

## **Representaciones de funciones matemáticas de una variable**

*Damaris Vanegas\* y María Escalona\*\**

### **Resumen**

Este artículo muestra resultados de una investigación sobre representaciones de funciones matemáticas en alumnos cursantes de Cálculo I. La indagación es de tipo cualitativo, realizada a una muestra no probabilística de 29 alumnos en la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia. Los resultados obtenidos fueron interpretados desde la teoría de representaciones de Johnson-Laird y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. Los tipos predominantes de representaciones en la muestra son el proposicional y el analógico.

**Palabras clave:** funciones matemáticas de una variable, procesos cognitivos, representaciones, campos conceptuales, formación de concepto.

\* Mg. en Matemática, Mención docencia. Profesora Titular Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería y Educación. Universidad del Zulia. Investigador Programa de representación del pensamiento racional, Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia.

\*\* Dra. en Ciencias Humanas, Profesora Titular Emérito de LUZ. Investigador del Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Programa de representación del pensamiento racional, División de Estudios para graduados, Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia.

## *Representations of mathematical functions of one variable*

### **Abstract**

This article shows results of research on representations of mathematical functions in students studying calculus I. The inquiry is qualitative type, made a not probabilistic sample 29 students in the Faculty of engineering of the University of Zulia. The results were interpreted from representations of Johnson-Laird theory and the theory of conceptual Vergnaud fields. The predominant types of representations in the sample are the propositional and analogue.

**Key words:** mathematics functions of one variable, cognitive processes, representations, conceptual fields, formation of concept.

### **Introducción**

El desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha sido objeto de ocupación tanto para las ciencias como para la didáctica y la epistemología. No obstante, la mayoría de los educadores, formados en el área, están preocupados por el bajo rendimiento académico y el poco dominio de los contenidos matemáticos de sus alumnos. Considerando estos problemas, en este trabajo se estudian los tipos de representaciones de los conceptos matemáticos básicos presentes en una muestra de estudiantes del ciclo básico de la facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia.

Este artículo hace referencia al estudio de las representaciones del **concepto de Función matemática**, por ser fundamental en el área matemáticas del nivel de Educación Media;<sup>1</sup> además, porque se observa en los estudiantes del subsistema de Educación Universitaria poco dominio en el manejo del mismo (Flores, Alarcón y Albarrán, 2002; González y Martín, 2004; Lupo, 2005). Como ejemplo se tiene el caso de los alumnos inscritos en la asignatura Cálculo I del programa Formación para ingenieros de la Universidad del Zulia; éstos, casi siempre, tienen un escaso aprendizaje sobre funciones.

---

1 Estructura del Sistema Educativo Venezolano, según la Nueva Ley Orgánica de Educación del 15 de agosto de 2009. GACETA OFICIAL N° 5.929

El desenvolvimiento del epísteme matemático es el *fruto de procesos en el que han intervenido muchos factores, y a menudo deben su existencia a la aportación de más de un matemático*, (Mantica, Moriena y Saucedo, 1999); lo cual permite que la noción de representación,<sup>2</sup> clave importante para entender e interpretar el modo en que los alumnos conocen y comprenden conceptos matemáticos, se enriquezca. Por este motivo es importante conocer las representaciones de los estudiantes, porque éstas ayudan a comprender sus procesos cognitivos y dominios conceptuales. Esta es una de las razones para develar las representaciones externas en los alumnos respecto al concepto “función matemática de una variable”. Además, los resultados pueden apoyar la producción de estrategias didácticas novedosas por los docentes.

Particularmente, este informe, además del planteamiento del problema, la justificación y los objetivos de investigación, considera los componentes teóricos que la sustentan. Entre estos últimos se tienen las teorías cognitivas constructivistas, tales como: las teorías de representaciones mentales y las de Campos Conceptuales. Estas constituyen el basamento teórico usado para lograr la operatividad de las variables por investigar. De igual manera trata la metódica; acudiendo al uso de métodos cualitativos, señalando la representación de cada participante según el concepto aportado por el contenido matemático. En la última sección del informe se exponen los resultados obtenidos respecto a las representaciones externas del concepto función matemática de una variable en una muestra no probabilística de cursos de Cálculo I en la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia.

### **Habilidades cognitivas y procedimientos para aprender Cálculo I (descripción de la situación problema)**

Una de las áreas del conocimiento donde existen dificultades para el aprendizaje y poco aprovechamiento o adquisición de conocimientos institucionalizados es la matemática, donde, generalmente, el número de aplazados en asignaturas del área es alto. Si se hace referencia a los cursos de Cálculo I en la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia, el porcentaje de aplazados, casi siempre, supera el 50% (Hernández, 2005). Una de las causas de estos resultados quizás se deba al desconocimiento por los docentes de las

---

2 Representar en el sentido general es “sustituir” para dar presencia a algo ausente, es decir, una representación supone una relación dual entre representante y representado. Es por esto que mediante estos y otros conceptos se aborda el estudio del aprendizaje.

