Omnia Año 13, No. 2 (2007) pp. 120 - 157
ISSN: 1315-8856

Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones

Yaneth Ríos García*

Resumen

Son muchas las dificultades que se presentan a la hora de enseñar y aprender fracciones, por tal motivo desde el año 2001 se diseñó una Ingeniería Didáctica que mejoró este proceso. En este artículo se describe la primera parte de una investigación realizada que se planteó como objetivo, determinar la efectividad de la aplicación de una Ingeniería Didáctica sobre las fracciones, en alumnos del primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemáticas y Física; en éste se describen la situación problemática, las bases teóricas y la metodología aplicada.

Palabras clave: Fracciones, Ingeniería Didáctica, representaciones, situaciones didácticas, errores.

Didactic Engineering Applied to Fractions

Abstract

Many difficulties arise when teaching and learning fractions. For this reason, starting in 2001, didactical engineering was designed to improve this process. This article describes the first part of the research whose objective was to determine the effectiveness of applying didactic engineering to fractions with first semester students for 2004 in the undergraduate education program, specializing in mathematics and physics. This work describes the problematic situation, the theoretical bases and the methodology applied.

Key words: Fractions, didactic engineering, representations, didactic situations, mistakes.

* Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia.

Recibido: 13-05-06 • Aceptado: 13-11-07

Introducción

Uno de los conceptos en las matemáticas escolares, para el cual los alumnos presentan diversas dificultades en su comprensión, es el de las fracciones. Algunos autores coinciden que las dificultades de su aprendizaje se deben a las diversas representaciones conceptuales (acepciones, interpretaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto, entre las cuales tenemos las de: parte - todo (sub-área), razón (subconjunto), reparto (cociente y división indicada), operador, número racional y decimal, entre otros.

Debido a la diversidad de representaciones que tiene este concepto sería lógico preguntar, ¿Es necesario, que el alumno las domine todas, sobre todo el alumno que está siendo formado para ser educador en el área de Matemática?. La respuesta es afirmativa, debido a que todas las situaciones problemas que involucra el concepto de fracción no son resolubles con una sola representación, habrá situaciones que podrán ser resueltas por algunas representaciones y por otras no.

Además, el conocer y aplicar varias representaciones permitirá al alumno desarrollar procesos mentales tales como la comparación, análisis, síntesis y planteamiento de inferencias, procesos que son indispensables en el razonamiento matemático. Por otro lado, el futuro docente debe ser conocedor, en la medida de lo posible, del “saber sabio”, pues el dominar más contenido del que se va a enseñar le permite tener una visión más amplia y profunda de cómo enseñar y le permite hacer conexiones y transferencias entre los diversos saberes matemáticos.

Para entender algún concepto matemático o cualquier otro, primeramente el alumno debe hacer representaciones del mismo. No obstante, las que se construyen en el sistema escolarizado, en muchas oportunidades, son producto de las experiencias previas del alumno y/o son el resultado de la combinación de estas con las experiencias vividas en aula.

Ésta investigación se realizó considerando dos supuestos; el primero sostiene que “los seres humanos no aprenden del mundo directamente”; y el segundo, explicita que “la mente es un sistema procesador de información, que utiliza funciones cognitivas de información tales como la percepción, memoria, lenguaje y pensamiento”; es decir, es un sistema simbólico que utiliza los procesos cognitivos para representar la información y, utilizarla de manera adecuada para satisfacer sus necesidades. Bajo estos supuestos y para darle respuestas científicas a las preguntas planteadas en el segundo párrafo se diseñó una Ingeniería Didáctica, la cual viene germinando desde el año 2001.

En el presente trabajo se expone en la primera parte las reflexiones que llevan a plantearnos la posibilidad de diseñar una Ingeniería Didáctica, estas apreciaciones giran en torno a cómo debe ser enseñada la Matemática, y específicamente lo que se refiere a las fracciones; en la segunda parte, se establecen las partes teóricas que sirvieron de soporte a la investigación en la dimensión cognitiva, didáctica y metodológica; y en la última parte, se describe el método utilizado para la recolección y análisis de la información, el cual incluye la operacionalización de variables, la descripción de la muestra, las técnicas e instrumentos utilizados en la recolección de la información, descripción del tratamiento de la muestra, procedimiento utilizado para la codificación de la información, la validación de los instrumentos y las estrategias utilizadas para el análisis de la información.

1. Proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática

Es sabido que vivimos rodeados de cambios e incertidumbres constantes; la Educación ante esta situación tiene como misión, ofrecer al ser humano herramientas que le permitan enfrentar estos cambios e incertidumbres de manera eficaz y eficiente.

Las preguntas inmediatas que surgen de lo antes descrito son: ¿Cómo el docente va a lograr esto?, ¿Qué estrategias debe implementar?, ¿Qué contenidos le permiten crear la plataforma para dar respuesta a esa misión?, ¿En qué secuencia deben ser presentados esos contenidos?, ¿Qué recursos son necesarios para lograr esos objetivos?, ¿Cómo se debe actualizar el docente ante los nuevos conocimientos y acoplarlos a los que ya posee?, ¿Cómo debe capacitarse el docente en el uso de las nuevas tecnologías?; ya que el elemento educación se encuentra presente en estos cambios que experimenta la sociedad.

Por otro lado nos preguntamos ¿Qué papel juega la Matemática en todo lo antes descrito?

1.1. ¿Cómo debería enseñarse la matemática?

Son muchos los autores que han escrito respecto a esto y la gran mayoría coinciden en que uno de los objetivos de la enseñanza de la Matemática es desarrollar las habilidades y destrezas en el individuo que le permita resolver los problemas que se les presenta al vivir y convivir en sociedad. A éste respecto, concuerdan en que la Matemática ayuda a estructurar el pensamiento, agiliza el razonamiento inductivo y deductivo, ayuda a desarrollar habilidades presentes en todas las actividades laborales tales como: análisis, síntesis, evaluación y analogía entre otras.

Parece unánime, como lo manifiesta Santaló (2001), que todos debemos aprender Matemática en los niveles superiores para crear herramientas tecnológicas y; en los niveles inferiores para que el hombre común pueda entender superficialmente el mundo que lo rodea y pueda actuar sobre este. Pero nos preguntamos ¿Qué Matemática se debe enseñar para estas dos situaciones? y ¿Cómo se debe enseñar Matemática para estos dos escenarios?

Nuestros adolescentes no entienden en muchas oportunidades porqué deben aprender contenidos matemáticos tales como: funciones, polinomios, logaritmos entre otros, si ellos desean estudiar carreras tales como Medicina, Historia, Letras y Geografía, que aparentemente no tienen relación con la Matemática. Parece evidente que ellos tienen la creencia de que en su formación la Matemática no ayuda para su mejor desempeño profesional. Por tal motivo, cuando se diseñan y se implementen los programas de estudios en estas carreras los docentes deben darle más énfasis al valor formativo de la Matemática que a su valor cognitivo. Ello se debe a que en éste tipo de carrera el contenido matemático requerido es poco; no obstante las habilidades y destrezas que desarrollan los individuos con el estudio de la Matemática son aplicables en todas las actividades.

A este respecto Santaló (2001) apoya esta tesis mencionando que cada aspecto informativo tiene su substrato formativo por lo que “formamos informando” o “informamos formando”.

Por otro lado, se hace énfasis en el valor cognitivo, como manifiesta Charnay (2001), cuando lo que se ha enseñado esté cargado de significado para el alumno. Este significado puede darse a dos niveles: a un nivel externo se pretende entender cuál es el campo de utilización del saber y a nivel interno por qué y cómo funciona ese saber. Se dice así, que un concepto matemático tiene significado para el alumno cuando este además de repetirlo es capaz de resignificarlo, adaptándolo y transfiriéndolo a situaciones que le permitan resolver problemas.

Por otro lado, Segura (2000) mencionan que la enseñanza de la Matemática debe estar centrada en la formación de un verdadero pensamiento matemático; donde se deben tomar en cuenta cuatro elementos: el razonamiento lógico, la creatividad, la construcción de modelos matemáticos y la operatoria.

2. La enseñanza del concepto de fracción en el sistema educativo venezolano

Uno de los conceptos matemáticos que ocupa un amplio espacio en los programas de la Escuela Básica es el de las fracciones; el tema se encuentra ubicado directamente en los bloques de contenidos referidos a Números y Operaciones de la Primera y Segunda etapa. En Séptimo y Octavo grado, tienen una gran cantidad de objetivos destinados a este tema e indirectamente se encuentra inmerso en todos los contenidos pues cuando se trabaja con números, las fracciones aparecen constantemente.

