

Encuentro Educativo

ISSN 1315-4079 ~ Depósito legal pp 199402ZU41

Vol. 14(3) Septiembre - Diciembre 2007: 511 - 536

Líneas de investigación en didáctica de las matemáticas

Yaneth Josefina Ríos García

Departamento de Matemática y Física. Universidad del Zulia, adscrita al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación. E-mail: yanrios@cantv.com.

Resumen

El objetivo de este trabajo es describir y comparar las líneas de investigación en la Didáctica de las Matemáticas, para ello se utilizó una metodología de análisis documental donde se: detallaron y compararon las áreas de investigación planteadas por Font y Coll, describieron las líneas de investigación abarcadas por la Psicología Cognitiva en el área de Educación Matemática; y por último se detallan otras áreas de investigación que debido a la metodología que han utilizado para el análisis de la información, y la construcción de un marco teórico propio, se han independizado de los anteriores enfoques, ellas son: el análisis fenomenológico, la socio-epistemología y la matemática realista.

Palabras clave: Procesos cognitivos y metacognitivos, Didáctica de las Matemáticas y líneas de investigación.

Línes of Investigation in the Didactics of Mathematics

Abstract

The objective of this work is to describe and compare research areas in the didactics of mathematics. A documentary analysis method was used, which detailed and compared the research areas proposed by Font and Coll, describing the lines of investigation included in cognitive psychology in the area of mathematical education. Finally, other areas of investigation are detailed which, due to the methodology they have used for analyzing information and the construction of their own theoretical framework, have become independent from previous approaches. They are: phenomenological analysis, socio-epistemological analysis and mathematical realist analysis.

Key words: Cognitive and metacognitive processes, didactics of mathematics, lines of investigation.

Introducción

Son muchas las variables que inciden en cualquier actividad humana y que deben ser tomadas en cuenta para su estudio, variables tales como aspectos síquicos de los individuos que realizan la actividad, el lugar donde se desarrolla la actividad, las relaciones que se dan entre estos individuo, el tipo de actividades que se desarrollan, la secuencia de tales actividades, el contexto social, político y económico en el cual se desarrollan, entre otras.

Por supuesto, la actividad matemática escolar no está alejada de esta realidad, por lo que el estudio de las actividades que se desarrollan en el aula no puede hacerse desde

una sola perspectiva, sino que es conveniente el concurso de varias disciplinas y enfoques, ligados a las variables antes mencionadas.

Tenemos por ejemplo, que una de las variables de interés para los investigadores educativos son los procesos cognitivos adquiridos en la adquisición del conocimiento matemático; por tal motivo es imposible el estudio de estos factores desligados de la Psicología.

Por otro lado, los aspectos sociales y culturales que inciden en la construcción del conocimiento por parte del alumno no han pasado desapercibidos, por lo que se ha buscado la ayuda de la Antropología para analizar los intercambios de significados matemáticos que se

dan entre el profesor y el alumno en el aula.

Se observa, que en función de cada aspecto que se considere en la acción educativa, son varias las disciplinas científicas que inciden en el análisis del fenómeno didáctico; esto ha dado origen a diversas líneas de investigación, donde sus propósitos están definidos por las dimensiones que se consideren en la acción didáctica. Por tal motivo, surge la necesidad de hacer una descripción y comparación entre éstas áreas de investigación en Educación Matemática; este es el objetivo de este trabajo.

En la primera parte se detallan los siete enfoques de investigación, que según Font (2000), caracterizan a las Didácticas de las Matemáticas y además se exhibe un cuadro comparativo de estos enfoques. Posteriormente, se describen las ocho líneas de investigación, que según Coll (1993), han sido abordadas desde la Psicología y las didácticas, y que se han encargado de estudiar diversos problemas en el área de enseñanza-aprendizaje en general; se aprovecha la oportunidad para relacionar los enfoques de Font y las líneas de investigación de Coll.

En la tercera parte se explicitan las cinco líneas de investigación, que según Armendáriz y col. (1993) son abordadas desde la psicología, referidas a los procesos cognitivos. Así mismo, se detallan algunas

áreas de estudio referidas a los procesos de control y monitoreo de actividades desarrolladas en la resolución de problemas que según Soto, Campanario y González, se han realizado.

Por último, se describen otras áreas de investigación que existen, como son: el análisis fenomenológico, la socio-epistemología y la matemática realista, que aunque están relacionadas con las anteriores, debido a la metodología que han utilizado para el análisis de la información, y la construcción de un marco teórico propio, les permite independizarse de las descritas anteriormente y esto les ofrece cierta autonomía.

1. Líneas de investigación en el área de didáctica de las matemáticas según Vincent Font

Font (2000) establece las características de las diversas líneas de investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas, tomando en consideración los siguientes criterios:

1. La ontología general referida a una teoría sobre la existencia del mundo y lo que habita en él.
2. Una epistemología general que comprende la génesis, naturaleza y validación de los conocimientos objetivos y subjetivos.
3. La naturaleza de las Matemáticas

4. Una teoría sobre el aprendizaje y enseñanza que comprende una teoría general sobre el aprendizaje y la enseñanza del conocimiento personal y una teoría específica sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática.
5. El objeto de investigación.
6. La metodología de investigación.

El enfoque cognitivo

El foco de atención de las investigaciones de corte cognitivo es el individuo, en nuestro caso: docentes y alumnos; sus elementos de análisis son importados de la psicología, toma en cuenta elementos tales como: el aprendizaje significativo, las representaciones mentales, los valores, roles, actitudes y motivaciones, entre otros.

La crítica que se le hace a este enfoque es que no toma en cuenta el aspecto social, pues si su centro de atención son las acciones humanas, éstas implican más elementos además de los procesos mentales, pues las acciones humanas adquieren significados en la medida que se considere un contexto social.

Para este enfoque, el aprendizaje se entiende significativo cuando el nuevo contenido se integra en el esquema cognitivo ya existente en la mente del sujeto. Uno de las bases teóricas más fuertes, dentro de este enfoque es el Procesamiento de la Información, en el cual se han realizado representaciones hipotéticas sobre la manera de organizar el

conocimiento proposicional en la memoria a través de redes semánticas y esquemas.

Las líneas de investigación, en el área de Didáctica de las Matemáticas, que se destacan en este enfoque son: el pensamiento avanzado en Matemática y los campos conceptuales.