capacidades de percepción, imaginación y categorización con las cuales los estudiantes construyen la realidad. Desde luego, conocer las representaciones mentales usadas por los alumnos para describir y construir la simbología matemática ayuda al docente en la elaboración de estrategias para optimizar y enriquecer los aprendizajes de los estudiantes. Entonces, valdría la pena explorar: **¿cuáles son las representaciones mentales que poseen los alumnos referentes a funciones matemáticas de una variable?**

Profundizar el conocimiento institucionalizado e incrementar la comprensión sobre un campo o un área específica del mismo es el objetivo central en los procesos de enseñanza y aprendizaje escolarizado. Esto deriva del interés que para la Didáctica de las Matemáticas tienen las nociones de representación y comprensión de los conceptos, situaciones matemáticas y procesos de razonamiento matemáticos. Conocer las representaciones de funciones presentes en los alumnos de los cursos de Cálculo I contribuiría a detectar el origen de los errores en el aprendizaje de este concepto en el subsistema de Educación Universitaria venezolana.

## Objetivos

Para orientar esta investigación se planteó el siguiente objetivo general: Determinar la interpretación cognitiva del conocimiento matemático referente al concepto de función matemática de una variable, en una muestra no probabilística para cursos de Cálculo I en la facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia. Este objetivo se desagrega en el logro de los siguientes objetivos específicos: 1) Identificar las representaciones mentales externas en los alumnos, referente al concepto de funciones matemáticas de una variable, en una muestra no probabilística para cursos de Cálculo I en la facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia; 2) Caracterizar las representaciones mentales externas, referente al concepto funciones matemáticas de una variable, en una muestra no probabilística con alumnos participantes de Cálculo I en la facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia.

## Las representaciones y las teorías del aprendizaje (sustentación teórica)

Las formas de representación externas pueden ser consideradas como los dispositivos usados por las personas para hacer públicas las concepciones

que tienen en privado (representaciones internas). Este término se ha conceptualizado para hacer referencia al medio expresivo usado para hacer público un concepto. Las distintas formas de representaciones internas de los conceptos se pueden combinar e interactuar para expresar las externas de los mismos, donde la forma escogida estará influida tanto por sus habilidades como por sus propósitos. Estos modos de representaciones son los medios usados para modelar las maneras utilizadas para expresar un concepto. La creación de una representación no sólo sirve como un medio o vehículo mediante el cual se exteriorizan nuestras concepciones, sino que también proporciona al individuo una información sobre sus capacidades para plasmar ideas referentes a los conocimientos interiorizados.

Entre las teorías que han hecho grandes aportes al aprendizaje de los conceptos está la teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud (1990). Este investigador reconoce la importancia de la teoría de Piaget, resaltando las ideas de adaptación, desequilibrio y reequilibración; pero sobre todo el concepto de esquema, el cual considera fundamental para el desarrollo de su propia teoría. Además, amplía y da una nueva dirección a la Teoría del Pensamiento Piagetiano, al considerar como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual del dominio del mismo (Moreira, 2002).

Además de las ideas piagetianas resulta interesante resaltar las de Vygotsky, porque estas últimas también tuvieron su influencia en la teoría de los Campos Conceptuales, sobre todo en la importancia que se le atribuye al lenguaje, a la interacción social, al dominio de la simbolización y a las oportunidades que pueda facilitar el docente para contribuir al desarrollo de esquemas conceptuales con ayuda de la zona de desarrollo próximo.

**Campos Conceptuales.-** Un Campo Conceptual es para Vergnaud (1990) *un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición*. Otras definiciones dadas por Vergnaud (1990), como campo conceptual, son las siguientes:

- Es un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, pero íntimamente relacionados (Vergnaud, 1983, p. 127).
- Es un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distintas (Vergnaud, 1990, p. 146).

Básicamente una de las premisas sobre las cuales se sustenta esta teoría es precisamente que el conocimiento está organizado en Campos Conceptuales, donde el alumno para poder dominar un determinado Campo requiere periodos de tiempo extensos, experiencia y madurez. Es decir, para dominar un determinado Campo no existe un período establecido de tiempo, por lo contrario el concepto debe ir enriqueciéndose progresivamente al incorporarle nuevos problemas, nuevas propiedades y nuevas aplicaciones.

Para Vergnaud (1990) no es conveniente intentar reducir la complejidad conceptual progresivamente dominada por los alumnos, para establecer una complejidad de tipo lógico general. A diferencia de Piaget, se interesa más en la enseñanza del contenido matemático dentro del aula con el fin de estudiar las dificultades de los alumnos en esta área. De igual modo, determinó que las dificultades presentadas por los alumnos no son las mismas en Campos Conceptuales diferentes.

Como se puede inferir a través de las distintas definiciones de Campos Conceptuales, se observa que para tener un cierto dominio de un concepto se requiere establecer conexión entre situaciones, contenidos, conceptos de naturaleza distinta, estructuras, procedimientos y operaciones. Si se reflexiona sobre esta teoría se pudiera pensar que tal vez la falta de dominio para un concepto dado se debe a la poca conexión existente entre cada uno de los aspectos mencionados anteriormente. Dicho de otra forma, los alumnos ante una situación presentada no logran establecer las conexiones necesarias o pertinentes entre sus estructuras cognitivas, los procedimientos adecuados, las operaciones y propiedades necesarias, y los distintos conceptos relacionados con el objeto matemático, para poder enfrentar la situación.

