:** Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

# Guide for Authors

**Divulgaciones Matemáticas** is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to [divulgaciones@demat-fecluz.org](mailto:divulgaciones@demat-fecluz.org). If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

**Identification.** This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

**Abstract:** Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

**Resumen:** A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 20, No. 2  
Se terminó de editar en Diciembre del 2019  
en el Departamento de Matemática (DEMAT)  
Maracaibo - Venezuela.

**La Universidad del Zulia**

**AUTORIDADES**

Jorge Palencia  
**Rector**

Judith Aular de Durán  
**Vicerrectora Académica**

Clotilde Navarro  
**Vicerrector Administrativa**

Marlene Primera Galué  
**Secretaria de LUZ**

**Facultad Experimental de Ciencias**

Beatríz González  
**Decana (E)**

Neida Murcia  
**Directora del Departamento de Matemáticas**

# Divulgaciones Matemáticas

Vol. 20, No. 2, 2019

## Contenido (Contents):

### Artículos de Investigación (Research papers)

**Propiedades geométricas de polígonos en planos de Minkowski.**

Geometric properties of polygons in Minkowski planes.

*Loidybeth Carrillo Colmenares, Tobías Rosas Soto*

1-30

**Locally dened operators in the space of functions of bounded  $\Lambda$ -variation.**

Operadores localmente denidos en espacios de funciones de  $\Lambda$ -variación acotada.

*Wadie Aziz, José A. Guerrero, Newman Zambrano*

31-38

**On the C-trace pseudospectrum in the matrix algebra.**

Sobre el pseudoespectro de C-traza en el álgebra matricial.

*Aymen Ammar - Aref Jeribi - Kamel Mahfoudhi*

39-44

**Composition operators from Sobolev spaces into Lebesgue spaces.**

Operadores de composición desde espacios de Sobolev en espacios de Lebesgue.

*Wadie Aziz*

45-62

**On some interesting properties of p-laplacian equation.**

Sobre algunas propiedades interesantes de la ecuación p-laplaciana.

*Gustavo Mboro Nchama, Mariano Rodríguez Ricard, Ángela León Mecías*

63-71

### Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

*José H. Nieto S. (Editor).*

72-75