La primera se basa en la hipótesis de Vinner (1991, citado por Font, 2000) que establece que cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto, lo que evocamos no es la definición del concepto, sino la imagen del concepto; ésta última es una representación no verbal. La imagen y la definición del conceptos, según Vinner, se encuentran en celdas separadas, que se conectan de vez en cuando; la definición de un concepto son las propiedades y procedimientos que lo caracterizan y la imagen del concepto además de considerar la definición agrega otro elemento como las imágenes mentales.

La segunda línea, los campos conceptuales, fue trabajada por Verneaud (1990, citado por Font, 2000); él define el campo conceptual como un conjunto de problemas o situaciones, donde para su tratamiento se necesitan de conceptos, representaciones y procedimientos interconectados. Considera que en los esquemas se encuentran las bases de las competencias matemáticas, estos se caracterizan por pertenecer a una clase particular

de situaciones y generar conductas diferentes en función de las características de las situaciones. Los esquemas tienen los siguientes componentes:

- Invariantes operatorios como los conceptos en acto y teoremas en acto, referidos al reconocimiento de los datos de la situación.
- Anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales
- Reglas de acción del tipo si...entonces.
- Inferencias o razonamientos que permiten establecer los procedimientos y anticipaciones a partir de los datos y los invariantes operatorios que posee el sujeto.

Constructivismo radical

Glasesfeld (1995, citado por Font, 2000) propone dos principios básicos en cuanto a la construcción del conocimiento: éste es construido por el sujeto y la función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir la realidad trascendente.

Conferí (1994, citado por Font, 2000) considera que las bases de este enfoque son:

- La epistemología genética de Piaget.
- Una epistemología radical caracterizada por: rechazar la concepción de tener una visión

exacta de las cosas, creer que se conoce las cosas en la medida que actuamos sobre ellas, el conocimiento verdadero es el útil y reconocer el papel del observador en la descripción y el análisis de la información.

- La unidad de análisis es el esquema con su génesis y modificación.
- La modelización permite tener modelos viables de cómo conoce el individuo, pues es imposible conocer cómo es el conocimiento matemático del individuo.

Constructivismo social

Tres son las líneas del pensamiento que lo sustentan y estructuran, a saber:

Perspectiva epistemológica: Ernest (1998, citado por Font, 2000) explica que la Matemática se basa en la lógica del descubrimiento de la prueba y refutaciones de Lakatos, la Matemática deriva de la aceptación de reglas socialmente preexistentes, el conocimiento objetivo se entiende como un conocimiento social, cultural, público y colectivo y la Matemática es algo lingüístico, semiótico y textual.

Perspectiva antropológica: Bishop (1999, citado por Font, 2000) entiende que la Matemática ha surgido de desarrollos intraculturales a través de actividades tales como contar, localizar, medir, diseñar, ju-

gar y explicar, y de la interacción entre culturas diferentes.

Perspectiva psicológica: Vigotsky (citado por Font, 2000) propone que las funciones mentales superiores de la persona son relaciones sociales internalizadas y distingue dos líneas de desarrollo, una natural y otra sociocultural; concibe que a través del trabajo, con sus herramientas, se descubren las propiedades de los objetos y las situaciones, así pues una de las herramientas fundamentales del pensamiento es el lenguaje (signos y símbolos); establece que las instituciones educativas inciden en la formación de las funciones psicológicas superiores pues se construye el conocimiento con base en la experiencia pero es modificada por las nuevas experiencias en la sociedad; y por último, aporta la teoría de desarrollo próximo.

Enfoque sistémico

En este enfoque se presentan dos perspectivas, la de Brousseau (1986, citado por Font, 2000) y la de Chevalard (1997, citado por Font, 2000).

El primero concibe que para analizar los fenómenos ligados al aprendizaje de la Matemática, se debe problematizar el contenido matemático a enseñar. El objeto de estudio es el sistema didáctico, formado por el docente, alumno y saber matemático; empieza estudian-

do los fenómenos ligados a la transposición didáctica, luego modeliza la situación de enseñanza aprendizaje a través de las situaciones didácticas y por último concibe la situación escolar como un sistema donde se establecen relaciones entre dos sub-sistemas, el enseñante y el enseñado.

Chevalard, por su parte, trabaja con el sistema didáctico y agrega otro componente, el entorno, pues asegura que no se puede entender el interior del sistema si no se tiene en cuenta el exterior.

El entorno inmediato de un sistema didáctico, son otros sistemas didácticos y otros dispositivos estructurales tales como los recursos, los reglamentos, los programas, el contexto, entre otros. Estos sistemas didácticos y los dispositivos estructurales constituyen lo que se denomina sistema de enseñanza. A su vez, este último tiene un entorno inmediato constituido por los representantes, directivos y Matemáticos y un entorno más externo formado por la sociedad.

La relación entre el entorno y el sistema didáctico pasa por la transposición didáctica, que permite la confrontación entre el saber sabio, el saber que se quiere enseñar y el saber enseñado.

Enfoque antropológico

Es propuesto por Chevalard (1992, citado por Font, 2000) y es-

tablece que la actividad matemática se debe interpretar como una actividad humana y no se ha de considerar solamente como una construcción de conceptos, un lenguaje o un proceso cognitivo.

En este enfoque se consideran dos tipos de objetos:

- La praxeología matemática u organización matemática, referida a la realidad matemática que puede ser construida en una clase donde se estudia un tema, y
- La organización didáctica, que se refiere a la manera en que puede ser construida la organización matemática.

Así pues, el trabajo de estudio de este enfoque está dirigido básicamente a dos actividades: describir y analizar la organización matemática y describir y analizar la organización didáctica (Chevallard, 1999).

Este enfoque supone que para poder estudiar una actividad matemática en aula, se debe estudiar primero la actividad matemática en sí, pues existe una actividad matemática prototipo. Pretende así, obtener un modelo epistemológico de la actividad matemática, que explique que se entiende por hacer matemática y por producir conocimiento matemática.

Para tal fin, se considera la organización matemática una entidad compuesta por:

- Tipos de problemas o tareas problemáticas.

- Tipos de técnicas que permiten resolver los problemas.
- Las tecnologías o discursos (logos) que permiten explicar las técnicas.
- La teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos.

Para este enfoque hacer matemática consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver una serie de problemas que pongan en juego las técnicas, tecnologías y teorías asociadas. Así pues, enseñar y aprender Matemática consiste en reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo otras condiciones.

Enfoque semiótico

Este enfoque es producto del análisis, por parte de Godino y Batanero (1994), de las situaciones problemas donde formulan una ontología o una significación de los objetos matemáticos, tomando en cuenta la Matemática como: actividad de resolución de problemas, actividad socialmente compartida y lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

Este surge de la necesidad de estudiar con más amplitud las relaciones dialécticas que se dan entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistema de signos) y las situaciones problemas para cuya solución se inventan estos recur-

sos. Se desarrolla una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos, puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos (Godino, 2002).