No obstante, ante esa reflexión es difícil aceptar que conceptos como el de función matemática de una variable, parte del contenido programático en el Sistema Educativo Venezolano durante casi todo el nivel de Educación Media, no es aprendido por los egresados de este sistema. Posiblemente, estos resultados se deben al estudio aislado del concepto de función matemática, en lugar de considerarlo como un Campo Conceptual. Entre los conceptos que están estrechamente relacionados con el concepto de función matemática se podrían mencionar: relación, dominio, imagen, rango, plano cartesiano, representación gráfica, simetría, entre otros. Estos no son independientes y unos son importantes para la comprensión de otros; de acuerdo con la teoría de los Campos Conceptuales sería imposible estudiarlos separadamente.

La definición de *concepto* para Vergnaud (1990) es compleja, porque la interpreta como la interacción de tres conjuntos íntimamente relacionados, como son  $C = (S, I, R)$  donde:

**S:** Conjunto de *situaciones*, tareas o combinaciones de tareas. También hace énfasis en que los procesos cognitivos desarrollados por los sujetos y sus respuestas son el resultado de las situaciones con las cuales ha sido confrontado. Además afirma que las primeras *situaciones* con las cuales el alumno se enfrentó y fue capaz de dominar o intentar dominarlas ejercen algunas influencias en las concepciones de los estudiantes. Es decir, las *situaciones* son las que contribuyen a darle significado y sentido a los conceptos, clases de situaciones: automatismos y decisiones corrientes.

**I:** Es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, es decir, las invariantes van a ser las herramientas utilizadas por los alumnos para analizar y dominar las *situaciones* del primer conjunto.

**R:** Es el conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos, diagramas, sentencias formales, etc.) que se pueden usar para representar los invariantes, y por consecuencia, representar las *situaciones* y los procedimientos.

Visto desde la perspectiva de la teoría de los Campos Conceptuales, el dominio de un concepto se logrará en la medida en que se establezca la intersección o convergencia entre las situaciones o tareas presentadas a los estudiantes, los objetos, propiedades o relaciones (invariantes), y las representaciones mentales de los alumnos; como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1:** Esquema de la definición de concepto según Vergnaud (Vanegas, 2006).

Si se hace referencia al caso específico del concepto función matemática de una variable, existe gran variedad de situaciones o problemas reales, cuya solución lleva a proponer una función matemática de una variable; es ahí donde el docente podría aprovechar para que el estudiante aplique las invariantes, las cuales a través de las representaciones pueden denotar los procedimientos conducentes a la solución de la situación. Por ello son necesarias situaciones bien seleccionadas, de modo que el alumno busque establecer relaciones entre el nuevo conocimiento y su estructura cognitiva de una manera no arbitraria, sino más bien de un modo sustantivo.

**La Representación de Conceptos.** Según Dreyfus (1991), la mayoría de las representaciones están relacionadas con conceptos y redes conceptuales. En consecuencia, en la medida en que la red conceptual sea más amplia las representaciones mentales también lo serán. Al hablar de representaciones en este estudio, se incluyen las representaciones matemáticas de objetos y procesos.

Particularmente se considera que las representaciones juegan un papel muy importante en la comprensión. Para Hiebert y Carpenter (1992), una representación interna se convierte en externa cuando se comunica mediante lenguaje de símbolos y figuras. Dicho de otra forma, según esta aseveración las representaciones matemáticas internas constituyen la base del conocimiento externo o conocimiento personalizado, el cual es analizado mediante la representación externa.

Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66).

Godino y Batanero (1994, 1995) definen las representaciones matemáticas externas como aquellas que comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas, por ejemplo: las notaciones algebraicas, la recta real, la representación en coordenadas cartesianas, las palabras y expresiones del lenguaje ordinario. Para ellos una representación externa es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos los cuales pueden ponerse en lugar de algo distinto, donde el objeto representado puede variar según el



contexto o el uso de la representación. Definen las representaciones internas como los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significados a las nociones matemáticas.

Algunas de las representaciones externas del concepto de función matemática de una variable pueden ser como se muestran a continuación:

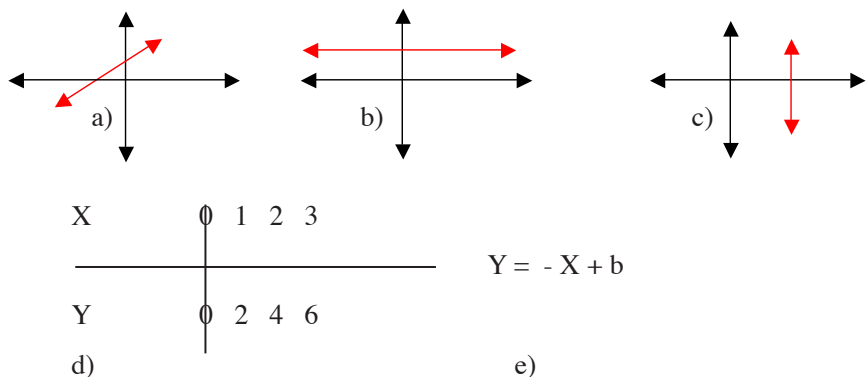


Figura 2: Casos de relaciones.