Por otro lado, durante mucho tiempo y hasta los actuales momentos, en su enseñanza, han predominado los esquemas tradicionales donde el docente expone una serie de contenidos y por último se resuelven "problemas" relacionados a estos contenidos.

Se ha observado producto de visitas a escuelas, revisiones de textos escolares, observaciones a maestros y profesores, revisiones de programas de Matemática de Educación Básica y proyectos de investigación, que las secuencias instruccionales y las características de esta, que han privado en nuestras aulas de primaria y secundaria, con respecto al concepto de fracción, son las siguientes:

1. Presentación de la definición bajo la interpretación parte todo con representaciones gráficas con figuras geométricas, tales como el círculo y el rectángulo. Así pues, el tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no se considera el caso discreto, sino que este es planteado como un caso particular de la multiplicación de fracciones por un natural (que generalmente es divisible entre el denominador). El número mixto en la mayoría de los casos no es tratado. La fracción impropia al ser trabajada bajo la concepción parte-todo, no se le encuentra significado al hecho de que se van a tomar mas partes de las que se ha dividido la unidad,

haciéndose necesario, en este caso, trabajar otra representación del concepto de fracción.

2. Se prosigue con la clasificación de fracciones, donde se observa que la misma no explicita un criterio para ser realizada. En muchos casos se habla de las fracciones propias, impropias, unitaria, nula, entera y decimal; esta clasificación no tiene un criterio bien definido.

3. Luego se definen las fracciones equivalentes, como aquellas que su representación gráfica es la misma o su cociente es el mismo. Es en este momento donde se presenta la representación de la fracción como número decimal, pero donde se olvida toda interpretación asociada a las características de nuestro sistema de numeración decimal, al contrario la fracción es asociada al algoritmo de la división. También en muchas oportunidades se asocia la definición de fracciones equivalentes con la relación de equivalencia, definida sobre el producto cartesiano ZxZ^*; indudablemente que para los niveles iniciales esta definición carece de significado intuitivo, pues es parte de la construcción formal del número racional.

4. Posteriormente se trabajan los procesos de simplificación y amplificación de forma algorítmica, es decir, no se les da una interpretación gráfica en los niveles iniciales, ni algebraica en niveles avanzados.

5. Luego se define las operaciones entre números racionales de manera formal, sin darle interpretaciones gráficas a los mismos. En el mejor de los casos para la adición y la sustracción se utilizan las fracciones equivalentes pero sin justificar el hecho de por qué se usan.

6. En el caso de la tercera etapa de Educación Básica se estudian las propiedades de la adición y multiplicación de números racionales, pero estas no son aplicadas en la solución de problemas y ejercicios de tipo operatorio.

7. Para ordenar fracciones generalmente estas son transformadas en sus expresiones decimales equivalentes y sobre estos últimos se hace la ordenación. En muy pocos casos se trabaja su representación gráfica en la recta real.

8. La proporcionalidad directa es un tema que sólo se trabaja en sexto grado de manera aislada, no es relacionado con las fracciones equivalentes, ni con la regla de tres simple directa.

9. La resolución de problemas es una etapa que muy pocas veces se cubre en la acción didáctica; en la mayoría de los casos no es una estrategia que prevalece durante todo el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones, sino que se deja al final, completamente contrario a los aportes teóricos, donde se debe partir de la resolución de problemas.

10. Por último, generalmente no se establecen diferencias entre las fracciones y los números racionales; tanto en los textos como en las experiencias de aula se observa, como lo establece la secuencia expuesta anteriormente los puntos 4 y 5, que la presentación de los temas muestran saltos informacionales, en el sentido que no se expresan relaciones o conexiones entre las fracciones y los números racionales.

En otro orden de ideas, la estructura lógica de la disciplina, históricament plantea que se debe pasar del conocimiento de los naturales a los enteros, de aquí a los racionales, de estos a los reales y de estos últimos a los complejos. Esta secuencia "lógica" contradice el surgimiento natural histórico de los conjuntos numéricos, el cual fue: los naturales, las fracciones (de numerador y denominador naturales), irracionales, enteros, números racionales y reales. Esta situación se repite con las fracciones, la evolución histórica de la misma no coincide con la secuencia en la enseñanza de las fracciones en nuestro país.

Según Ríos (2001) analizando algunos informes de ciertos historiadores matemáticos, hay un acuerdo en el hecho de que las fracciones aparecen en la resolución de problemas sobre repartos en Egipto (1650 A.C.), por lo que pareciera que las fracciones surgen en el contexto de la resolución de problemas y no conciben la fracción como número, sino que $^{a}/_{b}$ representaba la cantidad que le tocaba a una persona, entre un conjunto de b personas, al dividir a panes. Por otro lado para agilizar los cálculos tenían tablas que transformaban las fracciones como suma de otras. Para la división de fracciones usaban la noción de inverso multiplicativo. Es en el siglo XX cuando se establece la definición formal de los números racionales, como clases de equivalencias del conjunto ZxZ*.

Como se puede observar, al hacer la comparación entre la evolución histórica de las fracciones y la secuencia de enseñanza en nuestras aulas, podemos notar diferencias tales como el conocimiento matemático surge de la necesidad de darle respuesta a un problema real de repartos de tierra y en nuestras aulas la resolución de problemas es lo último que se trabaja. Hay que hacer una revisión de estos aspectos, pues quizás la enseñanza de la Matemática debe responder a su evolución histórica.

3. ¿Cómo enseñar el concepto de fracción?

Uno de los conceptos para el cual los alumnos presentan diversas dificultades de comprensión, es el de las fracciones. Muchos autores coinciden que las dificultades de su aprendizaje se deben a las diversas representaciones (acepciones, interpretaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto. Entre estas acepciones tenemos: la de parte todo (área), subconjunto (razón), reparto (división indicada), cociente, operador, número racional y decimal entre otros.

Considerando la diversidad de representaciones que tiene el concepto de fracción, sería interesante preguntar ¿Es necesario que el alumno las domine todas?, sobre todo el alumno que está siendo formado para ser educador en el área de matemática. Se acepta que la respuesta es afirmativa, debido a que todas las situaciones problemas que involucra el concepto de fracción no son resolubles con una sola representación. Habrá situaciones que podrán ser resueltas por algunas interpretacioenes y por otras no; además el conocer y aplicar varias representaciones permitirá al alumno desarrollar procesos mentales tales como la comparación, análisis, síntesis y planteamiento de inferencias, procesos que son propios del razonamiento matemático. Por otro lado, el futuro docente debe ser conocedor, en la medida de lo posible, del saber sabio (1), pues el dominar más contenido del que se va a enseñar le permite tener una visión más amplia de cómo enseñar, así como hacer conexiones entre los diversos saberes matemáticos a enseñar.

Para entender algún concepto matemático o cualquier otro, primeramente el individuo debe hacer representaciones del mismo; pero las que se adquieren en el sistema escolarizado, en muchas oportunidades, son producto de las experiencias previas del alumno y/o son el resultado de la combinación de éstas con las experiencias vividas en aula, que no tienen una organización sistemática y mucho menos se establecen relaciones entre ellas.

Para el diseño de la Ingeniería Didáctica para enseñar el concepto de fracción que se propuso en esta investigación, se tomó en consideración, cómo, en teoría, los alumnos representan y relacionan las diversas interpretaciones del concepto; en ella, se proporcionaron actividades de enseñanza adecuadas a las habilidades de los alumnos y a las expectativas del docente, para mejorar las situaciones didácticas relacionadas al conocimiento matemático puesto en juego.

En el siguiente trabajo se muestran los resultados de la aplicación de una Ingeniería Didáctica que viene germinando desde el año 1999. En investigaciones que se desarrollaron sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos, específicamente sobre conjuntos numéricos, se mostró una situación alarmante en referencia a los conocimientos previos que traen los alumnos con respecto a los números racionales. Se evidenció que los procedimientos que utilizan, no tienen significado alguno para ellos, pues al preguntarles en una entrevista ¿por qué los aplican?, la gran mayoría responden que no saben o sencillamente que así se lo explicaron (Ríos y Escalona, 2002).

