

# Producción multimodal de signos en la apropiación de relaciones entre función y derivada

*Eliud Quintero, Patricia Salinas*

*Tecnológico de Monterrey (México) eliudquintero@itesm.mx,  
npsalinas@itesm.mx*

## Resumen

Se presenta un estudio sobre la manera en la que resultan importantes los recursos lingüísticos y extralingüísticos para el surgimiento de resultados matemáticos fundamentales en un curso de Cálculo. Se diseña un ambiente didáctico mediado por el software SimCalc, en el que se abordan consecuencias gráficas del Teorema Fundamental del Cálculo, interpretadas en el contexto del movimiento rectilíneo. Se emplea un método mixto de investigación para realizar un análisis de habla y gestos que evidencia el proceso de apropiación por parte de los estudiantes. Se diseña y aplica un instrumento de evaluación para valorar la transferencia de dicha apropiación.

**Palabras clave:** Producción multimodal de signos, gestos, Cálculo, método mixto, mediación.

# Multimodal Production of Signs in the Appropriation of Relations Between a Function and its Derivative

## Abstract

A study is presented on the way in which linguistic and extra-linguistic resources are important for the emergence of fundamental mathematical results on a Calculus course. An educational environment is designed mediated by the SimCalc software, which addresses graphical results of the Fundamental Theorem of Calculus through the context of linear motion. A mixed research method is used to develop an analysis of speech and gestures to show the process of appropriation by the students. An assessment instrument is designed and implemented in order to evaluate the transfer of such appropriation.

**Keywords:** Multimodal production of signs, gestures, Calculus, mixed method, mediation.

## 1. INTRODUCCIÓN

Durante décadas las instituciones educativas han incorporado infraestructura tecnológica en sus aulas con la intención específica de apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje. Ello ha motivado el surgimiento de diversas investigaciones, generalmente tratando de determinar si la incorporación de la tecnología tiene un efecto positivo en el aprendizaje. Sin embargo, mientras que se han dedicado constantes esfuerzos en identificar y medir los logros de los alumnos en términos de rendimiento, la práctica común ha sido replicar con mejores herramientas tecnológicas aquello que se hacía sin ellas.

La presente investigación expone un estudio que indaga sobre la integración didáctica de un recurso tecnológico, creado explícitamente para el aprendizaje de resultados matemáticos fundamentales sobre el Cálculo. Su inclusión y efecto en el aula de matemáticas, se analiza bajo la perspectiva de que las herramientas tecnológicas proveen de nuevas formas de simbolizar, y con ello, de representar al conocimiento matemático. Las tecnologías educativas impactan y modifican el ambiente didáctico, pues

transforman sustancialmente el tipo de interacción que los estudiantes y profesor tienen con el contenido matemático en consideración.

### **1.1. El habla y los gestos en la actividad matemática**

Las modificaciones sugeridas por la intervención de la tecnología digital en el aula de matemáticas, deben incorporar en su análisis las formas en las que la apropiación de significados matemáticos son evidenciados. Una tendencia en la investigación actual señala relevante mirar aquellas formas de expresión que emplean los estudiantes para manifestar la apropiación del contenido matemático. El presente estudio atiende la necesidad de indagar el rol que juegan los gestos en el proceso de apropiación de las nociones de interés, y aprovechar esta ventana a las ideas de los estudiantes que muchas veces no se observa manifiesta en la comunicación verbal.

De acuerdo con Arzarello (2006), se ha descubierto que los gestos están fuertemente ligados al habla, sustentando que debería considerarse al gesto y al habla como un solo proceso mental subyacente. Para Goldin-Meadow (1999), los gestos pueden servir como una herramienta de investigación, ofreciendo luz sobre los pensamientos no verbalizados de los hablantes. Puesto que los gestos residen en herramientas representacionales distintas del habla, y no están dictadas por los mismos estándares de forma, tienen el potencial de ofrecer una visión diferente del pensamiento del hablante.