Se definen los objetos matemáticos como todo aquello que pueda ser indicado, todo lo que pueda señalarse o a lo que se pueda hacer referencia cuando se hace, se comunica o se aprende Matemática. Se proponen las siguientes entidades matemáticas para ser analizadas en cualquier práctica social o individual (Godino, 2002):

- *Lenguaje*: está representado por los términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.
- *Situaciones*: (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...); son las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas*: corresponden a las operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y procedimientos.
- *Conceptos*: dados mediante definiciones o descripciones, tales

como número, punto, recta, media, función.

- *Propiedades o atributos de los objetos mencionados*, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).
- *Estos objetos pueden ser estudiados bajo cinco dimensiones que presentan una dualidad en cuanto a la naturaleza del objeto; son las siguientes*:
 - *Dualidad personal-institucional*: los objetos son personales cuando son individuales e institucionales cuando repercuten sobre un grupo institucional.
 - *Dualidad elemental-sistémico*: un objeto puede ser estudiado como elemento constituyente de otro o integrado con otros objetos para formar uno más complejo.
 - *Dualidad ostensivo-no ostensivo*: se refiere a su faceta de perceptibilidad.
 - *Dualidad ejemplar-tipo*: los objetos pueden ser particulares o generalizables.
 - *Dualidad expresión-contenido*: los objetos tienen un significante (etiqueta o fónico) y un significado.

Bajo este enfoque los autores definen conceptos teóricos tales como prácticas, objetos y significados; estos tres conceptos vistos

bajo la concepción personal e institucional.

Las prácticas la definen como toda actividad realizada para resolver problemas donde se comunica, valida y generaliza la solución. El objeto institucional es producto del sistema de prácticas sociales institucionales asociadas a un campo de problemas, y el objeto personal está asociado a las prácticas personales.

El significado (funciones semióticas) es visto en tres niveles, el significado personal, el institucional y el a priori de un objeto matemático. El primero se refiere a las prácticas personales que realiza un individuo para resolver el problema, el segundo a las prácticas sociales de donde a emergido el contenido institucional y el último se refiere a las prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas por la institución como adecuadas para resolverlos.

Esta teoría que integra las funciones semióticas (semiótica) y los objetos personales e institucionales (ontología) tiene como hipótesis que las primeras son un instrumento relacional que facilita el estudio de los objetos matemáticos, perceptibles o no, activados en las prácticas matemáticas. Estas relaciones entre los objetos pueden ser de tipo representacional (uno en lugar de otro), instrumental u operativa (uno usa a otros como instrumentos) y cooperativa o componencial

(dos o mas constituyen otro objeto mas complejo).

Enfoque crítico

Este enfoque entiende el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática como un fenómeno político social y su objeto de estudio es la relación entre democracia y Matemática. Plantea, que la Matemática y la Educación Matemática puede facilitar o dificultar la construcción de una sociedad democrática.

Entre los objetivos de este enfoque se encuentran:

- Preparar a los estudiantes para ser ciudadanos
- Usar la Matemática como una herramienta crítica para analizar los hechos relevantes
- Tener en cuenta los intereses de los estudiantes
- Considerar los conflictos culturales en que se desarrolla la instrucción
- Dar importancia a la comunicación en el aula, pues esta es la base de la democracia
- Atender las relaciones entre tecnología y Matemática

El objeto de estudio de este enfoque es la Red Institucional de prácticas de la Educación Matemática, entendida esta como el espacio de acción definido por las relaciones entre estudiantes, profesores, grupo de profesores y entes administrativos.

Valero (2000, citado por Font, 2000) resalta que al estudiar la red institucional se deben considerar aspectos tales como:

- La política de la institución escolar
- La relevancia de las Matemáticas escolares, pues esta debe ser una negociación entre todos los actores del proceso
- La complejidad organizacional de la escuela
- La comunidad profesional de las matemáticas escolares
- Significado de las Matemáticas en el aula

Otros enfoques

Font (2000) nos plantea otras líneas de investigación que a nuestro parecer son intentos de unificar varios de los enfoques mencionados anteriormente; tenemos:

La *línea de pensamiento numérico*, desarrollada en España por Castro (1994), Romero (1997), Romero y Rico (1999) y González (1998), en la cual se trabajan tres dimensiones, una que se ocupa de las estructuras numéricas específicas, otra estudia las funciones cognitivas que desarrollan los individuos y otra donde se analizan las situaciones que se abordan mediante la estructura numérica considerada; ésta última dimensión se refiere a la fenomenología de la estructura estudiada. A nuestro parecer esta línea con-

juga los enfoques cognitivos (segunda dimensión) y antropológico (primera dimensión) y agrega una nueva línea, el análisis fenomenológico, que se describirá posteriormente.

La *línea del interaccionismo simbólico* desarrollada por Bauersfeld (1994), Voigt (1996) y Godino y Llinares (2000); esta línea focaliza el estudio de la de la construcción subjetiva del conocimiento a través de la interacción, asumiendo que los procesos culturales y sociales son parte de la actividad matemática. Sus hipótesis son que el profesor y estudiante constituyen interactivamente la cultura del aula, las convenciones y reglas culturales y de la propia disciplina, en nuestro caso la Matemática, surgen de la interacción y el proceso de comunicación se apoya en la negociación y significados compartidos. Consideramos que esta línea se encuentra enmarcada en dos enfoques, el constructivista radical y el social, pues se preocupa por la construcción subjetiva, pero además considera que se construye el conocimiento en la medida que se sociabiliza.

La *línea socio-constructivista* desarrollada por Cobb y Yackel (1998), a la que le interesa cómo los aspectos sociales se relacionan con los aprendizajes de los alumnos en clase. Esta línea es un derivado del constructivismo social.

A continuación se muestra un cuadro comparativo¹ de los siete enfoques descritos:

2. Líneas de investigación compartidas por las didácticas y la psicología

Coll (1993) nos plantea diversos problemas, movimientos o tendencias en el área de enseñanza-aprendizaje, que han sido abordados desde la Psicología y las Didácticas desde hace tres décadas conjuntamente, y que muestran tendencia a la convergencia entre las dos áreas. El autor nos menciona las siguientes líneas de investigación abordada por las dos disciplinas:

- *Hacia una integración en los procesos escolares de enseñanza aprendizaje, de las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje:* la influencia de la Psicología cognitiva ha llevado al cambio del paradigma proceso-producto al mediacional, por lo que interesan los procesos cognitivos utilizados en la construcción del conocimiento. Esta línea corresponde al enfoque cognitivo mencionado por Font (2000).