También, en la mente de los alumnos pudieran existir procedimientos y propiedades asociadas al concepto de función lineal, algunas incluso pudieran ser erróneas como el último que se señala a continuación:

- Una función lineal siempre tiene como gráfica una recta
- Una función lineal tiene una expresión algebraica
- Función lineal tiene un dominio y un rango
- La gráfica de una función lineal afín siempre pasa por el origen de coordenadas.

Ese tipo de imágenes o representaciones asociadas a los conceptos o representación del conocimiento de los estudiantes, consideradas incorrectas por los docentes, da origen al estudio de los errores y obstáculos cognitivos dentro de la teoría de situaciones didácticas. Es decir, una idea matemática puede ser representada mediante diversas formas; en la medida en que la trama o red conceptual del alumno sea más amplia en esa misma proporción sus representaciones mentales serán diversas y esta diversidad de representaciones puede estar presente en los procesos de resolución de problemas.

**Tipos de representaciones.** Luis Rico (2000) considera diversos tipos de representaciones, entre estas se menciona la *Representación visual versus representación conceptual*. Para él la filosofía reconoce que lo percibido antecede a la imagen (réplica de lo acontecido); es decir, la representación como imagen o concepto se basa siempre en una teoría de signos. Esto sugiere que mientras las ideas son las representaciones de las cosas, la palabra emitida, escrita, oída o leída representa a las ideas. Además afirma que las representaciones se reducen a una imagen visual, la cual luego se puede remitir a una cosa y a una forma verbal que plantea el sentido de esta cosa a través de un concepto.

Las ideas anteriormente expuestas al relacionarse hacen pensar que las representaciones internas y externas en los alumnos, sobre el concepto o idea referente a los estudios de las funciones, dependen en gran manera de la información percibida a través de sus sentidos. Entre estas informaciones se encuentra la suministrada por el docente y los libros de texto. Este hecho lleva a la reflexión de que el lenguaje oral, gestual o escrito mediante signos o gráficos es significativo para la construcción de una “mejor” representación conceptual en los alumnos.

En otro tipo de representaciones Luis Rico (2000) distingue dos grandes familias de sistemas de representaciones, es decir, las *simbólicas* y las *gráficas*. Dentro de las representaciones simbólicas se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, cuya sintaxis viene dada a través de reglas de procedimientos. Mientras los sistemas de representaciones gráficas se refieren a representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada sobre todo por reglas de composición y convenios de interpretación.

Existen otros tipos de representaciones mentales, como son *los modelos*. *Las representaciones de tipo analógico basadas principalmente en imágenes y las representaciones proposicionales* (Johnson – Laird, 1996). Los modelos permiten a los individuos hacer inferencias y predicciones, representan un estado de cosas o hechos reales o imaginarios, los modelos representan un cuerpo de conocimientos que debe cumplir las condiciones siguientes:

1. Su estructura no es arbitraria, sino que debe corresponder a la estructura de la situación representada.
2. Pueden consistir de elementos correspondientes a entidades perceptibles, en este caso son concebidos como una imagen, perceptible o imaginaria.

3. No contiene variables, debido a que representa entidades específicas.

Para este autor un modelo puede ser incompleto y sin embargo ser útil. Desde luego es posible no existir un modelo mental completo para una determinada situación.

De acuerdo con Greca y Moreira (2000), los modelos pueden ser constituidos como resultados de la percepción, de la interacción social o de la experiencia interna; donde el razonamiento va a depender de la interacción de esos modelos. Esto último implicaría la posibilidad de razonar sin involucrar una lógica formal.

No obstante, es posible que la capacidad para la construcción de los modelos mentales dependa en gran manera de la capacidad de percepción y de la capacidad de relación entre esta percepción con nuestras propias experiencias internas y externas; es decir depende no solo del conocimiento cotidiano, sino también del conocimiento racional.

Las imágenes comparten las propiedades o atributos de los modelos, pero vienen a ser únicamente las partes “visuales” de ellos. Representan aspectos perceptibles de los objetos del mundo real; son específicas del modelo y el resultado de la percepción y la imaginación desde un punto de vista particular. Ellas se explican por sí mismas, porque no poseen capacidad explicativa. Las imágenes son representaciones mentales de tipo analógico, expresan las formas de ver y captar los detalles de los aspectos más relevantes del objeto de estudio.

Las representaciones proposicionales son representaciones mentales que pueden ser expresadas verbalmente a través de una cadena de símbolos (Johnson-Laird, 1996). Es decir, son aquellas basadas en el manejo verbal, relaciones matemáticas y fórmulas.