### **1.2. Un acercamiento significativo al Cálculo mediado por tecnología educativa**

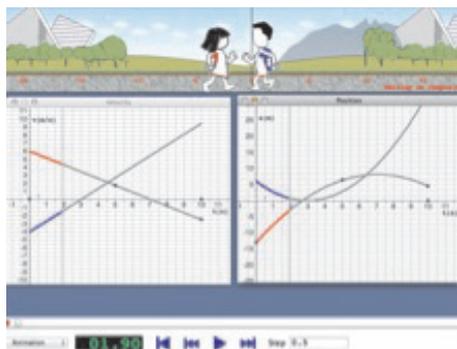
La manera en la que se concibe la práctica matemática influye sobre su enseñanza. En particular, la enseñanza aprendizaje de nociones y resultados fundamentales del Cálculo han estado vinculados a la ejercitación del cálculo de derivadas e integrales desde un punto de vista algebraico. Tradicionalmente, una manera de dotar de significado a estos conceptos, se realiza mediante la representación geométrica (curva) de una función. La pendiente de la recta tangente en un punto específico de la curva y el área bajo la curva entre dos rectas verticales dadas son, respectivamente, las interpretaciones geométricas para la derivada y la integral. Estas interpretaciones son independientes entre sí, y se abordan en cursos diferentes.

Sin embargo, una vez que llega el momento de explicar el Teorema Fundamental del Cálculo, se recurre a la representación algebraica para establecer la conexión entre los conceptos, poniendo de manifiesto el efecto algebraico inverso al derivar e integrar una expresión. Resulta fácil establecer esta relación bidireccional en la representación algebraica y ejercitar con los estudiantes el cálculo de derivadas e integrales. Pero con esta mecánica algebraica se ha dejado de lado la interpretación geométrica que fue presentada en los libros y que motivó la aparición de estos conceptos de manera independiente, sin relación clara entre ellos.

Atendiendo esta problemática, Salinas, Alanís y Pulido (2011) abordan y proponen un acercamiento a la enseñanza del Cálculo donde las nociones de derivada e integral aparezcan simultáneamente como lo plantea el Teorema Fundamental del Cálculo. El propósito de esta propuesta, ha sido dotar de significado real a nociones fundamentales de esta área de las matemáticas en su enseñanza y aprendizaje. De esta manera, se ha ofrecido a los estudiantes apoyar su pensamiento en una práctica útil en cualquier contexto real. Se trata de la práctica de predicción del valor de una magnitud que está cambiando. Con ella surge la necesidad de construir objetos matemáticos (funciones, ecuaciones, gráficas, etc.) para dar respuesta a preguntas planteadas en contextos reales.

Es así que la práctica docente y de investigación relacionada con la enseñanza-aprendizaje del Cálculo, planteó la relevancia por integrar, didáctica y curricularmente, un recurso tecnológico compatible con el nuevo acercamiento en el presente trabajo. SimCalc MathWorlds© (de aquí en adelante SimCalc) es un software transformativo en términos de su potencial para modificar no sólo el cómo enseñar o aprender matemáticas, sino el qué de las matemáticas puede ser aprendido (Noss et al., 2009). A través del escenario de movimiento rectilíneo y con apoyo de una simulación, SimCalc ofrece una imagen global de las nociones de derivada, interpretada como la velocidad, y de antiderivada (o integral), interpretada como la posición.

La Figura 1 muestra una interfaz gráfica de SimCalc, en ella se observan dos personajes moviéndose en sentidos opuestos sobre una línea recta en un mundo de dibujo animado. Abajo aparecen dos gráficas dinámicamente vinculadas; a la izquierda una gráfica de velocidad para cada personaje y a la derecha sus correspondientes gráficas de posición.



**Figura 1. Interfaz gráfica de SimCalc.**

La idea fundamental que motivó la creación de SimCalc fue fomentar y enriquecer las matemáticas del Álgebra y Cálculo, y simultáneamente dar a los estudiantes acceso a conceptos críticamente importantes con un acercamiento temprano (D'Ambrosio, 2013). De acuerdo con Burke, Hegedus y Robidoux (2013), el equipo de diseño de SimCalc (incluyendo investigadores, desarrolladores de software y profesores) buscó no sólo mejorar el currículum escolar existente, sino también transformarlo con actividades que no serían posibles sin el uso de la tecnología. Uno de los elementos centrales en el diseño de la interfaz de SimCalc reside en su infraestructura de representación, misma que permite observar diferentes perspectivas de una función a través de distintos registros de representación (gráfico, algebraico, tabular) dinámicamente vinculados, de tal forma que los cambios realizados en una función son reflejados en todas sus representaciones.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El sustento teórico de este estudio se apoya en la teoría sociocultural de Vygotsky, particularmente en la relación mutuamente formadora entre usuario y herramienta (estudiante y software), enfatizando el rol del ambiente en el que la herramienta está siendo usada (aula de matemáticas). De acuerdo con Vygotsky (1978), los sujetos se valen de los recursos del entorno (herramientas) para extender la operación de la memoria más allá de las dimensiones biológicas e incorporan estímulos externos o autogenerados denominados *signos*. De tal manera que acciones relativamente simples

como atar un nudo o marcar señales en un palo, modifican la estructura interna de la memoria al ser empleadas para ayudar a recordar.