Para corregir y mejorar los resultados mostrados por los estudiantes, en este estudio se diseñó una ingeniería que tiene como propósito presentar un modelo de enseñanza de fracciones para los alumnos que ingresan en la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física. Por tal motivo, en el año 2002 se empiezan a concebir los esbozos de la misma donde se consideran elementos tales como: la lectura de fracciones, las diversas representaciones que tiene el concepto de fracción, diversas representaciones gráficas, fracciones equivalentes, significados que tienen las operaciones elementales entre fracciones, consideraciones de totalidades continuas y discretas, números decimales, entre otros.

Para el primer período 2002 se hizo una prueba piloto, que permitió recoger los primeros insumos para el rediseño del modelo, el cual experimentó modificaciones que se expondrán posteriormente.

Con los resultados de esas investigaciones se realizaron análisis descriptivos y explicativos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Estos hallazgos permitieron elaborar el diseño de situaciones didácticas, referidas al tema de las fracciones en el nivel superior de nuestro Sistema Educativo, que hagan que el aprendizaje de nuestros estudiantes sea más significativo.

Con estos insumos se modificó el modelo previamente elaborado en el año 2002 y éste nuevo diseño permitió crear la Ingeniería Didáctica que se implementa en esta investigación.

Por tal motivo, nos planteamos la siguiente situación:

¿La aplicación de una Ingeniería Didáctica favorecerá los resultados de aprendizaje referidos al tema de fracción, en los alumnos que ingresaron en el primer período del año 2004, en la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, de la Escuela de Educación, de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia?

4. Objetivos

Los objetivos responden al diseño de actividades que permiten verificar si los estudiantes del primer semestre del año 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, mejoraron los resultados de aprendizajes referidos al concepto de fracción. Se establecen como sigue:

4.1. Objetivo general

Determinar la efectividad de la aplicación de una Ingeniería Didáctica referida al tema de fracciones, en alumnos del primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física.

4.2. Objetivos específicos

Del objetivo general se derivan los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar las representaciones iniciales referidas al concepto de fracción que tienen los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemáticas y Física.

2. Determinar los resultados de aprendizajes obtenidos por los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemáticas y Física, después de aplicada la Ingeniería Didáctica.

3. Determinar la efectividad de la Ingeniería Didáctica, referida al concepto de fracción.

4. Comparar las representaciones de los alumnos antes y después de aplicar la Ingeniería Didáctica.

5. Bases teóricas

Las teorías que sustentan esta investigación se orientan según cuatro vías, ***la cognitiva*** que tiene su soporte en las diversas representaciones que puede tener el concepto de fracción y *la* ***di-***

dáctica la cual tiene sus bases en la Teoría de Situaciones Didácticas. Esta última aporta algunos elementos que son tomados en cuenta para el rediseño de la Ingeniería didáctica; ellos son: los obstáculos y los errores. Una tercera vía, ***la metodológica*** propia de la Teoría de Situaciones Didácticas, como lo es la Ingeniería Didáctica y por otro lado, producto de una revisión bibliográfica, la vía ***interpretativa*** que proviene de los resultados de algunas investigaciones referidas al proceso de aprendizaje de las fracciones, las cuales sirvieron de soporte para la construcción de la versión inicial de la Ingeniería Didáctica. Por último, se presenta la operacionalizaciön de las variables de investigación estudiadas.

A continuación se caracterizará muy brevemente cada una de las teorías que sirven de sustento a este trabajo.

5.1. Representaciones conceptuales de las fracciones

Son muchas las representaciones conceptuales (significados, constructos, interpretaciones o conceptos) que se pueden hacer respecto al concepto de fracción. Estas interpretacioens trabajan con el episteme de fracción, desde una concepción compleja a otras más complejas. Por ejemplo cuando se habla de una fracción, como 4/5, los diversos significados que se le pueden dar son las siguientes:

a) Un área dividida en cinco partes iguales, el 4/5 representa cuatro de esas cinco partes (representación parte-todo).

b) Si en una reunión los 4/5 de las personas son hombres, significa que por cada cinco personas, cuatro son hombres (representación razón).

c) Si se tienen cuatro pizzas y se quieren repartir entre cuatro personas, el 4/5 puede ser interpretado como la repartición, en partes iguales, de una cantidad de objetos (representación reparto o división indicada) o puede ser interpretado como la parte que le tocó a cada uno (representación cociente).

d) Si una pared mide cuatro metros y otra mide cinco, podemos decir que la medida de la primera son los 4/5 de la medida de la segunda (representación comparación de medidas).

e) Si se efectúa la división, usando las propiedades de nuestro sistema de numeración decimal, tenemos que 4/5 son 80 centésimas, lo que nos permite representarlo en la recta real como número decimal (representación número decimal).

f) O la podemos entender como el 80% de la totalidad (representación porcentaje).

Todas las representaciones anteriores dependen del contexto, es decir, de la interpretación que se le dé a la fracción dentro de la situación que lo envuelve. Como ejemplo se tiene la concepción que se maneja al repartir una pizza en partes iguales, entre cuatro amigos, es diferente a la de predecir la probabilidad de que llueva hoy conociendo el record de lluvia de los últimos cuatro días (suponiendo que llovió en uno de los cuatro días); así mismo usar cuatro huevos de un cartón de una docena es muy diferente a cortar la tercera parte de una torta.

Cuando el concepto de fracción se descontextualiza, aparece la representación de la fracción como número racional, formalización del conocimiento; éste como ente abstracto de la forma (a,b) es entendido como un subconjunto de $(Z \times Z^*)/R$, donde R es la relación de equivalencia definida sobre $Z \times Z^*$ de la siguiente manera: $(a,b)\ R\ (c,d) \leftrightarrow a.d = b.c$. Así se crea el conjunto cociente $(Z \times Z^*)/R$, denominado campo de cocientes de los números enteros, el cual es isomorfo al conjunto $\{a.\ b^{-1} \ / \ a \in Z \text{ y } b \in Z^* \text{ y m.c.d. } (a,b) = 1\}$, éste conjunto recibe el nombre de Números Racionales (Q); cuando se toma este conjunto, cada número racional representa una clase de equivalencia formada por pares ordenados equivalentes (Rìos, 2001). En el caso de las fracciones, este conjunto se define como $\{a.\ b^{-1} \ / \ a \in N \text{ y } b \in N\}$, considerando como primer elemento del conjunto de los Números Naturales el 1. Así se observa que las fracciones forman parte de cada una de las clases de equivalencias de Q, pero los dos conjuntos, las fracciones y Q, son disjuntos.

Es comprensible que esta diversidad de significados producen en nuestros estudiantes obstáculos para la comprensión de este concepto, lo cual lleva a que se produzcan dificultades para aprender y errores en el aprendizaje de conceptos relacionados con las fracciones.

La fracción, aparentemente, como lo afirma Maza (1999) es una pareja de números enteros, por tal razón históricamente se le había denominado número roto o quebrado, pero seguía siendo un número, no dos. En las entrevistas realizadas (Ríos y Escalona, 2002), esta forma de entender la fracción como dos números enteros sin ninguna relación, se manifestó cuando dos alumnos realizaron las siguientes operaciones: uno operó de la siguiente manera:

$\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$ y el otro realizó lo siguiente: $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{0}{1}$; al preguntarles cuál procedimiento habían aplicado, expresaron que habían sumado numerador con numerador y denominador con denominador.

5.2. Teoría de las situaciones didácticas

Un grupo de investigación conducido por Guy Brousseau ha trabajado desde 1970 para identificar los elementos de la Didáctica de la Matemática y teorizar sobre ellos. Esto lo ha realizado a través del análisis crítico de los métodos de enseñanza de la Matemática. Entre sus hallazgos se encuentra que a los niños de la escuela primaria se les enseñan directamente algoritmos, antes de que ellos hayan trabajado problemas donde se apliquen esos algoritmos.

La descripción y aplicación del fenómeno según Brousseau, tiene como fin:

a) Prevenir, describir y analizar las situaciones a – didácticas.

b) Facilitar su repetición.

c) Interpretar los comportamientos del individuo y del docente.

d) Mejorar las situaciones didácticas (Quevedo, 1998).

Esta teoría realiza un análisis de cuales son las interacciones que se presentan en el aula de clase entre los actores del proceso de enseñanza aprendizaje.