Según Greca y Moreira (2002), las representaciones mentales proposicionales son discretas (individuales), organizadas por reglas de combinación y abstractas. Ellos plantean un ejemplo donde pretenden mostrar las tres formas representacionales:

....si se les pidiese que pensasen en un triángulo, cada lector pensaría, o formaría, una imagen de un triángulo específico: rectángulo, isósceles, etc. Sin embargo, el modelo subyacente debe contener las relaciones necesarias

para definir un triángulo en general, de tal manera que si se les pidiese específicamente que imaginen un triángulo lo podrían hacer. Por otra parte, si se afirmase que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $270^\circ$ , deberíamos ser capaces de evaluarla con respecto al modelo, pudiendo, entonces decidir si es falsa o verdadera (Greca y Moreira, 1996, p. 5).

Johnson-Laird (1996) resume las representaciones internas de la siguiente manera: *Las representaciones proposicionales son cadenas de símbolos que corresponden al lenguaje natural. Los modelos mentales son análogos estructurales del mundo, y las imágenes son modelos vistos desde un determinado punto de vista.*

Atendiendo a estas consideraciones, lo ideal sería que las representaciones mentales que formen nuestros alumnos fueran las de tipo *modelos*; porque al mismo tiempo les permitiría representaciones en forma de imágenes y proposicionales, y sobre todo les ayudaría a hacer generalizaciones referentes a un objeto matemático.

Algunas veces los alumnos memorizan la definición de función matemática, pero no la distinguen en una situación real; es decir, no reconocen si la relación establecida es una función matemática y en muchos casos confunden la definición. Sin embargo, pareciera que al momento de invocar sus representaciones mentales referente al estudio de las funciones matemáticas consideradas en el contenido del curso de Cálculo I, las representaciones más comunes son las expresiones de tipo algebraico.

## **Metodología para recolección y procesamiento de la información**

Tratando de profundizar un poco, referente a los planteamientos hechos por Johnson-Laird (1996), se trabajó con alumnos de un curso de Cálculo I para conocer sus representaciones mentales. La muestra intencional no probabilística fue de 29 alumnos inscritos para un curso de verano. Estos participantes fueron repitientes de la asignatura Cálculo I. El estudio es de tipo cualitativo y en cuanto a su estructura diacrónica es descriptiva explicativa. El instrumento para recoger información fue un cuestionario, el cual consistió en una pre prueba y post prueba sobre funciones. El análisis e interpretación de la información recogida fue estudiando categorías correspondientes a las teorías de Representaciones y Campos Conceptuales, (León I. y Montero O., 2003).

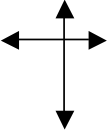
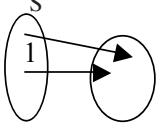
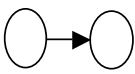
**Recolección de la información.** En este estudio de caso, se aplicó una prueba diagnóstica al inicio del semestre a un curso de repitientes de la asignatura Cálculo I, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia, con el fin de identificar y caracterizar los conocimientos previos referentes a lo que los participantes entendían por función y que podían expresarlo textualmente o a través de representación gráfica. La prueba, también, comprendía aproximar la gráfica de 3 funciones. Estas eran una lineal, una cuadrática y una racional; es decir, se les presentaban varias *situaciones* como son en este caso el dominio de la definición y el trazado de distintas gráficas (Vergnaud, 1990). Al finalizar el semestre se les aplicó la misma prueba para conocer si habían variado o no sus representaciones externas del concepto de función y del mismo modo identificar a través de diversas *situaciones* cuáles eran las deficiencias más comunes en el manejo de dicho Campo Conceptual.

## **Representaciones de funciones matemáticas en cursos de Cálculo I**

Las respuestas sobre representaciones proposicionales: noción de relación entre números, conjunto de imágenes, no fueron evidenciadas en la pre prueba, pero sí se evidenciaron en la post prueba (ver cuadros 1 y 2).

Tratando de explorar sobre los resultados obtenidos en este estudio, si se comparan los mismos con la teoría de Johnson-Laird (1996) sobre las representaciones mentales, se nota que en los resultados de la prueba diagnóstica (pre prueba), nueve alumnos (31,03%) muestran representaciones de tipo imágenes. Estas son representaciones mentales de tipo analógico, las cuales expresan las formas de ver y captar detalles y aspectos más relevantes del objeto que se estudia. De acuerdo con Sfard (1991), las concepciones estructurales que son las que mejor contribuyen a los procesos cognitivos de solución de problemas, se basan en representaciones de imágenes visuales, de ahí la importancia de que los alumnos desarrollen este tipo de representaciones.

**Cuadro 1**  
**Resultados Pre Prueba**

Nº	Representación	Tipo representación	Noción	Fr y (%)
9 14 15 16 18 25		Proposicional “ “ “ “	Valores en un sistema de coordenadas	6 (20,69%)
1 2 11 12 13 17 23	$ax + by = k$	Proposicional Analogico Proposicional “ “ “ “	Una ecuación, o representación de ecuación	7 (24,13%)
3 6 7 8 19 20 21 22 24 28	A B  S 	Proposicional “ Proposicional Analogico “ “ “ Proposicional Analogico	Relación entre los elementos de un conjunto	10 (34,48%)
4		Proposicional	Relación entre conjuntos	1 (3,44%)
	$2 \longleftrightarrow 5$		Relación entre números	(0%)
26 29	$X \longleftrightarrow Y$	Proposicional “	Relación entre variables	2 (6,90%)
	$\{ \text{*****} \}$		Conjunto de imágenes	(0%)
5 10	EJ	Proposicional “	Casos particulares, pero no generaliza la definición.	2 (6,89%)
27		Proposicional	No responde	1 (3,44%)

**Fuente:** Cuestionarios aplicados a muestra intencional no probabilística

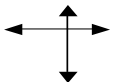
Estos alumnos expresaron la idea que tienen sobre funciones mediante un gráfico acompañado algunas veces con comentarios. Según esta teoría, las **imágenes** comparten las propiedades o atributos de los modelos, pero vienen a ser únicamente las partes “visuales” de ellos y representan aspectos perceptibles de los objetos del mundo real.