Vygotsky llamó *función psicológica superior* a la combinación de una herramienta y un signo en la actividad psicológica de las personas, y al proceso de reconstrucción interna de una operación externa le llamó *internalización*. Es así que un proceso inicialmente interpersonal se vuelve intrapersonal o dicho de otra forma, esto implica una reconstrucción de las funciones del desarrollo cultural, primero a nivel social (interpsicológico) para dar paso al nivel individual (intrapicológico). En este contexto, Pozo (2006) entiende los *instrumentos mediadores* como aquellos instrumentos que transforman la realidad en lugar de imitarla. Agrega que la función de éstos, reside en modificar las condiciones del ambiente activamente en lugar de adaptarse a ellas pasivamente.

No obstante, uno de los conceptos de la teoría de Vygotsky que ha sido ampliamente analizado y causa de debates profundos es precisamente la noción de internalización, atendiendo principalmente a la confusa dualidad de lo interno y lo externo. Wertsch (1998) y

Rogoff (1993), coinciden en que el problema de hacer explícito el proceso de internalización resultaría útil sólo en el caso en el que se priorice el funcionamiento interno individual, delegando toda responsabilidad a lo interno de llevar *algo a través de una barrera*. Rogoff, por su parte, afirma que los sujetos se apropian de algunos aspectos de la actividad en la que ellos están implicados activamente y por tanto, lo que se practica en la interacción social no está en el exterior de una barrera y no hay necesidad de recurrir a un proceso separado de internalización.

Es así que la noción de *apropiación* resulta relevante para describir el proceso mediante el cual los estudiantes en interacción con SimCalc y el ambiente, potencialmente construyen significados matemáticos durante la actividad propuesta. Hegedus y Moreno – Armella (2010) reconocen en este proceso, un acuerdo con las partes constituyentes de la *génesis instrumental* (Vérillon & Rabardel, 1995), y pugnan por adecuar la noción de *co-acción* dentro de la nueva perspectiva, mediante una noción simétrica, que enfatice la importancia del rol del ambiente en el cual la herramienta está siendo usada y atiende el proceso dialéctico entre usuario, herramienta y ambiente. La noción de *co-acción* describe cómo el usuario de un ambiente dinámico guía las acciones sobre el ambiente y a su vez es guiado por el ambiente como una actividad fluida.

Para Moreno – Armella y Hegedus (2009) los estudiantes no esperan pasivamente a ser definidos por el ambiente de un aprendizaje situado, sino que a través de la co-acción pueden ascender en una actividad matemática bien estructurada. Sin embargo, se debe precisar que aunque el medio puede potencialmente provocar el surgimiento de significados, el medio per se no es suficiente para cumplir con este propósito. Es la acción y la observación sobre aquello que varía o que es invariante en las exploraciones con el medio lo que crea la efectividad de la co-acción entre el aprendiz y el ambiente. Por su parte, Noss y Hoyles (2004) acuñan el término *prueba situada* para describir el resultado de una exploración sistemática realizada dentro de un ambiente computacional con la finalidad de probar relaciones matemáticas.

Las ideas antes expuestas discuten la perspectiva bajo la cual se estudia la interacción dinámica y bidireccional entre el usuario y el medio. Ahora bien, a través de la noción de *producción multimodal de signos*, se presenta a continuación la manera en la que los estudiantes evidencian esa apropiación de resultados matemáticos fundamentales en un medio con estas características,

Arzarello, Paola, Robutti y Sabena (2008) explican que los diferentes recursos lingüísticos y extralingüísticos que emplean los estudiantes, con las acciones y producciones que apoyan, son importantes para el surgimiento de las ideas matemáticas, y de hecho son útiles para tender un puente entre la experiencia del mundo y las matemáticas más formales. De acuerdo con estos investigadores, el *paradigma de la multimodalidad* sostiene que el sistema sensorio - motor del cerebro es multimodal en lugar de modular. Esto implica que el lenguaje usa varias modalidades relacionadas mutuamente, como la vista, la audición, el tacto, las acciones motoras, etc.