En el contexto de la enseñanza Brousseau (1983, citado por Mercier y Salin, 1988), distingue en la situación didáctica a los actores (profesor, alumno y medio), una situación inicial, un conjunto de estados posibles (constituyen las estructuras), las reglas que permiten pasar de un estado a otro (esto constituye la componente estructura) y las estrategias aplicadas y las decisiones tomadas por el profesor y alumno (constituyen el contorno fenoménico).

Brosseau (1983, citado por Mercier y Salin, 1988) sostiene que en una primera fase para que se dé el aprendizaje, el profesor debe seleccionar problemas donde el alumno debe actuar, reflexionar y evolucionar a su ritmo tratando de adaptarse a la situación y llegar a la solución él mismo; en este momento estamos en presencia de una situación denominada por él como **Situación A-didactica**, la cual puede ser de tres tipos en función de los actores que intervienen en las acciones y las interacciones que se dan entre ellos:

a) Acción: intervienen el alumno y el medio.

b) Formulación: intervienen los alumnos.

c) Validación: intervienen los alumnos y se tratan de convencer sobre la validez de la información.

En una segunda fase el docente intervendrá en la situación estableciendo la **institucionalización** del conocimiento donde se transformará el conocimiento aprendido en saber científico. Ésta es previamente establecida por los programas y planes del Estado.

Dentro de esta teoría se manejan conceptos tales como: fenómenos didácticos, obstáculos, errores, memoria didáctica, transposición didáctica, salto informacional, entre otros. Para efectos de esta investigación se escogieron trabajar dos conceptos de los mencionados anteriormente, los obstáculos y los errores. Estos se definen a continuación.

El obstáculo epistemológico*:* Bachelar fue el primero en plantear el obstáculo en las ciencias físicas (Rumelhard, 1997). Lo define como lo que ya se sabe y, como ya se sabe, esto genera una inercia que dificulta el proceso de construcción de un saber nuevo, que es, precisamente, lo que constituye el acto de conocer. Es una barrera que se produce al momento de intentar conocer y pueden aplicarse tanto en la epistemología como a la historia, al principio pudo haber sido eficiente pero luego se muestra inadecuado.

El error: En el proceso de aprendizaje el individuo debe ir abandonando y sustituyendo progresivamente ciertos tipos de conocimiento por otros mas evolucionados, venciendo los obstáculos naturales y artificiales que suelen presentarse ante modificaciones. Los conocimientos antiguos que funcionan no son desechados completamente sino que quedan integrados y valorados dentro de la nueva y más compleja visión que surge del aprendizaje. En esta dinámica se ponen en práctica conocimientos diferentes al saber sabio, estos conocimientos son conocidos como errores; éstos los realizan los individuos de forma persistente y son manifestaciones de la presencia de un fenómeno más amplio, que algunos autores denominan inadaptación del conocimiento, provocada por el obstáculo. El error dentro de esta interpretación es un hecho constatable que tiene su origen o es debido a la presencia de uno o varios obstáculos como fenómenos más generales y arraigados en el individuo (Kilpatrick, 1992, citado por González, 1995).

Para efectos de esta investigación, entre las tipologías de errores encontradas, por la naturaleza de la misma se selecciona la siguiente:

- Errores en el razonamiento: escogencia incorrecta de la estrategia o aplicación errada de la misma o deducción de conclusiones erradas.
- Errores en el cálculo: errada utilización de algoritmos.
- Errores semánticos: significado errado a conceptos matemáticos.
- Errores sintácticos: utilización errada de símbolos matemáticos.

5.3. La Ingeniería didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió como metodología de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas en Francia en 1980. La misma se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y para guiar la experimentación en clase (Farfán, 1997).

Las etapas de la Ingeniería Didáctica son las siguientes:

1. Análisis preliminar: se refiere a los conocimientos teóricos didácticos generales y específicos del campo de estudio y al análisis de: la epistemología de los contenidos por enseñar, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje, las condiciones bajo las cuales se presentará la situación didáctica efectiva y los objetivos de la investigación, entre otros. Los análisis se realizan bajo la dimensión didáctica, cognitiva y epistemológica:

a) La didáctica toca todo aquello que tiene que ver con la enseñanza y aprendizaje del contenido.

b) La cognitiva toma en cuenta el componente cognitivo de la población que va a ser sometida a la Ingeniería Didáctica, especificando las concepciones que tienen los estudiantes, las cuales son de dos tipo: las concepciones espontáneas o a priori desarrolladas antes de que el sujeto haya sido sometido al aprendizaje oficial y las concepciones desarrolladas en el contexto del proceso de aprendizaje.

c) La epistemológica: toma en cuenta la evolución historica de los conceptos matemáticos (pues estos se conciben susceptibles de evolución y que los mismos han surgido debido a ciertos problemas), la historicidad de las nociones meta-matemática y proto-matemática, diferencias entre el saber científico y el saber enseñado y los obstáculos epistemológicos (estos se definen como las dificultades que se presentan al enseñarse mal algún concepto): cuáles pueden evitarse, cuáles no deben evitarse y cómo superarlos.

2. Concepción y análisis a priori: esta fase constituye el diseño de la Ingeniería, la cual va a actuar sobre un determinado número de variables del sistema: variables macro-didácticas o globales y variables micro-didácticas o locales; las dos pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico, pero las segundas se refieren propiamente a la organización y la gestión de la secuencia de clase.

El análisis a priori es el momento donde el diseñador de la situación didáctica, antes de la clase, explicita supuestos referidos a: los procesos de enseñanza aprendizaje que se generarán en la situación y los resultados que desea producir: los probables y los seguros.

3. Experimentación, análisis a posteriori y validación: la experimentación es el momento en el cual se ejecuta lo planificado en la Ingeniería. El análisis a posteriori consiste en analizar el conjunto de datos recogidos tales como las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes; se pueden complementar con cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas durante el momento de enseñanza. La validación de las hipótesis se realiza con la confrontación de los análisis: a priori y a posteriori.

5.4. Investigaciones referidas al tema

Después de una revisión bibliográfica de investigaciones referidas al tema, se procedió a clasificarlas según los criterios, tipo de representación utilizada y el tema tratado, y se presentan a continuación algunos de los resultados más importantes.

- Son muchas las investigaciones que sugieren que la noción ***parte todo*** (2) (o subárea) es la que resulta más fácil de comprender por los niños a tempranas edades, como lo muestran los resultados de investigaciones llevadas a cabo por Hart (1980), La Unidad de Evaluación Permanente (A.P.U., 1980), Galloway y William (1975), Muangnapoe (1975, citados por Dickson y col., 1991). Pero Williams (1975, citado por Dickson y col., 1991), hace un aporte con respecto a esta representación, manifiesta que la representación de fracciones impropias mediante sub-áreas se dificulta con respecto a las fracciones impropias.

- Con respecto a las unidades discretas, cuando se trabaja la noción de ***razón*** (3), Paine (1976, citado por Dickson y col., 1991), halló que en niños de 10 a 12 años, la aproximación por vía de conjuntos (razón) era más difícil. Otros investigadores apoyan esta tesis, tales como Ward (1979) y A.P.U. (1980, citados por Dickson y col., 1991).

Contrario a los resultados anteriores Hart (1980), citado por Dickson y col. (1991), prueba que la definición de fracción mediante el modelo de conjunto (razón) es más fácil que el modelo de área (parte-todo). Estos resultados son apoyados por Novillis (1976), Piaget (1968), Karplus (1977) y Hart (1980, citados por Dickson y col., 1991).

- La representación como ***reparto*** (4) según Payne (1976, citado por Dickson y col., 1991) ha sido estudiada muy poco. A este respecto Hart (1980, citado por Dickson y col., 1991) a niños de 12 y 13 años le hizo la siguiente pregunta: ¿Cuánto debe recibir cada niño, de 5, si se reparten 3 tabletas de chocolate en partes iguales? El 33% contestó correctamente 3/5 ó 0,6, parece que los alumnos no se percatan de que la división de enteros, da como resultado una expresión exacta expresable como fracción.
- Son muchas los resultados que muestran que a los alumnos se les dificulta entender las relaciones entre fracciones y ***números decimales*** (5), entre ellas tenemos las de A.P.U. (1980) y Brown (1981, citados por Dickson y col., 1991).
- Dickson (1991), al igual que Caburn (1974, citado por Dickson y col., 1991), sugieren introducir la noción de ***fracciones equivalentes***, utilizando los constructos de área y conjunto, esto lo reafirman, Post y col. (1985, citados por Maza, 1995), establecen que al comienzo del aprendizaje de las fracciones equivalentes los alumnos no pueden manipular símbolos, por lo que según ellos se da el proceso de traslación coordenada de las representaciones, que establece que para reconocer dos símbolos como equivalentes primero hacen la representación icónica de ambas fracciones y trasladan la comparación a nivel simbólico.