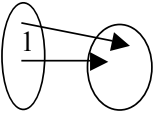
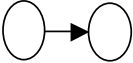
Así mismo se observó que 20 alumnos, es decir, el 68,97%, usaron representaciones mentales proposicionales. Las representaciones proposicionales para Johnson-Laird son una representación mental que puede ser expresada verbalmente a través de una cadena de símbolos, es decir, son aquellas que se basan en el manejo verbal, relaciones matemáticas y fórmulas. Pareciera que los alumnos de estos cursos no poseen invariantes, sólo hacen uso de su memoria para aprender fórmulas y relaciones matemáticas.

Al analizar los resultados del pos-test, sólo siete alumnos de un total de 29, esto es el 24,4%, usaron representaciones de tipo imágenes; el resto, es decir, 22 alumnos (75,86%), usaron representaciones externas tipo proposicionales. Para la noción de relación entre elementos de un conjunto se obtuvo la mayor cantidad de representaciones de tipo analógicas visuales, tanto para la pre prueba como para la post prueba.

Resulta interesante destacar que en ambas pruebas el tipo predominante de representaciones fueron en su mayoría las proposicionales, que si bien son necesarias, no son suficientes para lograr concepciones estructurales de un objeto matemático. Del mismo modo, pocos alumnos demostraron tener representaciones proposicionales y analógicas para el concepto función matemática de una variable. Si se relaciona este hecho con la teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, se puede inferir que no existe una coordinación integrada del concepto y sus propiedades; situación que hace deficiente la formación de distintas representaciones para un mismo objeto.

**Cuadro 2**  
**Resultados Pos Prueba**

Nº	Representación	Tipo representación	Noción	Fr y (%)
15 16 18		Proposicional “ “	Valores en un sistema de coordenadas	<b>3</b> <b>(10,34%)</b>

1 10 11 23 24	$ax + by = k$	<b>Proposicional</b> “ “ “ “	Una ecuación, o representación de ecuación	<b>5</b> (17,24%)
2 3 6 8 12 13 14 17 19 20 21 22 27 28 29	A B 	<b>Analógico</b> “ “ <b>Proposicional</b> <b>Analógico</b> <b>Analógico</b> <b>Proposicional</b> <b>Analógico</b> <b>Proposicional</b> “ “ “ “ <b>Analógico</b>	Relación entre los elementos de un conjunto	<b>15</b> (51,72%)
4		<b>Proposicional</b>	Relación entre conjuntos	<b>1</b> (3,44%)
5	2 $\longleftrightarrow$ 5	<b>Proposicional</b>	Relación entre números	<b>1</b> (3,44%)
9	X $\longleftrightarrow$ Y	<b>Proposicional</b>	Relación entre variables	<b>1</b> (3,44%)
7 26	$\left[ \begin{array}{c} \text{*****} \\ \text{*****} \\ \text{*****} \end{array} \right\}$	<b>Proposicional</b> “	Conjunto de imágenes	<b>2</b> (6,90%)
25	EJ	<b>Proposicional</b>	Casos particulares, pero no generaliza la definición.	<b>1</b> (3,44%)
			No responde	<b>(0%)</b>

**Fuente:** Cuestionarios aplicados a muestra no probabilística

La poca representación visual y analógica, en este grupo de alumnos, confirma sus dificultades para resolver problemas. Es importante resaltar que



los alumnos no demostraron tener representaciones mentales tipo modelos; es decir, aquellas que permiten a los individuos hacer inferencias y predicciones, representar un estado de cosas o hechos reales o imaginarios. Los modelos representan un cuerpo de conocimientos, cuya estructura no es arbitraria, sino que debe corresponder a la estructura de la situación que representa. De estos resultados se infiere que los alumnos al tener sólo representaciones mentales del tipo proposicional o analógico, sin llegar a las representaciones tipo modelos, difícilmente podrán tener bases suficientes para lograr verdaderos aprendizajes ni hacer transferencias de los mismos.

En relación al trazado de gráficas de funciones se observó, en la mayoría de los casos, inconsistencias en la ubicación de los puntos de cortes con los ejes de coordenadas, confundieron la gráfica de la función racional con la gráfica de la función  $Y = \sqrt{x}$ . En algunos casos graficaron la función lineal como una línea perpendicular al eje horizontal o eje X; lo que contradice el concepto de función.