Así, el profesor puede usar los gestos como herramientas de comunicación de forma consciente; mientras que los gestos pueden jugar este rol también para los estudiantes, incluso de manera menos consciente. Los gestos permiten formas alternativas para representar y organizar información que los estudiantes no son capaces de expresar en formas puramente formales o verbales. Estos recursos permiten al profesor lograr una comunicación más accesible para los estudiantes y análogamente permiten a los estudiantes arribar al lenguaje del profesor, y a través de ello aproximarse al significado institucional. Sin embargo, la función de

los gestos no es sólo ayudar a acceder al problema, sino crear situaciones del discurso cuyo contenido sea accesible para todos en el grupo.

### **3. MÉTODO**

#### **3.1. Marco Contextual**

La investigación que aquí se describe, tiene lugar en una Universidad privada del norte de México. Se opta por invitar como participantes a estudiantes que cursan la materia de Matemáticas I para ingeniería (primer curso de Cálculo), puesto que esta asignatura forma parte de los cursos de rediseño en la institución, y en ella se cubren los temas que son de interés para este estudio. En la investigación participan tres grupos de estudiantes, obteniendo así un total de 65 participantes. Las condiciones del aula que alberga la investigación, son favorables en términos de la presencia de diversos recursos tecnológicos, que facilitan el desarrollo de la planeación e implementación de actividades. La Figura 2 muestra una imagen del aula.



**Figura 2. El aula y elementos de su infraestructura.**

#### **3.2. Método mixto de investigación**

En el estudio se recurre a un método mixto de investigación. Por una parte, se emplea una fase cualitativa para evidenciar los procesos de apropiación por los estudiantes cuando interactúan con el software, así como observar la trayectoria hacia el establecimiento de generalizaciones respecto al contenido matemático en juego. Por otra parte, la fase cuantitativa del estudio, contempla el diseño, elaboración, aplicación y

análisis de un instrumento de evaluación. Dicho instrumento se emplea con el propósito de valorar el reconocimiento y aplicación de las relaciones gráficas en otros contextos reales, distintos al contexto de movimiento que originalmente el software provee.

### **3.2.1. Fase cualitativa: Implementación de la secuencia didáctica con SimCalc**

La fase cualitativa del estudio se lleva a cabo en el contexto del aula. En ella, el hilo que guía las acciones es el desarrollo de una secuencia didáctica en la que se emplea el software SimCalc. Se trata del diseño de un conjunto de actividades dentro del ambiente de SimCalc, en el que se cubren temas relativos al *análisis cualitativo de funciones de segundo grado y su relación con funciones lineales*, esto desde el acercamiento propuesto por Salinas et al. (2012). Durante esta fase, se realiza una observación participante y se recurre a diversas fuentes de información que permiten evidenciar los procesos de apropiación por los estudiantes cuando interactúan con el software.

Al ir ascendiendo a través de una exploración guiada en el ambiente de SimCalc, se pretende que los estudiantes avancen desde la mera exploración, hacia el surgimiento de conjeturas, la confrontación de hipótesis y el establecimiento de relaciones gráficas entre las dos magnitudes presentes en el movimiento en línea recta: la posición y la velocidad. Las intenciones de los estudiantes pueden interpretarse como un proceso iterativo donde la actividad mediada por el ambiente de SimCalc funciona como una herramienta que apoya el proceso de simbolización de dichos resultados matemáticos.

Se pide a los estudiantes reunirse por parejas y trabajar con sus laptops en la actividad propuesta. Puesto que se tiene interés por estudiar y analizar las interacciones entre estudiantes y el ambiente del software, se considera una fuente esencial de información la videograbación que los propios estudiantes realicen de las pantallas de sus computadoras portátiles. Simultáneamente, se les solicita generar video grabaciones a través de las cámaras web de sus computadoras, para posteriormente realizar un análisis del habla y de la gestualidad en interacción (Fernández-Cárdenas, 2013). Se entrega a cada pareja de estudiantes, una hoja de trabajo con la intención de apoyar el establecimiento de los resultados matemáticos que van generando.

Durante la actividad, se promueve que los estudiantes concreten relaciones cualitativas entre función y derivada (en cuanto a signo, comportamiento de crecimiento o decrecimiento y tipo de concavidad) con el apoyo de SimCalc. La hoja de trabajo (ver Figura 3); consta de seis recuadros que contienen las palabras que deben ser relacionadas adecuadamente (positiva, negativa, creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo). Las palabras refieren a características de la gráfica de velocidad que implican o son implicadas por características de la gráfica de posición. De esta forma, se presentan dos columnas que contienen líneas y flechas entre ellas representando una doble implicación. Cada par de líneas con la flecha entre ellas representa un enunciado que debe ser construido con ayuda de las palabras de los recuadros debajo. No se explicita si deben usarse todas las palabras ni si éstas pueden repetirse, y es importante aclarar que un gráfico satisface varias de las palabras a la vez.