- *Hacia una integración plena en el estudio de los procesos escolares de enseñanza aprendizaje, de las cuestiones relativas a los contenidos:* para las dos disciplinas en el estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje, cada día se toman más en cuenta la naturaleza del contenido que se va a enseñar. Esta línea concuerda con el enfoque antropológico pues su objetivo es describir y analizar la organización matemática y describir y analizar la organización didáctica, propósitos que giran en torno al contenido matemático.
- *Hacia una autonomía y una independencia crecientes respecto a las disciplinas de referencia:* las dos disciplinas tienden a independizarse de las disciplinas de referencias; en el caso de la Psicología se desliga de la Psicología General, diferencial, del aprendizaje y del desarrollo; y en el caso de las didácticas específicas se independizan de la didáctica general, la Psicología y la disciplinas científicas. Pensamos que esta área corresponde al enfoque sistémico pues este a creado todo un cuerpo teórico que caracteriza a la Didáctica de la

1 Un enfoque es global cuando considera como variables de estudio dentro de su teoría la ontología y la epistemología, se dirá semi-local si considera la naturaleza de la Matemática y se dirá local si trabaja la enseñanza, el aprendizaje, tiene un objeto de investigación y una metodología para su estudio (Font, 2003).

Cuadro comparativo entre los enfoques en didáctica de La Matemática.

	Cognitivo	Constructivismo o Radical	Constructivismo Social	Sistémico	Antropológico	Semiótica	Crítico
Paradigma	Local	Global	Global	Frontiera local semi-local	Semi-local	Semi-local	Semi-local
Ontología General	No problematizan la existencia de un mundo objetivo predeterminado	El mundo es del dominio subjetivo de la experiencia	El mundo es compartido y socialmente construido	No problematizan la existencia de un mundo objetivo predeterminado, pero introducen la noción de sistema	Problematizan la existencia de un mundo objetivo predeterminado	Problematizan la existencia de un mundo objetivo predeterminado	Problematizan la existencia de un mundo objetivo predeterminado
Epistemología General	Representacionismo	Falibilista, ecológica y antiojetivista	Falibilista aceptado socialmente	Representacionismo	Cuestiona el Representacionismo	Cuestiona el Representacionismo	Cuestiona el Representacionismo
Teoría de la Verdad	Correspondencia	Ensayo	Correspondencia	Correspondencia	Cuestiona la Correspondencia	Correspondencia	Correspondencia
Teoría del significado	Referencial	Pragmatista	Referencial	Referencial	Pragmático	Pragmatista	Pragmatista
Naturaleza de la Matemática	Es el resultado de la experiencia humana y no de las convenciones sociales	Falibilismo	Construcción social falibilista	Actividad dirigida a resolver problemas	Actividad humana desarrollada en ambientes institucionales	Actividad de resolución de problemas compartida	Herramienta para la emancipación democrática
Aprendizaje	Constructivista individual	Constructivista individual	Constructivista	Constructivista	Constructivista, fruto de la reconstrucción	Conservar significados	Constructivista con perspectiva sociopolítica
Enseñanza	Se interesa por lo que condiciona el aprendizaje significativo	Construcción por parte de los alumnos	Construcción social en el aula, tomando en cuenta contextos, valores, discusiones, entre otros	Centrada en la transposición didáctica	Dirige la reconstrucción	Apropiar el significado personal al significado a priori	Construcción conjunta docentes, alumnos y entorno

Cuadro comparativo entre los enfoques en didáctica de La Matemática (Continuación).

	Cognitivo	Constructivismo Radical	Constructivismo Social	Sistémico	Antropológico	Semiótico	Crítico
Objeto de investigación en el área de didáctica de la Matemática	Representaciones mentales	Construcciones	Construcción social en el aula	Fenómenos ligados a la comunicación y producción de conocimiento	Actividad humana, su producción y reproducción	Actividad matemática en forma descriptiva	La red institucional de prácticas de educación matemática
Metodología de la Invest.	Interpretativo	Interpretativo y cualitativo	Interpretativo e investigación acción	Positivista, en especial la Ingeniería	Positivista	Interpretativo	Investigación-acción

Fuente: Ríos (2006).

Matemática como independiente de todas las disciplinas. Se han creado conceptos tales como sistemas didácticos, transposición didáctica, contrato didáctico, memoria didáctica, fenómenos didácticos, obstáculos, errores, entre otros, que han permitido construir un marco teórico que le ha dado autonomía e independencia respecto a las disciplinas científicas.

- *El rechazo explícito del aplicacionismo y los intentos por elaborar sistemas conceptuales y explicativos propios:* en vez de aplicar los resultados de otras disciplinas en el proceso de enseñanza aprendizaje, se trata de cuestionar si estos aportes de las disciplinas son pertinentes para los problemas planteados. Esta área es consecuencia de la anterior, por lo que el enfoque sistémico también caracteriza esta tendencia.
- *Hacia una acción disciplinar que integra aspectos propositivos y de intervención con aspiraciones teóricas:* en la didáctica específicas los aspectos propositivos y de intervención son su razón de ser, mientras que la construcción de un cuerpo teórico es más tardío; pero en el caso de la Didáctica de la Matemática los enfoques ontológico - semiótico, antropológico y sistémico

han creado y siguen construyendo su marco teórico conceptual. En el caso de la Psicología se han dado intervenciones psicoeducativas, aportes en los diseños curriculares y se ha construido un cuerpo teórico que explique los procesos de aprendizaje de los alumnos; lo mismo ocurre con el enfoque cognitivo en la Didáctica de las Matemáticas.

- *Hacia un modelo conceptual de los procesos escolares de enseñanza y aprendizaje que subraya las interrelaciones entre el alumno, el profesor y el contenido de aprendizaje:* en este sentido los enfoques sistémico y antropológico tienen el modelo conceptual soporte denominado sistema didáctico que explica las interrelaciones entre los tres elementos mencionados.
- *Tendencia a atribuir una importancia creciente al contexto situacional en el que tienen lugar los procesos escolares de enseñanza aprendizaje, así como a las dimensiones socio-históricas, socio-culturales y sociopolíticas:* en este sentido el constructivismo social considera aspectos socio-culturales, el enfoque crítico desarrolla la dimensión socio-política y el enfoque socio-epistemológico (que se describirá posteriormente) considera el aspecto socio-histórico-cultural.