Algunos investigadores al trabajar la equivalencia como entes abstractos, verifican que se presentan dificultades hasta los 15 años; investigadores tales como Hart (1980), A.P.U. (1980), N.A.E.P. (1980) y Ward (1979, citados por Dickson y col., 1991).

Es curioso observar como al preguntar a los alumnos (Ríos, 2001) por qué dos fracciones: $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes, estos hacen referencia a contenidos procedimentales haciendo referencia a los procesos de amplificación y simplificación, y no al concepto per sé.

Estas respuestas hacen pensar que el concepto de fracciones equivalentes y los procedimientos para hallarlas (amplificación y simplificación), no tienen significados para ellos, pues trabajan las fracciones como un ente matemático formado por dos símbolos que operan con otros dos símbolos, (en el caso de fracciones equivalentes) para verificar una igualdad. Esto lo apoyan Vence, Ohlsson y Bee (1991, citados por Maza, 1999), cuando expresan que los alumnos utilizan la operación de suma o resta por un mismo número, considerando que la multiplicación por uno no es tan elemental.

- Muchas son las investigaciones que se han realizado respecto a las deficiencias que tienen los niños respecto al ***ordenamiento de fracciones***, a saber: Hart (1980), N.A.E.P. y Noelthing (1978,1980, citados por Dickson y col., 1991).
- El aprendizaje del ***porcentaje*** tiene dificultades cuando se intenta calcular el porcentaje de cierta cantidad, como lo muestran A.P.U. (1980) y Sewell (1981, citados por Dickson y col., 1991).

Los resultados son más deficientes cuando se aplican porcentajes a la resolución de problemas como lo muestran las investigaciones de A.P.U. (1980) y Hart (1981, citados por Dickson y col., 1991).

- El concepto de ***proporcionalidad*** presenta dificultades a nivel de aplicación y formulación como lo aseguran investigaciones llevadas a cabo por Piaget (1968), Limmat(1974), Karplus (1977), Wollman y Lawson (1978), Vergrand (1983), Hart (1984, citados por Fiol y Fortuna, sf).
- Son múltiples las dificultades que se presentan al ***sumar y restar fracciones***, se concluye que muchos estudiantes poseen poca habilidad para operar entre fracciones y reducida comprensión conceptual. Esto lo aseguran Lankford (1972), Hart (1981), Suydam (1978), Carpenter (1978) y N.A.E.P., (citados

por Dickson y col., 1991). En la suma de fracciones el error más común fue el de sumar numeradores y denominadores.

Por otro lado, Hasemann (1980, 1981, citado por Dickson y col., 1991), muestra que hay dificultades en cuanto a la aplicación de los procesos cognitivos en la resolución de problemas, pues en niños alemanes de 13 años observó que no les preocupaba el hecho que por métodos distintos en la resolución de problemas obtenían distintos resultados.

Brown y Van Lehn (1982, citados por Dickson y col., 1991), establecen que los alumnos olvidan los procedimientos, los cuales tratan de reparar y en este proceso cometen errores, que según los trabajos de Brueckner y Grossnick, (citados por Dickson y col., 1991), se identificaron 160 tipos de errores.

Algunos investigadores como Dickson y col. (1991) y Sánchez y Linares (1988, citados por Valdivé, 2002), encontraron que la interpretación más natural para los conceptos de suma y resta de fracciones es el aspecto de medida caracterizado por la relación parte-todo, utilizando el modelo de recta numérica.

Por otro lado, Hart (1981, citado por Dickson y col. 1991) muestra que la destreza de los cómputos de la adición y la sustracción, decrece con la edad y la solución de problemas no decrece, los alumnos los resuelven con algoritmos no computacionales. De producirse esta situación, el docente deberá reforzar los procedimientos utilizados dentro de situaciones problemáticas.

- Según Briht (1978, citado por Dickson y col., 1991), el algoritmo de la ***multiplicación*** resulta fácil, pero desde el punto de vista conceptual resulta más compleja que la adición. Estos resultados lo apoyan Green (1970), Hart (1980), A.P.U. (1980) y Sewell, (citados por Dickson y col., 1991).
- Según Dickson y col. (1991) el significado que se le puede dar a la ***división de fracciones***, como operación inversa de la multiplicación, dista mucho de ser intuitivo, como el que nos ofrece la división de enteros, como lo demuestran las investigaciones de Hart (1980) y Ward (1979, citados por Dickson y col., 1991).
- La enseñanza de las ***operaciones entre los decimales*** es importante pues estas son aplicables en situaciones donde se involucra la medida. El aprendizaje del algoritmo de las operaciones entre decimales es relativamente sencillo, pues este es heredado de los números naturales, pero investigaciones de Brown (1981) y A.P.U. (1980, citados por Dickson

y col., 1991), muestran que para niños de 15 años no es tan fácil.

La situación en la resolución de problemas empeora, como lo muestran los resultados que aportan Brown (1981) y Sewell (1981, citados por Dickson y col., 1991).

- La Matemática tiene un ***sistema notacional***, que presenta reglas y estas deben ser conocidas por nuestros alumnos. Es sabido que los alumnos presentan dificultades en la utilización y comprensión de la notación de las fracciones; Dickson y col. (1991) nos muestran resultados deficientes en cuanto a lectura de las fracciones, representación simbólica y traducción simbólica de problemas.

6. Operacionalización de variables

Para poder verificar el cumplimiento de los objetivos, las variables que los conforman se operacionalizan de la siguiente manera:

Objetivo específico número 1: Determinar las representaciones iniciales referidas al concepto de fracción que tienen los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física (Cuadro 1).

Objetivo específico número 2: Determinar los resultados de aprendizajes obtenidos por los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, después de aplicada la Ingeniería Didáctica (Cuadro 2).

Objetivo específico número 3: Determinar la efectividad de la Ingeniería Didáctica, en su segunda fase, referida al concepto de fracción (Cuadro 3).

Objetivo específico número 4: Comparar las representaciones de los alumnos antes y después de aplicar la Ingeniería Didáctica (Cuadro 4).

Cuadro 1
Variables referidas al primer objetivo específico

Variable	**Subvariables**	**Indicadores / Propiedades**
Representaciones iniciales sobre el concepto de fracción	Representación parte todo con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación reparto con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación parte todo o reparto con unidad discreta	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación razón	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Traslado de representación: Simbólica a verbal Gráfica a simbólica Simbólica a simbólica	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
Representaciones iniciales sobre el concepto de fracción.	Operaciones combinadas entre fracciones	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Resolución de problemas	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Fracciones equivalentes	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Definición de fracción	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Proporcionalidad	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Propiedad del inverso multiplicativo	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Errores	Tipo Frecuencia

Fuente: Ríos (2006).

Cuadro 2
Variables referidas al segundo objetivo específico

Variable	Subvariables	Indicadores/ Propiedades
Resultados de aprendizaje del concepto de fracción	Representación parte todo con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación reparto con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación parte todo o reparto con unidad discreta	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación razón	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Traslado de representación: Simbólica a verbal Gráfica a simbólica Simbólica a simbólica	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
Resultados de aprendizaje del concepto de fracción	Operaciones combinadas entre fracciones	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Resolución de problemas	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Fracciones equivalentes	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Definición de fracción	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Proporcionalidad	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Propiedad del inverso multiplicativo	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Errores	Tipo Frecuencia

Fuente: Ríos (2006).

Cuadro 3
Variables referidas al tercer objetivo específico

Variable	Subvariables	Propiedades/Indicadores
Diseño de la Ingeniería Didáctica	Conocimiento conceptual	Definición de fracción Definición de fracciones equivalentes Tipo de representaciones (parte todo, reparto, razón) Traslado de representaciones Proporcionalidad Propiedad del inverso multiplicativo
	Conocimiento procedimental	Fracciones equivalentes Representación parte todo o reparto con unidad discreta Operaciones combinadas Resolución de problemas
	Estrategias	Tormenta de ideas Técnica de la pregunta Resolución de problemas Comunicación interactiva (docente alumno)

Fuente: Ríos (2006).