La gráfica de velocidad es...		La gráfica de posición es...
	↔	
	↔	
	↔	
	↔	
	↔	
	↔	

positiva

negativa

creciente

decreciente

cóncava hacia abajo

cóncava hacia arriba

**Figura 3. Hoja de trabajo que se entrega a los estudiantes.**

Las palabras *creciente* y *decreciente* deben ser usadas dos veces, tanto para caracterizar el comportamiento de la gráfica de velocidad, como para la gráfica de posición. Por otra parte, el signo (positivo / negativo) no es una característica relevante para la gráfica de posición en el establecimiento de estas relaciones, dado que no es una condición necesaria ni suficiente para caracterizar el comportamiento o signo de la gráfica de velocidad. Similarmente, el tipo de concavidad no puede ser asociado al comportamiento de la gráfica de velocidad (ciertamente porque una recta no posee concavidad). De esta manera, hay que coordinar dos tipos de información en la gráfica de velocidad (signo y comportamien-

to) que corresponden con dos tipos de información en la gráfica de posición (comportamiento y concavidad) respectivamente. Las relaciones cualitativas de interés entre la gráfica de velocidad (derivada) y la gráfica de posición (función) pueden resumirse en la Tabla 1.

**Tabla 1. Relaciones cualitativas entre la gráfica de velocidad y la gráfica de posición.**

Velocidad (derivada)	Posición (función)	Se abreviará
Positiva	Creciente	Relación I
Negativa	Decreciente	Relación II
Creciente	Cóncavo hacia arriba	Relación III
Decreciente	Cóncavo hacia abajo	Relación IV

Los participantes registran cada parte del proceso del establecimiento de estos resultados matemáticos a través de la video grabación de sus pantallas y de la cámara web de sus laptops. Una vez que cada pareja de estudiantes finaliza su actividad y la grabación de la misma, se le apoya para que genere un vínculo de acceso al video y sea colocado en un espacio previamente creado en una plataforma académica. Durante la actividad, docente e investigador se desplazan por el aula monitoreando el avance de los estudiantes y apoyando en contratiempos técnicos. Eventualmente se documenta la actividad que realizan los estudiantes a través de video grabaciones que se realizan en el aula.

El proceso de apropiación de relaciones cualitativas entre la gráfica de velocidad y la de posición, será evidenciado por el establecimiento de relaciones que se documentan en la hoja de trabajo. Sin embargo, dicho proceso de apropiación será analizado a detalle a través de las transcripciones de los videos generados por los estudiantes, haciendo uso del análisis del habla y de la gestualidad en interacción.

### **3.2.2. Fase cuantitativa: Diseño y aplicación del instrumento de evaluación**

Un par de sesiones posteriores a la implementación de la actividad mediada por SimCalc, se aplica el instrumento de evaluación. Dicho instrumento se diseña y valida previamente para ser aplicado en la misma fecha a los tres grupos escolares que participan en el estudio. Se controla

que cada estudiante responda el instrumento de forma individual en el tiempo regular de una sesión de clase.

A través de la aplicación de dicho instrumento, se busca valorar el impacto de la secuencia didáctica en los estudiantes. Para ello, se analizan las respuestas dadas a los reactivos que plantean situaciones gráficas o en contexto en las que se requiere de la aplicación de las relaciones cualitativas entre el gráfico de una magnitud y el gráfico de su razón de cambio. Por otra parte, mediante este recurso se pretende valorar la transferencia de dichas relaciones gráficas cuando el contexto en el que se presenta la situación no es el mismo contexto que el software proveyó, esto es, el del movimiento que realiza un objeto sobre una línea recta.

## **4. ANÁLISIS**

### **4.1. Cualitativo: Análisis del habla y de la gestualidad en interacción**

En esta fase se realiza un análisis de la producción multimodal de signos, de tal manera que ello permita observar trayectorias que emplean los participantes hacia el establecimiento de las generalizaciones matemáticas que están en juego. El material que provee cada equipo consiste de un video producido con su propia computadora y accesible a través de un vínculo generado por el software de producción. En ese video se graba la pantalla de su computadora con las acciones hechas en el software SimCalc a través del cursor, además de las caras y movimientos de los estudiantes mientras accionan el software y comentan sobre sus acciones. La producción de este material por cada equipo de participantes es la fuente principal para el análisis, es por ello que se decide analizar los 28 videos finalmente generados.