3. Líneas de investigación de la Psicología en el área de Educación Matemática

Las líneas de investigación que se desarrollan actualmente en el área de Educación Matemática, referidos a los procesos cognitivos, tienen como objeto de estudio, la naturaleza del conocimiento de los alumnos y la distancia entre éste y el conocimiento científico. Según Armendáriz y col. (1993), los modelos que sirven de soporte para cada una de estas líneas son las siguientes:

• **Imagen mental y visualización:**

La imagen mental es el conjunto de todas las imágenes asociadas a un concepto (Vinner, 1983, citado por Armendáriz y col, 1993) y la visualización es el proceso de formación de imágenes, que pueden ser mentales o materiales (Zimmermann y Cunningham, 1991, citado por Armendáriz y col., 1993). Esta última puede darse en dos direcciones:

1. Interpretación y comprensión de modelos visuales.
 2. Habilidad para traducir a imagen visual una información recibida en forma simbólica.
- **Esquema y definición conceptual:** la definición del concepto es la secuencia de palabras que explica el concepto con precisión; existen las definiciones formales y las personales; y el

esquema conceptual es la expresión que describe la estructura cognitiva del individuo, asociada al concepto matemático, que incluye todas las imágenes mentales junto con las propiedades y procesos asociados a dicho concepto.

- **Conceptos y concepciones:** el concepto Artigue (1990, citado por Armendáriz y col, 1993) lo define en término de sus propiedades:

1. La clase de problemas en cuya resolución adquiere sentido.
2. Es el conjunto de significantes asociados al concepto.
3. Los instrumentos: teoremas, algoritmos utilizados para manipular el concepto.
4. Es una noción tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada.

Las componentes de las concepciones son:

1. La clase de situaciones problemas que dan sentido al concepto.
2. El conjunto de significantes que es capaz de asociarles, en particular, las imágenes mentales.
3. Los instrumentos: teoremas, algoritmos utilizados para manipular el concepto.
4. Expresiones simbólicas.

Se observa que las tres primeras características son comunes para los dos conceptos, difieren, según Artigue, en que el concepto se define tal y como históricamente surgió, especificando el contexto y la concep-

ción se define en función de las representaciones simbólicas asociadas al mismo.

Para Sfard (1991, citado por Armendáriz y col., 1993) el concepto matemático designa las ideas matemáticas en su forma oficial y la concepción es el conjunto de representaciones y asociaciones internas del individuo y que evoca el concepto. Dentro de la última concibe las concepciones estructurales abstractas y las operacionales que involucra las acciones, algoritmos y procesos. Esta investigadora nos habla de tres etapas en la formación de conceptos:

1. Interiorización: involucra operaciones con los objetos en su forma más elemental. Se dan procesos que permiten el acceso al nuevo concepto.
2. Condensación: se dan las secuencias de operaciones. Se piensa en el objeto como en un todo, no en sus partes. Se hace factible la combinación de procesos, hacer comparaciones y generalizaciones. Es posible hacer varias representaciones del concepto.
3. Cosificación o reificación: se concibe la noción como objeto matemático.

Las dos primeras son graduales y la tercera es instantánea

- *Los campos conceptuales*: los campos conceptuales son los conjuntos de situaciones cuyo análisis requiere diversos tipos de

conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas conectados entre sí, que difícilmente se pueden disociar. Vergnaud (1990, citado por Armendáriz y col., 1993) establece los siguientes puntos para investigar:

1. Analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo.
2. Analizar el comportamiento y razonamientos de los estudiantes que ocupa el lenguaje u otras actividades simbólicas.
3. Establecer la forma en que los alumnos se vuelven concientes de los procedimientos.

Un concepto hace referencia a un conjunto de situaciones (S), que le dan sentido al concepto; éstas son analizadas y modificadas por elementos tales como reglas, conceptos y teoremas en acto. A estos elementos se le denominan invariantes operatorios (I) y constituyen los conocimientos de los esquemas. Así pues, los esquemas están constituidos por esas reglas, conceptos, teoremas en acto, hábitos, ideas y conocimientos que pueden ser usados en todo momento.

Por otro lado la utilización de esquemas lleva implícita la utilización de representaciones simbólicas o lenguaje (L). Chamorro (1995) define el campo conceptual como una tripleta de la forma (S, I, L).

- *Inteligencia Artificial*: este modelo funciona cuando, el comportamiento esperado consiste en una secuencia de opciones entre un rango limitado de posibilidades identificadas y no ambiguas, y no funciona cuando las opciones dependen de la conceptualización de nuevos objetos o relaciones. Este modelo no ofrece una teoría del papel que juega el lenguaje y los símbolos en el procesamiento de la información; se reduce a la manipulación de símbolos. Además, no aporta una idea clara sobre el desarrollo de competencias y concepciones de los alumnos.

Armendáriz y col. (1993) menciona otras tres líneas de investigación. Para las dos primeras, que se menciona a continuación, su objeto de estudio son las habilidades matemáticas propias del comportamiento matemático tales como el conjeturar, definir, probar y demostrar; y para la última se ocupa de la incidencia de la dimensión social sobre los procesos cognitivos. Tenemos entonces:

- *Pruebas y demostraciones*: a este respecto se han encontrado problemas tales como: falta de la necesidad de demostrar, incompreensión en la naturaleza de la demostración y dificultad en la escritura
- *Resolución de problemas y Metacognición*: Schoenfeld (1987, ci-

tado por Armendáriz y col., 1993) ha desarrollado métodos para observar a los alumnos mientras resuelven problemas y cómo desarrollan procesos metacognitivos. Ha trabajado sobre las concepciones previas y errores tales como: modelos inadecuados, creencias inadecuadas y generalizaciones incorrectas.

- *Perspectiva social*: debe tomarse en cuenta en la clase de Matemática el contexto de las interacciones sociales y la especificidad de la situación en la que se desarrolla.

3.1. Líneas de investigación desde la metacognición

La metacognición se refiere a la indagación sobre como los seres humanos piensan y controlan sus proceso de pensamiento. En esta área se han realizado investigaciones sobre los procesos de toma de conciencia, por parte del alumno, sobre su forma de aprender. Según González (sf), autores como Flavell (1971), Campione, Brown, y Connell (1989), Antonijevick y Chadwick (1981/1982), Costa (sf), Chadwick (1985), Flavell (1976), García y La Casa (1990), Haller, Child y Walberg (1988), Nickerson (1988), Otero (1990), Rios (1990), Swanson (1990), Weinstein y Mayer (1986), Yussen (1985), han trabajado en esta área.