Cuadro 4
Variables referidas al cuarto objetivo específico

Variable	Subvariables	Indicadores /Propiedades
Representaciones iniciales y resultados de aprendizaje sobre el concepto de fracción.	Representación parte todo con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación reparto con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación parte todo o reparto con unidad discreta	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Representación razón	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Traslado de representación: Simbólica a verbal Gráfica a simbólica Simbólica a simbólica	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Operaciones combinadas entre fracciones	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Resolución de problemas	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Fracciones equivalentes	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	Definición de fracción	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Proporcionalidad	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Propiedad del inverso multiplicativo	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	Errores	Tipo Frecuencia

Fuente: Ríos (2006).

7. Bases metodológicas

A continuación se hace la descripción de la metodología aplicada durante esta investigación. Los elementos que conforman a la misma son: la muestra utilizada, técnicas utilizadas en la recolección de la información, instrumentos utilizados, descripción del tratamiento aplicado a la muestra, procedimiento para la codificación de la información, validación de los instrumentos utilizados y estrategias para el análisis de los resultados.

7.1. La muestra utilizada

La muestra fue no probabilística, elegida de manera intencional, pues estuvo constituida por 26 alumnos. Esta muestra forma parte de una población de 40 alumnos, que ingresaron a la Licenciatura de Educación Mención Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, durante el año 2004. Es conveniente saber, que esta población se caracteriza por tener un promedio académico mayor de trece (13) puntos, los cuales dentro de la cesta de seis (06) opciones de la prueba LUZ, les aparece esta carrera. Los alumnos de la muestra fueron sometidos a una Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción que se describirá en el numeral tres de esta sección.

7.2. Técnicas e instrumentos utilizados para la recolección de información

Después de diseñada la Ingeniería Didáctica se procedió a construir el cuestionario (ver anexo) que permitió recoger la información de las representaciones iniciales respecto al concepto de fracción que poseían los alumnos que fueron sometidos al tratamiento. Este cuestionario fue nuevamente aplicado después del tratamiento para determinar los resultados de aprendizajes logrados por los alumnos al aplicárseles la Ingeniería Didáctica. En ambas ocasiones, la duración en la aplicación del instrumento fue de una hora, y las respuestas, a todos los ítems, fueron codificadas con la siguiente escala ordinal: **0** no respondió, **1** respuesta incorrecta y **2** respuesta correcta.

El cuestionario consta de dos partes, la primera se refiere a datos personales tales como: el nombre, edad, índice académico entre otros y la segunda parte formada por 27 preguntas, entre las cuales se encuentran distribuidos 47 items. El siguiente cuadro muestra la distribución de acuerdo a los indicadores mostrados en el capítulo anterior (Cuadro 5).

Cuadro 5
Relación entre los indicadores e ítems del cuestionario

Indicadores	Cantidad de Items	Número de Items
Representación parte todo con unidad continua	6	2,3,4,5,6,9
Representación reparto con unidad continua	2	7,8
Representación parte todo o reparto con unidad discreta	2	10,11
Representación razón	3	12,16(a,b)
Traslado de representación:		
Simbólica a verbal	5	1 (a,b,c,d,e),
Gráfica a simbólica	7	14 (a,b), 15 (a,b,c,d,e)
Simbólica a simbólica	4	17,18 (a,b,c)
Operaciones combinadas entre fracciones	2	19 (a,b)
Resolución de problemas	2	13,20
Fracciones equivalentes	2	21,23
Definición de fracción	1	22
Proporcionalidad	2	24,25
Propiedad del inverso multiplicativo	2	26,27

Fuente: Ríos (2006).

7.3. Descripción del tratamiento de la muestra

Algunos de los insumos que sirvieron para la elaboración de la Ingeniería Didáctica, en parte es producto de una extensa revisión bibliográfica sobre diversas investigaciones referidas al aprendizaje de las fracciones, donde algunos de ellos se mostraron en la sección de este trabajo titulado “Investigaciones referidas al tema”. En estas investigaciones se establecieron diversos niveles de complejidad en algunos contenidos de referidos a las fracciones, por ejemplo se muestran que algunas representaciones son más fáciles que otras, que la representación de fracciones impropias es más compleja que la de las propias, que hay diversos niveles de comprensión en cuanto a las totalidades continuas y discretas, que el significado del número decimal debe ser asociado a la fracción, el significado que se le debe dar a las fracciones equivalentes debe estar asociado a su representación gráfica, entre algunos resultados.

Otro de los insumos que se tomaron fueron las observaciones realizadas a maestros y profesores, que permitieron determinar el nivel de profundidad en que se trabajan diversos contenidos, las estrategias que se utilizan en el proceso, la secuencia en que trabajan los contenidos, entre otras cosas. Además de esto, se hicieron revisiones de textos y programas de Matemática de Educación Básica, para contrastarlos con el trabajo realizado por los maestros y profesores observados.

Con toda esta información y la experiencia que se ha adquirido desde el año 1999 en el dictado de esta asignatura, se pasó a diseñar la secuencia de contenidos de la primera versión (año 2002) de la Ingeniería Didáctica, los cuales quedaron organizados de la siguiente manera (Cuadro 6).

Para poder lograr esta secuencia en clase, se elaboró un guión de trabajo, el cual fue validado a través de una prueba piloto de 70 alumnos, en el primer semestre del 2002. Estos alumnos fueron distribuidos en dos secciones (una vespertina y otra nocturna) y se trabajó con ellos durante 4 semanas, recibiendo tres (3) sesiones semanales, donde cada una consto de tres (3) horas de 45 minutos cada una, es decir, 135 minutos semanales.

Todas las clases estuvieron guiadas por las intervenciones de los alumnos en clase, para ello básicamente se utilizó la técnica de la pregunta, lluvia de ideas, discusiones grupales, trabajos individuales y la interacción docente alumno. Las actividades en su gran mayoría estaban dirigidas a incentivar la curiosidad y la creatividad de los estudiantes, cuando el contenido lo permitía se iniciaba con un problema (etapa de acción) para tratar de contextualizar y posteriormente pasar por las etapas que caracterizan las situaciones didácticas: formulación, validación e institucionalización.

Después de aplicada la Ingeniería Didáctica en el año 2002, ésta entró en un proceso de rediseño debido a que la prueba piloto dio nuevos insumos que permitieron ampliar y modificar algunos elementos. La Ingeniería Didáctica en su segunda versión fue aplicada, en el año 2004, a 26 alumnos durante 6 semanas, recibiendo

Cuadro 6
Organización de los contenidos en la primera versión de la ingeniería didáctica

Representación parte todo y reparto de fracciones propias (unidades continuas)
Representación parte todo y reparto de fracciones impropias (unidades continuas)
Representación parte todo y reparto de fracciones propias (unidades discretas)
Representación parte todo y reparto de fracciones impropias (unidades discretas)
Representación razón
Significado del cero como numerador y denominador
Clasificación de las fracciones y su significado
Suma de fracciones de igual denominador
Significado de las expresiones: a x 1/n, a x b/c, 1/n x a, a/b x c, 1/n x 1/m, 1/n x a/b, a/b x 1/n, a/b x c/d
Fracciones equivalentes
Significado del proceso de amplificación y simplificación
Significado de expresiones tales como: a:b, 1/n : a, a : 1/n, a/b : c, a : b/c, 1/n : 1/m, 1/n : a/b, a/b : 1/n, a/b : c/d
Número racional
Características del sistema numeración decimal
Relación Adición de números racionales número decimal y fracción
Significado de la definición a través de las fracciones equivalentes
Propiedades de la adición
Sustracción de números racionales
Definición de la multiplicación
Propiedades de la multiplicación
Definición de la división
Resolución de problemas

tres (3) sesiones semanales, donde cada una constó de tres (3) horas de 45 minutos cada una, es decir, 135 minutos semanales.

Ésta segunda versión quedó constituida por 13 aproximaciones, las cuales se mencionan en el Cuadro 7:

Cuadro 7
Organización de los contenidos en la segunda versión de la ingeniería didáctica

Representación parte todo, Representación como operador
Representación reparto
Representación como razón
Representación como número decimal
Fracciones equivalentes
Ordenamiento de las fracciones
Proporcionalidad directa y porcentajes
Adición y sustracción de fracciones
Multiplicación de fracciones
División de fracciones
Operaciones entre decimales
Propiedades de los números racionales
Las fracciones como sistema rotacional

Las clases en general estuvieron guiadas por las intervenciones de los alumnos y las preguntas realizadas por el profesor, para ello se utilizaron otro guión de trabajo. Los errores de los alumnos y los conflictos que se presentan tratan de ser utilizados como nuevas oportunidades de aprendizaje.