Se revisa, clasifica y codifica los videos cuya duración total de grabación es de 3 horas 23 minutos y 4 segundos. La clasificación realizada a este material permitió conformar los dominios y categorías de análisis. Posteriormente, se realiza una segunda revisión del material, teniendo en cuenta las categorías identificadas previamente y se eligen aquellos videos que resultan más reveladores e ilustrativos para efectos del objetivo del estudio.

A continuación se presenta un fragmento de la transcripción y análisis para uno de los videos seleccionados (se codificaron 103 turnos en total para esta transcripción), en él se analiza y discute la presencia de las

categorías identificadas. La transcripción corresponde al video generado por Erik y Fer durante la realización de la actividad. En el fragmento seleccionado en particular, los estudiantes se encuentran discutiendo sobre una relación de comportamiento en la gráfica de velocidad y tipo de concavidad en la gráfica de posición (relaciones III y IV de la Tabla 1).

En la transcripción, se enumeran los turnos y se alternan imágenes ilustrativas a momentos particulares de la interacción. Para cada imagen se muestra la interfaz gráfica de SimCalc, arriba se observa el personaje y el escenario de la recta en la que se mueve (la simulación), abajo las gráficas de velocidad (a la izquierda) y de posición (a la derecha) y en la esquina superior derecha, se aprecia la imagen obtenida a través de la cámara web. Las convenciones a seguir para la transcripción son como se enlista enseguida:

// pausa

[...] omisión de turnos

(acción corporal o gestual en *itálicas y paréntesis*)

#### 4.1.1. Transcripción

71. *Fer ahora hace que la velocidad tome valores negativos y cambia secuencialmente el comportamiento de la gráfica de creciente a decreciente en esa zona, SimCalc muestra dinámicamente una gráfica de posición decreciente que cambia de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (Figura 4).*

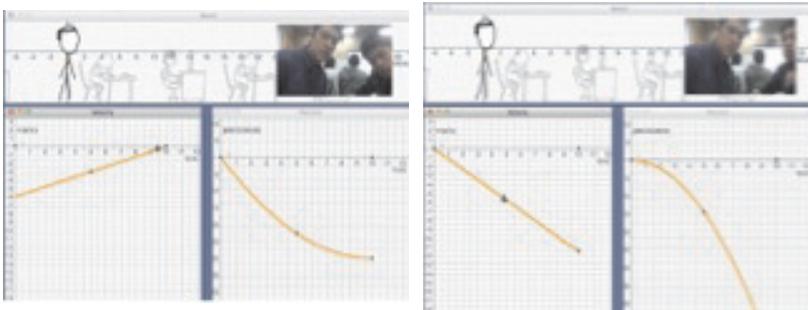


Figura 4. Co-acción del turno 71.

72. *Fer: Mira ahí es cóncava hacia arriba y acá es cóncava hacia abajo (ambos miran atentamente la pantalla).*

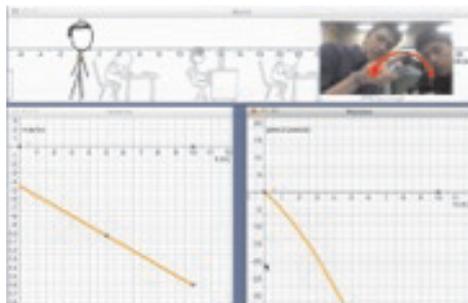
73. **Érik:** O sea ¿cuándo es decreciente es cóncava hacia abajo y cuando es creciente es cóncava hacia arriba? //

74. **Fer:** De negativo.

75. **Érik:** ¿Cómo?

[...]

78. **Fer:** Es una cóncava. Cóncava hacia abajo porque va así (*Fer dibuja en el aire con su mano una curva como en forma de "n" para representar una concavidad hacia abajo*, (Figura 5).



**Figura 5. Gesto dibujado en el aire por Fer en el turno 78.**

79. **Érik:** Entonces decreciente, velocidad decreciente es una cóncava hacia abajo.

80. **Fer:** Velocidad decreciente *negativa* es cóncava hacia abajo.

81. **Érik:** Pero nada más podemos usar una raya, ¿y de positiva?

[...]

88. **Fer** ahora modifica la gráfica de velocidad para mostrar una gráfica decreciente en la zona positiva, SimCalc presenta una gráfica creciente y cóncava hacia abajo (Figura 6).