Soto (2000) establece, en general, diversas áreas de investigación respecto a la metacognición, de acuerdo a cinco criterios de clasificación, a saber:

Primer criterio:

- Conocimiento por parte de la persona acerca de sus propios procesos cognitivos.
- Procesos involucrados en la regulación de los procesos cognitivos: planificación, control y evaluación.

Segundo criterio:

- Monitoreo metacognitivo, donde se estudia si las personas aciertan sus predicciones en cuanto a su memoria.
- Control metacognitivo, donde se estudia la voluntad de las personas de dirigir los procesos del pensamiento y la recuperación de la memoria.

Tercer criterio:

- Acerca el saber cómo, aspectos procedimentales del conocimiento.
- Acerca del saber qué, tomar conciencia de sus propios conocimientos y la manera de adquirirlos.

Cuarto criterio:

- Conocimiento meta cognitivo, se refiere al conocimiento que los sujetos tienen sobre la cognición. Referido al conocimientos de las personas, de las tareas y de las estrategias.

- Experiencia metacognitiva, saber qué tan cerca o lejos estoy de la meta.

Quinto criterio:

- Análisis de protocolos, donde se examina la capacidad de acceso conciente y reflexivo de sus propios conocimientos y estrategias de aprendizaje.
- Estudios sobre control ejecutivo, donde se describe la cognición a partir de los modelos del procesamiento de la información.
- Estudios sobre la autorregulación (intraindividual).
- Estudios de regulación interindividual.

En esta área se encuentran trabajos que revisan el papel de la metacognición en aspectos como aprendizaje autorregulado, resolución de problemas, el cambio conceptual, los criterios de comprensión y explicación que utilizan los alumnos, sus concepciones sobre la ciencia, el conocimiento científico y el aprendizaje, la formulación de preguntas y la motivación (Campanario, 2000).

Campanario (2000) menciona que otros trabajos que se han realizado en esta área son los relacionados con el estudio de la potencialidad de algunos recursos para favorecer el aprendizaje significativo y el desarrollo de procesos metacognitivos en los estudiantes, recursos tales como los mapas conceptuales, el

diagrama V de Gowin, la resolución de problemas, los autocuestionarios, elaboración de diarios, formulación de preguntas por parte de los propios alumnos, entre otros.

Así mismo, existen trabajos que recogen y proponen estrategias generales dirigidas a fomentar la aplicación de las estrategias metacognitivas por parte de los alumnos, algunas son: programas explícitos de instrucción, dar a conocer los objetivos del proceso de enseñanza aprendizajes, insistir en el componente problemático del conocimiento, aplicación de los conocimientos a la realidad, recurrir a la historia como estrategia, el desarrollo de enfoque multi-disciplinarios magras y el uso de la evaluación como instrumento metacognitivo (Campanario, 2000).

Por otro lado, González (sf) nos cita una serie de trabajos que se han hecho en esta área, respecto a diferencias entre los novatos y los expertos respecto a las estrategias metacognitivas aplicadas en la resolución de problemas. En referencia a esto, se explicitan algunos resultados que establecen diferencias que distinguen a los novatos de los expertos solucionadores de problemas; en efecto, los expertos: (a) pueden reflexionar sobre sus propias actividades de resolución de problemas; (b) disponen de estrategias para abordar problemas nuevos; y (c) supervisan y regulan dichas estrategias efectiva y eficiente-

mente. En cambio los novatos: (a) están menos conscientes de las estrategias que poseen y de la utilidad de las mismas; (b) disponen de menos estrategias para solucionar problemas; y (c) no usan flexiblemente las estrategias que poseen (Campione y col... 1989, citados por González, sf).

4. Otras líneas de investigación

Otras líneas que han desarrollado otros investigadores derivadas de los enfoques anteriores son: el análisis fenomenológico, la socio-pistemología y la matemática realista, A continuación se describen.

4.1. Análisis fenomenológico

Freudenthal (citado por Puig, sf) es el investigador que desarrolla este método para analizar la actividad matemática escolar. Trabaja con dos conceptos fundamentales, el fenómeno y los medios de organización. El primero Puig (sf) lo define como el objeto de nuestra experiencia matemática y el medio de organización es aquello que nos permite dar cuenta de nuestra experiencia matemática.

Freudenthal (citado por Puig, sf) concibe el concepto matemático como un medio de organización de uno o varios fenómenos; pero posteriormente éste puede pasar a formar parte de la experiencia mate-

mática, por lo que se convierte en un fenómeno, que puede ser organizado por otro concepto matemático, que se encontraría en un nivel superior con respecto al primero. El par fenómenos – medios de organización es la unidad de análisis de la Fenomenología.

Así pues, Gómez y Rico (2002) establecen que el análisis fenomenológico se basa en identificar, describir, analizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que puedan ser organizados o modelizados por las subestructuras contenidas en la estructura matemática en cuestión. Además de esto, se deben describir las relaciones entre las subestructuras y los fenómenos.

Según Puig (sf), Freudenthal distingue cuatro tipos de análisis fenomenológicos:

- a) La fenomenología pura, que estudia los fenómenos asociados a los conceptos matemáticos, tal y como se conocen y se usan en la actualidad,
- b) La fenomenología didáctica, donde intervienen los fenómenos del mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza,
- c) La fenomenología genética, considera el desarrollo cognitivo de los aprendices, y
- d) La fenomenología histórica, presta atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto y cómo se extendió hacia otros fenómenos.

Nos parece interesante este enfoque pues aunque trabaja con las aplicaciones de los conceptos matemáticos, va más allá de esto en lo que a la acción didáctica se refiere. A nuestro parecer, la fenomenología didáctica trabaja con las diversas representaciones, interpretaciones o constructos que puede tener un concepto matemático, pues éstas están determinadas por el campo de aplicabilidad de cada concepto, es decir, en función del uso que se le dé a un concepto, este tendrá una interpretación determinada.

4.2. Socio-epistemología (Cantoral, 2003)

Las investigaciones que se han desarrollado bajo este enfoque han seguido una aproximación sistémica, pero a nuestro parecer abarca más allá de las características que se mencionaron anteriormente respecto a este enfoque, pues si bien considera tres de los componentes que lo caracterizan: el saber sabio, el docente y el alumno, considera un cuarto componente que toma en cuenta muy superficialmente el enfoque sistémico, como lo es, la dimensión socio-cultural de la Matemática. Cantoral define los primeros tres componentes como: la naturaleza epistemológica, la enseñanza y el plano cognitivo, respectivamente.