Es interesante observar que en las clases se presentaron situaciones tales como: las ideas aportadas por los alumnos complementan las dadas por el profesor, la intuición en un momento es un obstáculo y el profesor debe recurrir al formalismo de la Matemática para darle significado la notación formal, los errores de los alumnos persisten aún y cuando el profesor haya creído aclararlas, y las diversas concepciones que tienen los alumnos respecto a un mismo concepto matemático.

7.4. Validación de los instrumentos utilizados

Este es un procedimiento que tiene como finalidad verificar en que medida el cuestionario diseñado tiene relación con los objetivos de la investigación. Se evalúo la redacción, pertinencia y nivel de complejidad de cada uno de los ítems y su relación con los indicadores de las variables.

Para realizar la evaluación, el cuestionario se sometió a la consideración de cuatro expertos y los resultados de la evaluación se recogieron en un instrumento de validación.

7.5. Estrategias para el análisis de los resultados

Para analizar los resultados se seguirán diversas estrategias, las cuales se describen a continuación:

Análisis de la diferenciación del grupo antes y después del tratamiento

Para determinar la diferenciación del grupo antes y después del tratamiento, se siguió el siguiente procedimiento estadístico:

a) Para cada alumno se determinó el total de puntos por indicador.

b) Se calculó la media y varianza para cada indicador antes y después del tratamiento.

c) Se aplicó una prueba de hipótesis de diferencia de medias, con un nivel de confianza del 95%, siendo el valor crítico Zo = 1,69.

d) Se aplicó la siguiente regla de decisión: Si la razón crítica calculada (Z) es mayor que Zo, el grupo presentan diferencias significativas, antes y después del tratamiento, en caso contrario no hay diferencias significativas.

Análisis de la efectividad de la Ingeniería Didáctica

Para determinar la efectividad del tratamiento sobre cada indicador, se determinó el porcentaje de respuestas correctas para cada uno de la siguiente manera:

a) Para cada ítems se determinó el porcentaje de respuestas correctas del grupo.

b) Se promediaron los porcentajes para cada indicador.

c) El criterio de decisión fue el siguiente: si el porcentaje es mayor al 70% la Ingeniería Didáctica fue efectiva sobre el indicador, en caso contrario no fue efectiva.

Análisis de los errores

Para determinar la efectividad de la Ingeniería Didáctica sobre la disminución de la cantidad de errores cometidos por los estudiantes, se aplicaron dos procedimientos. Primero, se determinó para cada indicador el número de errores cometidos por el grupo, según la tipología: errores semánticos, sintácticos, de razonamiento y de cálculo; y por otro lado, se determinó las cantidad total de errores, de cada tipo, cometidos por el grupo.

Para determinar si la Ingeniería Didáctica fue efectiva en cuanto a la disminución de errores por cada indicador, se utilizó el siguiente criterio de decisión: si al hallar el coeficiente de error, este supera el 0,7, se dirá que el tratamiento fue efectivo para la disminución de los errores en cada indicador, en caso contrario no fue efectivo. Para hallar el coeficiente de error se usó la siguiente fórmula: $E = (Ea - Ed) / E\ max$, donde Ea, es la cantidad de errores antes del tratamiento, Ed es la cantidad de errores después del tratamiento y Emax, es el máximo entre los dos.

Para determinar si el tratamiento fue efectivo para disminuir cada tipo de error, se sumaron los errores de cada tipo, si el coeficiente de error es mayor de 0,7, se dirá que el tratamiento fue efectivo para disminuir ese tipo de error, en caso contrario no fue efectivo.

Análisis de contenido

Se efectuó sobre aquellos ítems que permitieron establecer, por parte de los alumnos, una diversidad de estrategias de soluciones interesantes y fuera de lo común.

Para ello se determinaron las cantidades de respuestas correctas e incorrectas de cada pregunta y además se hizo una clasificación de las respuestas, tanto para las correctas como las incorrectas en donde se determinó la cantidad de alumnos que establecieron cada tipo de respuesta. Por otro lado, en algunos casos se hizo una descripción y un análisis cualitativo de las respuestas, para los ítems del cuestionario, antes y después del tratamiento.

8. Conclusiones

Como se mencionó en la introducción, diversos autores tienen la hipótesis que las dificultades que existen en el aprendizaje del concepto de fracción se debe, en parte, a las diversas representaciones que tiene este concepto, y que a la hora de enseñarlo no son considerados, en el mejor de los casos, si se trabajan algunas representaciones no se establecen las relaciones entre ellas;

quizás porque el docente supone que el alumno debe automáticamente establecer las conexiones entre ellas.

Como muestra de esta situación se observa en nuestras aulas, en los niveles iniciales, que para introducir el concepto de fracción se utiliza la representación parte todo con sus respectivas representaciones gráficas; en muchos casos es la única representación que se trabaja. En el caso de las fracciones propias, esta representación quizás sea comprendida por los alumnos, pero en el caso de las fracciones impropias difícilmente se puede explicar el hecho de que para representarla gráficamente, se debe "tomar otra" unidad, situación que quizás sea entendida mejor utilizando la representación como reparto.

Para el diseño de la Ingeniería Didáctica se consideraron elementos tales como:

- Las diversas representaciones del concepto de fracción y las relaciones entre ellas.
- Uso de representaciones gráficas para darle significado a procedimientos tales como: la ampliación y simplificación de fracciones, las operaciones entre fracciones (suma, resta, multiplicación y división), las características de sistema de numeración decimal, entre otros. Esto permite que el alumno tenga referentes visuales de algunos conceptos matemáticos.
- Grado de complejidad de las diversas representaciones; para ello se tomaron en consideración las investigaciones realizadas por otros autores, que muestran la eficiencia de las diversas representaciones del concepto de fracción, en los resultados de aprendizaje de los estudiantes.
- Utilización del método inductivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de las operaciones entre fracciones, específicamente en la multiplicación y división. Para la comprensión de los algoritmos de estas operaciones, se partió del estudio de casos particulares, como por ejemplo: la multiplicación o división de un entero por una fracción de la forma $1/n$, aumentando el grado de complejidad con una fracción de la forma a/b. Para cada caso, se obtuvieron generalizaciones parciales que permitieron la construcción inductiva de los algoritmos de la división y la multiplicación de fracciones. La enseñanza de cada caso estuvo apoyada en la representación gráfica y la comprensión de la fracción.
- Para los algoritmos se obtuvieron las respuestas gráficamente, y posteriormente se hizo la representación aritmética aso-

ciada a los datos del caso respectivo con la respuesta, para posteriormente hacer la representación algebraica.

- En la resolución de problemas, para la obtención de la respuesta se usó como soporte la representación gráfica de los datos, lo que permitía, en muchos de los casos, hallar las respuestas sin necesidad de aplicar los algoritmos operatorios.

Los resultados de la aplicación de la Ingeniería Didáctica muestran la efectividad cuantitativa en los aspectos siguientes: representaciones parte todo y reparto de unidades discretas y continuas, representación razón, resolución de problemas, operaciones combinadas, fracciones equivalentes, definición de fracción, la propiedad del inverso multiplicativo y traslado de la representación simbólica a la verbal. La efectividad cuantitativa se muestra a través del porcentaje de respuestas correctas, el cual superó el 70%.

Por otro lado, la efectividad cualitativa de la Ingeniería Didáctica se traduce en cambios tales como: la forma de expresar algunas ideas en el lenguaje formal, que inicialmente eran expresadas en el lenguaje coloquial; y eliminación de errores tales como: repartición desigual de la totalidad, operaciones inadecuadas entre números enteros y la utilización del signo de igualdad, entre otros.

Notas

1. Conocimiento científico aceptado por la comunidad científica.
2. Esta definición le da a la fracción el significado de división del todo en partes iguales, que comúnmente es denominada parte todo o sub-área, donde el denominador indica las partes en que se divide la totalidad y el numerador las que se toman. (Ríos, 2001).
3. Se entiende como la razón de un número a otro como un valor de comparación o de relación entre dos números, que indica las veces que el segundo está contenido en el primero o las veces que el primero contiene en el segundo. En el caso de las fracciones, el primer número de la razón será el numerador y el segundo número de la razón será el denominador.