De acuerdo con la teoría de los Campos Conceptuales, esas deficiencias en las representaciones se deben a la escasa conexión existente entre situaciones, contenidos, conceptos de naturalezas distintas, estructuras, procedimientos y operaciones. Dicho de otra forma, los alumnos ante una situación presentada no logran establecer las conexiones necesarias o pertinentes entre sus estructuras cognitivas, los procedimientos adecuados, las operaciones y propiedades necesarias, y los distintos conceptos relacionados con el objeto matemático para poder enfrentar la situación.

Los resultados obtenidos con este grupo de estudiantes es muy parecido a los obtenidos por Greca y Moreira (2000), es decir, la tendencia es a no formar modelos. Para el caso del grupo de Greca y Moreira los alumnos no fueron capaces de integrar el concepto de campo electromagnético, se ocuparon sólo por buscar la fórmula para resolver problemas sin establecer relaciones significativas para visualizar toda la situación y al finalizar el curso vuelven a tomar la misma imagen de campo electromagnético que tenían al inicio. En el caso particular de los estudiantes de ingeniería de la Universidad del Zulia, la mayoría mantuvieron el mismo tipo de representación en ambas pruebas.

Otro caso del estudio sobre representaciones matemáticas con resultados muy parecidos al mostrado en este artículo fue el realizado por Miguel Campos y Juan Estrada (1999) en México. Estos investigadores señalan que

los alumnos de su muestra siguen una estrategia fundamentalmente de tipo algorítmica, tienen un limitado número de representaciones matemáticas, sin una noción clara de variable y de relaciones funcionales.

La investigación realizada en Argentina, por María Rita Otero y cols. (2000), muestra que existen sujetos con un modelo mental, el cual ejecutan en la resolución del problema; mientras otros recurren al planteo meramente algebraico. En otras palabras, se comprobó que al resolver un problema, el cual admitía una solución algebraica estrictamente proposicional, los alumnos prefieren emplear estrategias más laboriosas desde el punto de vista del Cálculo Matemático.

El proyecto de investigación *Dominio de funciones matemáticas en estudiantes de ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello*, realizado en Venezuela por Liliana Lupo (2005), muestra resultados muy parecidos a los participantes de la muestra del presente informe. *Las respuestas dadas por los estudiantes se manifestaron de manera aislada o simultáneamente, falta de atención en las lecturas y poca relación entre la realidad y las situaciones planteadas en las preguntas.* Posiblemente las respuestas señalen errores en la interpretación de los términos “antecedente” y “par ordenado”. Algunos alumnos reportan no recordar el concepto de biyección y otros lo confunden con el concepto de función. Esta última es notable y se evidencia en las justificaciones dadas a las preguntas abiertas. Los estudiantes no conciben la biyección dentro del concepto de función y los esquemas de biyecciones son más fáciles de reproducir que los de las funciones no biyectivas. Es importante notar, a nivel gráfico, que la biyección parece ser un concepto más fácil que el de función, para estos alumnos. Para ellos justificar, en el caso de una relación dada, si ésta es una función biyectiva es menos complicado que explicar si es una función e inclusive justificar si es una biyección. Un porcentaje significativo de estos alumnos responden correctamente a las preguntas, pero la justificación está cargada de errores, evidenciando dificultades para expresarse y confusiones en las definiciones. Estos resultados evidencian un dominio de representaciones proposicionales (semánticas) sobre las analógicas y los modelos, es decir, al no poseer un cúmulo adecuado de representaciones de este último tipo sus aprendizajes no logran consolidarse adecuadamente y presentan confusiones.

## Conclusiones y recomendaciones

Como se afirmó al inicio del informe el objetivo fundamental fue determinar la interpretación cognitiva del conocimiento matemático referente al concepto de función matemática de una variable, en una muestra no probabilística para cursos de Cálculo I en la facultad de Ingeniería de la Universidad del Zulia; todo esto con la finalidad de obtener información que servirá para innovar las estrategias de los programas de enseñanza de la matemática en la Educación Superior.

Durante la ejecución de esta actividad se obtuvo una gama de representaciones con diversos rangos de calidad y niveles de estructuración; con lo cual se confirmó:

- De acuerdo con el análisis hecho a las respuestas emitidas por los alumnos, las concepciones acerca del concepto de función se pudieron ubicar en 8 grupos o categorías, como se muestran en la tabla 2, es decir como: *Valores en un sistema de coordenadas, una ecuación o representación de ecuación, relación entre los elementos de un conjunto, relación entre conjuntos, relación entre números, relación entre variables, conjunto de imágenes y los expresados a través de ejemplos.*
- La importancia de conocer las representaciones mentales y las concepciones de los alumnos; porque ayuda a considerar sus diferencias individuales al momento de planificar actividades didácticas. El aprendizaje constituye un acto especial e individual, porque es en ese proceso donde el educando personaliza los conocimientos que recibe y logra un desarrollo efectivo y afectivo de su individualidad. Este proceso de enseñanza aprendizaje es un acto creador, tanto para el docente como para el alumno, por lo tanto no debe esquematizarse ni alterar su propia esencia.
- Para las dos pruebas, la ausencia en los alumnos de representaciones mentales modelos, es decir, aquellas que permiten a los individuos hacer inferencias y predicciones, representar un estado de cosas o hechos reales o imaginarios. De éstos se infiere que los alumnos al tener sólo representaciones mentales del tipo proposicional o analógico, sin llegar a las representaciones tipo modelos, difícilmente podrán

tener bases suficientes para lograr verdaderos aprendizajes, ni mucho menos hacer transferencias de aprendizajes.