89. **Érik:** Sigue siendo cóncava hacia abajo //

90. **Fer:** Cóncava hacia abajo, pero en los positivos.

91. **Érik:** Entonces decreciente *siempre* va a ser cóncava hacia abajo (*voltea a ver a Fer como esperando una respuesta*, Figura 7) //

#### 4.1.2. Análisis de la transcripción

En la asignación de roles, se acuerda implícitamente que Fer manipule directamente el ambiente del software mientras Érik escribe las re-



**Figura 6. Co-acción del turno 88.**



**Figura 7. Mirada de Érik esperando una respuesta de Fer en el turno 91.**

laciones encontradas. La identificación del establecimiento de relaciones cualitativas gráficas se indica como en la Tabla 1. En esta transcripción puede identificarse la presencia de las categorías de análisis: *condición general*, *negociación*, *gestos*, *co-acción*, *prueba situada*, *búsqueda de invariantes* y *orientación indagatoria*. Por *condición general*, entenderemos las situaciones en las que se discute la validez de las relaciones en lo general, es decir, mayormente interviene la búsqueda de invariantes y se discuten contraejemplos posibles. Mientras que definimos *actitud indagatoria* como una orientación hacia la actividad caracterizada por ser mayormente activa, iniciadora, por buscar saber más, explorar nuevas alternativas.

En el turno 71, Fer traslada la gráfica de velocidad de manera que tome valores negativos y una vez ahí modifica secuencialmente el comportamiento de creciente a decreciente. El ambiente de SimCalc muestra dinámicamente gráficas de posición decrecientes que cambian de ser cóncavas hacia arriba a cóncavas hacia abajo. El resultado de dicha *co-acción*,

permite mostrar la variación de la concavidad en la gráfica de posición dada la variación del crecimiento y decrecimiento en la gráfica de velocidad, cuando ésta se mantiene negativa. Es así que en el turno 72 Fer sugiere una *prueba situada* mientras continúan alterando el ambiente de SimCalc: “Mira ahí es cóncava hacia arriba y acá es cóncava hacia abajo”.

En ese momento ambos estudiantes miran atentamente la pantalla dando forma a una nueva conjetura, entonces Érik retoma la propuesta de Fer y plantea en el turno 73: “¿O sea, cuando [la gráfica de velocidad] es decreciente, [la gráfica de posición] es cóncava hacia abajo y cuando [la gráfica de velocidad] es creciente, [la gráfica de posición] es cóncava hacia arriba?”. En el posicionamiento secuencial del turno 74, Fer precisa: “De negativo”, pues ciertamente hasta entonces la presunta relación se ha generado por una *co-acción* en la que la velocidad sólo toma valores negativos.

En el turno 75, Érik pide a Fer explicar lo que quiso decir. El turno 78 muestra el empleo de un gesto por parte de Fer (dibujo en el aire con la mano), para describir las características de la gráfica de posición. Esta acción corporal es la manera de simbolizar una curva que le permite responder a Érik el cuestionamiento del turno 75. De hecho, el gesto producido no sólo le permite argumentar sino además externalizar una representación mental (“Cóncava hacia abajo porque va así”).

Los pares adyacentes 79 a 81 corresponden a una importante negociación por parte del equipo en la que se discute una *condición general* sobre la relación IV. Érik reitera en el turno 79 el establecimiento general de la relación: “Entonces decreciente, velocidad decreciente es una cóncava hacia abajo”. Pero, en el posicionamiento secuencial del turno 80, Fer enfatiza el hecho de que la relación ha sido explorada para el caso de velocidad negativa: “Velocidad decreciente *negativa* es cóncava hacia abajo”.

Esto es, en el turno 71 Fer varió el comportamiento de la gráfica de velocidad de creciente a decreciente pero sólo en la parte negativa, obteniendo gráficas de posición decrecientes que variaron de ser cóncavas hacia arriba a cóncavas hacia abajo. Érik apela al hecho de establecer una *condición general*, suponiendo que la relación debe mantenerse cuando la gráfica de velocidad es positiva. En el turno 81 Érik argumenta: “Pero sólo podemos usar una raya, ¿y de positiva?”, mostrando un *actitud indagatoria*. Érik se refiere a *la raya* del arreglo de la hoja de trabajo, ver Fig. 3. La frase de Érik motiva una nueva *co-acción* que invita a variar el

comportamiento de la gráfica de velocidad en la parte positiva, de manera análoga a lo que Fer realizó en la parte negativa del eje vertical, y de esta forma establecer una relación comportamiento – concavidad en lo general (en este caso, decrecimiento en la velocidad – concavidad hacia abajo en la posición).