4. Esta representación se llamará reparto o cociente, donde el numerador y el denominador son el dividendo y el divisor, respectivamente, de la división (a : b) y el símbolo $\frac{a}{b}$ es el cociente que resulta de esa división.
5. Se entiende por número decimal como aquel número que se expresa de la siguiente manera $\sum_{n \in Z} a_i x 10^n$, co ai $\in Z$ (Ríos, 2001).

Referencias Bibliográficas

CHARNAY, Roland (2001). **Aprender (por medio) de la resolución de problemas**, EN: Didácticas de las matemáticas. Apuntes y reflexiones. Compiladores: Parra Carmen y Saiz Irma, Primera edición, Buenos Aires, Barcelona, México, Editorial Paidos, Pp. 51-64.

DICKSON, Linda; BROWN, Margaret y GIBSON, Olwen (1991). **El aprendizaje de las matemáticas**, España, Editorial Labor S.A, Pp. 294-390.

FARFÁN, ROSA (1995). Ingeniería didáctica, un estudio de la variación y cambio, Primera edición, México, Grupo Editorial Iberoamericano, Pp. 9-25.

FIOL, María y FORTUNY, Josef (sf), **Proporcionalidad: propuesta didáctica**, Nuevas perspectivas en Educación Matemática, Universidad del país Vasco, VII cursos de verano de San Sebastián, Editorial: Homo – Sapiens, Pp. 59-77.

GONZÁLEZ, Fredy (1995). **El corazón de las matemática**, Caracas – Venezuela, Serie Temas de Educación Matemática, Número 3, Pp. 39-67.

MAZA, Carlos (1999). **Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de las fracciones**, Revista Suma (31), Pp. 87-95.

MERCIER, Alain y SALIN, Marie (1988). **Análisis a priori, elementos para la observación,** Traducción de Quevedo, Blanca, Doctorado de Ciencias Humanas de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, Material de apoyo del Seminario: Didáctica de las Matemáticas. Maracaibo-Venezuela.

QUEVEDO, Blanca (1998). **Teoría de las situaciones didácticas**, Doctorado de Ciencias Humanas de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, Material de apoyo del Seminario: Didáctica de las Matemáticas.

RÍOS, Yaneth (2001). **Algunos elementos sobre las enseñanzas de las fracciones**, Venezuela, Trabajo de ascenso para optar a la categoría de agregado de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, Pp. 4-62.

RÍOS, Yaneth y ESCALONA María (2002). **Proyecto de investigación: Representaciones cognitivas del concepto de fracción en alumnos que ingresan al programa de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física**, Venezuela, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, Pp. 5-15.

RÍOS, Yaneth y ESCALONA, María (2002). **Proyecto de investigación: Representaciones cognitivas del concepto de fracción en alumnos que ingresan al programa de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física**, Venezuela, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, Pp. 5-15.

SANTALÓ, Luis (2001). **Matemáticos para no matemáticos**, Didácticas de las matemáticas. Apuntes y reflexiones, Compiladores: Parra Carmen y Saiz Irma, Primera edición, Buenos Aires, Barcelona, México, Editorial Paidos, Pp. 21-38.

SEGURA, Dino (2000). **Las matemáticas en el aula: posibilidades de construcción significativa**. EN: Lengua materna y enseñanza de la matemática, Compilador: Romero Jaime, Primera edición, Ediciones Escuela Pedagógica Experimental. Revista Planeamientos Educación, Pp. 63-78.

VALDIVÉ, Carmen (2002). **El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones**, Memorias del IV Congreso Venezolano de Educación *Matemática*, Trujillo-Venezuela.

Anexo Cuestionario

1. ¿Cómo se leen las siguientes fracciones? (si conoces varias formas de leerlas escríbelas todas las que conozcas)

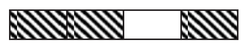
   a) $\frac{1}{3}$_________________ b) $\frac{1}{12}$_________________

   c) $\frac{7}{10}$_________________ d) $\frac{8}{7}$_________________

   e) $2\frac{1}{8}$_________________

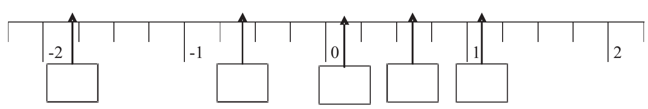
2. ¿Qué significado tiene para ti la expresión "$\frac{2}{3}$ de una torta"?
3. ¿Qué significado tiene para ti la expresión "$\frac{5}{2}$ de una torta"?
4. ¿Qué significado tiene para ti la expresión "$\frac{4}{4}$ de una torta"?
5. ¿Qué significado tiene para ti la expresión " $1\frac{1}{2}$ de una torta"?
6. ¿Cuántas quintas partes tiene la unidad?
7. Se tienen dos pizzas y se quieren repartir entre 5 personas ¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica. Si realizas alguna operación, escríbela.
8. Se tienen cuatro pizzas y se quieren repartir entre 3 personas ¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica. Si realizas alguna operación, escríbela.
9. ¿Cuánto le faltan a los $\frac{3}{7}$ de la unidad para llegar a ser la unidad completa? Si realizas alguna operación, escríbela.
10. ¿Cuántos bolívares representan los $\frac{3}{4}$ de 60 bolívares? Si realizas alguna operación, escríbela.
11. ¿Cuántos bolívares representan los $\frac{7}{5}$ de 60 bolívares? Si realizas alguna operación, escríbela.

12. Se tienen en un aula 36 estudiantes, 12 son varones ¿Qué fracción representan las hembras? ¿Qué fracción representan los varones? Si realizas alguna operación, escríbela.
13. En una mezcla de cemento que se preparó, por cada dos sacos de cemento se utilizaron 6 sacos de arena. Si se usaron 9 sacos de arena en total ¿Cuántos sacos de cemento se usaron en total? Si realizas alguna operación, escríbela.
14. ¿Qué parte de la unidad representa la parte rayada? (contesta en el segmento a continuación de cada gráfico).

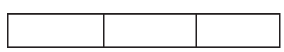
a)  ________

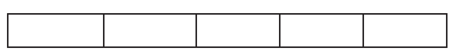
b)  ________

15. ¿Qué fracción representa cada uno de los puntos señalados en la recta real?



16. Cada una de las siguientes piezas, se representan por las letras A y B

A 

B 

a) ¿Qué parte de A cabe en B? ____________
b) ¿Qué parte de B cabe en A? ___________

17. Se sabe que 0,5 y representan la mitad de la unidad. Explique cuál es la relación entre los dos números. Si realizas alguna operación, escríbela.
18. Expresar las siguientes expresiones en términos de porcentajes: Si realizas alguna operación, escríbela.
    a) La mitad del precio de un kilo de arroz _______
    b) Las tres cuartas partes de una torta ________
    c) El uno y un quinto de tu salario ________

19. Resuelva lo siguiente:

    a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \bullet \left(\frac{-4}{3}\right) =$

    b) $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{5}{8} =$

20. Resuelva el siguiente problema:
    Una llave se abre para llenar con agua un tanque cilíndrico de dos metros de altura en 10 horas, otra llave lo llena en 12 horas y otra en 15 horas ¿A qué altura llegará el agua en el tanque si las tres llaves se abren juntas durante una hora?

21. Completa las siguientes igualdades:

    a) $\frac{27}{12} = \frac{9}{\ }$ b) $\frac{2}{\ } = \frac{6}{\ }$ c) $\frac{5}{3} = -$ d) $\frac{\ }{8} = \frac{\ }{4}$ e) $3 = \frac{\ }{4}$ f) $\frac{2}{5} = \frac{10}{\ }$

22. ¿Qué entiendes por fracción?

23. ¿Qué son fracciones equivalentes?

24. Dada la siguiente tabla de valores, determina si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales. Justifica tu respuesta

Distancia	2	3	4	5
Tiempo	10	20	30	40

25. Dada la siguiente tabla de valores, determina si las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales. Justifica tu respuesta

Distancia	2	3	4	5
Tiempo	40	30	20	10

26. ¿Qué simboliza 2^{-1}?. Explica tu respuesta.

27. ¿Qué simboliza $(-2/3)^{-1}$?. Explica tu respuesta.