- Para los docentes la necesidad de procurar conocer las concepciones y las representaciones mentales de sus alumnos, si quieren lograr aprendizajes verdaderamente significativos en estos últimos.

Debido a que esas concepciones y representaciones no son producto del azar, por el contrario están estrechamente relacionadas con las vivencias, los conocimientos y características, capacidades y modos de pensar de los estudiantes, se sugiere:

- A los docentes, innovar las estrategias planteadas. Estos deben considerar diferentes *situaciones* sobre un mismo objeto matemático para garantizar un aprendizaje integral y más significativo en los participantes de los cursos.
- Prioridad en el diseño de estrategias para establecer el puente o conexión entre las representaciones mentales de los estudiantes y las representaciones que lleve al logro del conocimiento institucionalizado.

## Referencias Bibliográficas

- CAMPOS, Miguel y ESTRADA, Juan (1999), Representaciones matemáticas de estudiantes pre universitarios en la resolución de problemas de optimización. **Revista Educación Matemática**. Vol. 12, Núm. 3. 35-51 pp.
- DREYFUS, Tommy (1991), **Advanced mathematical thinking processes**. En D Tall, advanced. mathematical thinking, Netherlans: Kluwer Academic Publishers, pp. 24-41.
- FLORES, Crisólogo; ALARCÓN, Gabriel y ALBARRÁN, Delia (2002), Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento, caso de la velocidad y la trayectoria. **RELIME**, vol. 5, núm. 3, pp. 225-250.
- GODINO, Juan y BATANERO, Carmen (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Vol. 14, 325-355 pp.

\_\_\_\_\_ (1995). **Marcos teóricos de referencia sobre cognición matemática.** Documento en línea de trabajo del curso de doctorado “Teoría de la Educación Matemática”, en <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

GONZÁLEZ, María T. y MARTÍN, Ernesto (2004), **Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas.** Universidad de Salamanca. En línea:  
<http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77teresa-gonzalez2>

GRECA, Ileana y MOREIRA, Marco A. (1996), Un estudio piloto sobre representaciones mentales, imágenes, proposiciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnético. **Investigações em Ensino de Ciências** – V1(1), pp. 95-108, 1996.

\_\_\_\_\_ (2000), **Estudio sobre representaciones mentales, imágenes, proposiciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnético.** *Revista investigações em ensino de ciencias* Porto Alegre. Vol. 1 pp. 95-108.

\_\_\_\_\_ (2002), Modelos Mentales y modelos conceptuales en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências.** Vol. 2 N° 3. Porto Alegre. 1-8 pp.

HERNÁNDEZ, Ana I. (2005), El rendimiento académico de las matemáticas en alumnos universitarios. **Encuentro Educativo** Vol. 12(1) enero-abril, pp. 9 – 30.

HIEBERT, James y CARPENTER, Thomas P. (1992), **Learning and teaching with understanding**, en D. A. Grouws (ed) *Handbook of research in mathematics thinking and learning*, pp. 65-97.

JANVIER, Claude (1978), **The interpretation of complex Cartesian graphs.** Doctoral dissertation, University of Nottingham Wetherby.

JOHNSON-LAIRD, Philip (1996), **El ordenador y la mente.** Ed. Paidós, 1era ed. en español, Barcelona, 407 pp.

LEÓN, Orfelio y MONTERO, Ignacio (2003), **Métodos de Investigación.** Ed. McGraw-Hill, Madrid, 3ed., 545 pp.

- LUPO, Liliana (2005), Dominio de funciones matemáticas en estudiantes de ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello. **Orbis**, vol. 1, núm. 2, nov.
- MANTICA, Ana M.; MORIENA, Susana y SAUCEDO, Gladys (1999), **Importancia de las representaciones en la adquisición del concepto de función**. Escrituras, num1, pp 97-110. En línea: [www.bnm.me.gov.ar/e-recursos/hemeroteca\\_digital/.../452.pdf](http://www.bnm.me.gov.ar/e-recursos/hemeroteca_digital/.../452.pdf)
- MOREIRA, Marco A. (2002), **La teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área**. Porto Alegre. Documento en línea. <http://www.if.ugrgs.br/ienci>.
- OTERO, María R. *et al.* (1998), Las representaciones mentales y la resolución de problemas. **Revista investigações em ensino de ciencias**, Vol. 3, pp. 47-60.
- RICO, Luis (2000), **Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática**. Universidad de Granada, pp. 219-231.
- SFARD, Anna (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. **Educational Studies in Mathematics** 22, 1-36.
- VERGNAUD, Gerard (1983), **Multiplicative structures**. In Lesh, R. and Landauu, M.(eds) *Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes*. NewYork Academis Press Inc. pp. 127-174.
- VERGNAUD, Gerard (1990), Teoría de los Campos Conceptuales. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Vol. 10, núm. 2,3, pp. 133-170.