Este cuarto componente, *la dimensión socio-cultural de la Matemática*

ca o la construcción social del conocimiento matemático avanzado lo define como el conjunto de interacciones que se dan entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la Matemática avanzada y las prácticas humanas altamente especializadas. Estas interacciones pueden ser del tipo:

Memoria voluntaria y construcción social: se ubican acá procesos tales como la abstracción reflexiva, la generalización, el razonamiento bajo hipótesis y la memoria voluntaria.

Matematización y construcción social: la Matemática se ha construido socialmente, en ámbitos no escolares, por lo que su introducción al sistema educativo obliga a modificar su estructura y su funcionamiento, tomando en consideración las prácticas culturales que tienen lugar en la escuela.

Sociocultura y Matemática: los objetos matemáticos surgen como un sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la solución de una clase de situaciones muy particulares, de donde transita a través del tiempo hasta tomar la forma abstracta del concepto matemático. Aquí se trabaja con el componente histórico del origen del concepto matemático.

Cantoral y su equipo han desarrollado investigaciones que toman en cuenta estas interacciones, siendo este su aporte innovador al enfoque sistémico.

4.3. La Matemática realista

Este es un enfoque que tiene sus raíces desde hace cuatro décadas, a través de varias actividades y opiniones en contra de la matemática moderna producto del estructuralismo. Se conoce que Thom (1972) y Beberman (1962), citados por De Lange (1989), hicieron comentarios que establecían el fracaso del currículo de las Matemáticas de los Estados Unidos, por no relacionarlas con la vida real. A este respecto Bers, Birkhoff, Courant, Cometer, Kline, Morse, Pollak y Polya (1962, citados por De Lange (1989) emitieron un memorandum, donde una de las ideas que expresaban en cuanto a la razón de ser de las Matemáticas, era que debían servirle a los estudiantes para satisfacer sus necesidades, debería contribuir al bagaje cultural del estudiante y también ofrecer preparación profesional a los futuros usuarios de las Matemáticas. A raíz de esta declaración se sentaron las bases de lo que se conoce como matemáticas realistas, la cual se caracterizaba por darle un carácter utilitario y constructivo a la Matemática.

Otro que atacó las matemáticas formales fue Lakatos a través de su publicación de Pruebas y Refutaciones, donde se observa que la construcción del conocimiento matemático se puede hacer de una manera inductiva, a través del planteamiento de hipótesis, que

son probadas o desechadas en el intercambio de ideas, a través de razonamientos utilizando ejemplos y contraejemplos.

Otro que apoya a Lakatos es Feynman, citado por De Lange (1989), quien en su opinión el que hace Matemática se deshumaniza porque parte de un conjunto rígido de axiomas arbitrariamente dado y fríamente construye todas sus consecuencias y este no debe ser uno de los objetivos de la Educación.

Freudenthal (1973, citados por De Lange, 1989) concibe la Matemática como una actividad humana y por esta razón no deben ser presentadas como un producto ya hecho, sino que el estudiante debe reinventar la Matemática.

Treffers (1986, citado por De Lange, 1989) resume los principios de la Educación Matemática enfocada en forma realista, de la siguiente manera:

- Otorga mucha atención a la reinvención, recreando conceptos y estructuras matemáticas a partir de la intuición.
- La planificación se guía por principios históricos genéticos y no por el contenido.
- La enseñanza de la Matemática es rica en significados pues se apoya en la realidad.

Torres (2004) concibe las Matemáticas realistas no como una práctica al final del curso donde se exhiban las aplicaciones de los contenidos específicos; significa partir de la realidad vivida por el estudiante para que estudie y relacione las características del fenómeno, y las modelice a través de los conceptos matemáticos.

Según Mora (2002) varios investigadores han intentado establecer principios para el establecimiento de las matemáticas realistas, entre ellos Kaiser (1995), Blum y Niss (1991). El mismo autor plantea que son muchos los autores que han tratado de describir esquemáticamente modelos para superar la separación entre realidad y Matemáticas, entre ellos, Servais (1966), Noble (1967), Thom (1974) Ficher y Malle (1985), Keitel (1986) y Blum (1985)², entre otros.

Según Mora (2002) se han realizado varias investigaciones con este enfoque donde niños sin escolaridad lograban resolver problemas de proporcionalidad directa con mayor eficiencia que niños escolarizados y aplicaban estrategias altamente eficientes en la resolución de problemas relacionados con conceptos tales como: cantidades, precios, estimaciones, longitu-

2 El modelo más conocido. Para alguna referencia puede consultarse Mora (2002) pp: 105-109.

des, medida, superficie, fracciones y numeración, entre otros. Esto lo corroboran investigaciones de Nunes (1993), Borba (1990), Saxe (1990), Lave (1984), Mora (1993-1995), Hengrtner (1992), Selter (1994) y Spiegel (1993), entre otros, citados por Mora (2002).

Conclusiones

La investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas se orienta al proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en todos los niveles y modalidades. Esta no puede ser entendida aislada de otras disciplinas que además de aportar elementos teóricos, ofrecen una variedad de métodos y técnicas que en su conjunto conforman herramientas para el análisis de la información que se obtiene en el estudio de las situaciones didácticas.

Pero la Didáctica de las Matemáticas es más que la suma de estos aportes dados por otras disciplinas, pues los conocimientos referidos a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática no pueden ser obtenidos solamente con la conjunción de ellos, sino que se necesita de la investigación específica de la Didáctica de las Matemáticas, la cual a partir de las contribuciones de otras disciplinas construye concepciones teóricas propias de la Educación Matemática, producto de la experiencia didáctica.

Así pues, los diversos elementos que pueden ser considerados en

la acción didáctica pueden ser estudiados por diversas disciplinas del conocimiento como la Lingüística, Antropología, Psicología, Historia, Pedagogía, entre otras. Esto da origen a diversas líneas de investigación con diferentes objetos de estudio. Pero se observa que aunque los criterios de categorización que se utilizan para la clasificación de las líneas, las categorías establecidas tienen muchos puntos en común. Por lo tanto, en este trabajo se describieron los enfoques de Font y las clasificaciones de Coll, donde observamos que cada uno consideró los mismos objetos de estudio, pero cada quien a su estilo. En el siguiente cuadro clasificamos las áreas de investigación de acuerdo a su foco de atención (ver Cuadro de la página siguiente).

Por otro lado, debido a la importancia que tienen los aportes de la Psicología a la Didáctica de las Matemáticas, según Armendáriz y col se han creado cinco teorías que explican la naturaleza del conocimiento matemático de los alumnos, las cuales han llevado a la formación de cinco áreas de investigación, que le han dado fortaleza y han permitido la expansión de la Psicología Cognitiva.

Otra sub-área dentro de la Psicología, que ha realizado importantes aportes a la Didáctica de las Matemáticas ha sido la referida a la metacognición. Soto en términos generales nos menciona a este respecto,

Cuadro comparativo de las líneas de investigación

Objeto de estudio	Font (enfoques)	Coll (áreas)
Procesos cognitivos	Cognitivo	Integración en los procesos escolares de enseñanza aprendizaje, de las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje
Contenido	Antropológico	Integración plena en el estudio de los procesos escolares de enseñanza aprendizaje, de las cuestiones relativas a los contenidos:
Independencia de la Didáctica de las Matemáticas con respecto a otras disciplinas	Sistémico	Autonomía y una independencia crecientes respecto a las disciplinas de referencia: las dos disciplinas tienden a independizarse de las disciplinas de referencias
Construcción de sistemas conceptuales y explicativos	Sistémico	Rechazo explícito del aplicacionismo y los intentos por elaborar sistemas conceptuales y explicativos propios
Propuestas e intervenciones didácticas con propuestas teóricas	Sistémico Antropológico Ontológico semiótico	Acción disciplinar que integra aspectos propositivos y de intervención con aspiraciones teóricas
Estudio del triángulo: docente-alumno-contenido	Sistémico Antropológico	Modelo conceptual de los procesos escolares de enseñanza y aprendizaje que subraya las interrelaciones entre el alumno, el profesor y el contenido de aprendizaje
Aspectos históricos, socio-culturales y socio-políticos	Constructivismo social Crítico	Tendencia a atribuir una importancia creciente al contexto situacional en el que tienen lugar los procesos escolares de enseñanza aprendizaje, así como a las dimensiones socio-históricas, socio-culturales y sociopolíticas

Fuente: Ríos (2006).

áreas de estudio referidas a la toma de conciencia por parte de los alumnos, de los procesos de regulación y control del aprendizaje. Así mismo Campanario establece que existen trabajos de investigación referidos a la potencialidad de algunos recursos para el aprendizaje y formas de fomentar la aplicación de estrategias metacognitivas por parte del alumno. Por último, González menciona otra línea de investigación en esta área, referidos a las diferencias metacognitivas entre novatos y expertos en la resolución de problemas.

Para finalizar, se mostraron las líneas de investigación que a nuestro parecer abordan algunos elementos de los enfoques ya mencionados, pero que han logrado cierta autonomía, pues han construido su propio marco teórico que permiten explicar, desde un punto de vista particular, situaciones como: la naturaleza de la Matemática, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y la relación entre Matemática-Historia y cultura, entre otras.

En este sentido en análisis fenomenológico supone que las situaciones didácticas giran en torno a fenómenos naturales, sociales y matemáticos, que pueden ser organizados por la Matemática. La socio-epistemología concibe que en la organización de una clase de Matemática, además de considerar los tres elementos que menciona el enfo-

que sistémico, profesor-alumno-contenido, agrega la dimensión histórica-cultural. La matemática realista por otro lado plantea que el foco de atención de las matemáticas escolares debe ser la aplicación de los conceptos matemáticos.

Como última observación, diremos que se intentó describir algunas de las líneas de investigación que existen en el área de Didáctica de las Matemáticas bajo diversos enfoques y a pesar de que utilizar diferentes criterios de clasificación, tienen muchos puntos de convergencia. Esta no pretendió ser una descripción exhaustiva, pero se pudo observar lo amplias que son las áreas de investigación en la Didáctica de las Matemáticas, por lo que los didactas debemos avocarnos a indagar sobre ellas y aportar ideas que ayuden a mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Referencias Bibliográficas

- Armendáriz, María; Azcárate, Carmen y Deulofeu, Jordi (1993). "Didáctica de la Matemática y Psicología". *Revista Infancia y Aprendizaje*, Número 62-63; pp: 77-99.
- Campanario, Juan Miguel (2000). "El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estrategias para el profesor y actividades orientadas al alumno"; <http://www2.uah.es/jmc/an5.pdf>; fecha de consulta:

- 23 de marzo de 2006; *Revista Enseñanza de la Ciencias*, 18 (3); pp: 369-380.
- Cantoral, Ricardo (2003). *La aproximación socio-epistemológica en matemática educativa: una mirada emergente*; <http://cimate.uiaagro.mx/cantoral/>; fecha de consulta: 3 de febrero de 2006.
- Chamorro, María (1995). "Los procesos de aprendizaje de Matemática y sus consecuencias metodológicas en primaria"; *Revista UNO*; Número 4; pp: 87-96.
- Chevallard, Yves (1999). "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico"; *Recherches en Didactique des Mathématiques*; Volumen 19; Número 2; pp: 221-266. Traducido por Ricardo Barroso Campos y Teresa Fernández García.
- Coll, Cesar (1993). "Psicología y debate: una relación a debate"; *Revista Infancia y Aprendizaje*; Número 62-63; pp: 59-75.
- De Lange, Jan (1989). "La educación realista de las matemáticas"; *Revista Ciencias de la Educación*; Número 21; pp: 27-39.
- Font, Vincent (2000). "Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas"; *Revista EMMA*; Volumen 7; Número 2; 127-170.
- Font, Vincent (2003). "Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática"; *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*; Volumen X; Número 2; pp: 250-278.
- Godino, Juan (2002). "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática"; *Recherches en Didactique des Mathématiques*; Volumen 22; Número 2 y 3; pp: 237-284.
- Gómez-Granell, Carmen y Fraile Javier (1993). "Psicología y Didáctica de las Matemáticas"; *Revista Infancia y aprendizaje*; Número 62-63; pp: 101-113.
- Gómez, Pedro y Rico, Luis (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemática de secundaria*; <http://www.blues.uab.es/~ipdmc/dmp0304/analisisdidactico.pps>; fecha de consulta: 3 de febrero de 2006.
- González, Fredy (sf). *Acerca de la metacognición*; <http://www.revisataparadigma.org.ve/Doc/Paradigma96/doc5.htm>; fecha de consulta: 26 de marzo de 2006.
- Mora, David (2002). *Didáctica de las Matemáticas*; Ediciones de la Biblioteca EBUC - UCV; pp: 21- 26, 59-63, 101-105.
- Puig, Luis (sf). *Análisis fenomenológico*; <http://www.uv.es/puig/fd.pdf>; fecha de consulta: 1 de febrero de 2006.
- Soto, Carlos (2000). *Metacognición*; Editorial Taide; pp: 20-30.
- Torres, Carlos (2004). *La educación realista de las matemáticas*; Recopilado por Mora David; UCV; pp: 251-268.