Fer entonces recrea una gráfica de velocidad positiva decreciente (turno 88), al tiempo que se genera una gráfica de posición creciente y cóncava hacia abajo. En el turno 89, Érik identifica la condición *invariante* en la gráfica de posición: “Sigue siendo cóncava hacia abajo”. En el posicionamiento secuencial del turno 90, Fer precisa: “Cóncava hacia abajo, pero en los positivos”. En esta frase, Fer expone la validez de la *co-acción* en la zona positiva, como lo hiciera análogamente en los turnos 74 y 80 para el caso de velocidad negativa. Érik retoma la *negociación* que busca establecer la generalidad de la relación y plantea: “Entonces decreciente [la gráfica de velocidad], siempre va a ser cóncava hacia abajo [la gráfica de posición]”. Con este enunciado, Érik busca unificar los casos en los que se ha explorado la relación IV reconociendo como *invariante* la concavidad hacia abajo en la gráfica de posición pese a la variación en el signo de la velocidad, siempre y cuando ésta última se mantenga decreciente. En el turno 91, Érik voltea a ver a Fer en espera de respuesta. Mediante este *gesto* por parte de Érik, se pretende un acuerdo de aprobación que además ofrece a Fer un procedimiento general para realizar una nueva exploración sistemática.

En la última línea de la transcripción (turno 91), Fer se apropia de la estrategia empleada por Érik, luego de que éste último lo voltea a ver a la espera de la confirmación de una cualidad general para la gráfica de posición. Esto es, una vez que Fer participa en un procedimiento general para el establecimiento de la relación IV dirigido por Érik, este último plantea una estrategia de generalización al tiempo que mira la reacción de su compañero.

#### 4.2. Cuantitativo: Análisis del instrumento de evaluación

Algunos de los reactivos que conforman el instrumento están inspirados en el diseño de ítems aplicados en instrumentos de evaluación de gran escala para la evaluación del aprendizaje de Álgebra en el proyecto Scaling Up de SimCalc (Hegedus, Moreno-Armella, Dalton, Brookstein, & Tapper, 2013; Shechtman, Haertel, Roschelle, Knudsen, & Singleton, 2013). La concepción de reactivos toma forma a través del diseño de situaciones en contexto que se representan gráficamente, con la idea de integrar en el ins-

trumento una variedad de situaciones que den muestra del reconocimiento y aplicación de relaciones cualitativas entre el gráfico de la magnitud y el gráfico de su razón de cambio en varios contextos.

El instrumento de evaluación se aplica en papel, con un formato de *múltiple respuesta* de cinco opciones. Este tipo de formato admite más de una respuesta correcta para una pregunta planteada. Aunque se tiene más de una alternativa correcta para cada reactivo, las alternativas son independientes entre sí; es decir, elegir una opción en particular no condiciona la elección de alguna otra de las opciones.

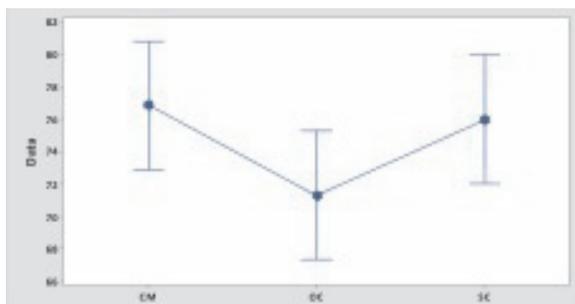
Se opta por asignar un puntaje parcial (20%) a cada una de las cinco alternativas de un reactivo en particular, cuando se elige una alternativa correcta y cuando no se elige una alternativa incorrecta; mientras que no se asigna puntaje cuando se escogen alternativas incorrectas o no se escogen alternativas correctas. La Tabla 2 muestra el puntaje asignado cada vez que se decide seleccionar o no una opción para un reactivo en particular.

**Tabla 2. Puntaje asignado al tipo de opción seleccionada para un reactivo en particular.**

Tipo de opción	Puntaje asignado a la elección de cada opción	
	¿Se selecciona?	
	Sí	No
Correcta	0.20	0.00
Incorrecta	0.00	0.20

El instrumento consta de 14 ítems, cada uno de los cuales se asocia a un tipo de contexto: Contexto de Movimiento (CM), Otros Contextos (OC) y Sin Contexto (SC). Los contextos adicionales considerados son: la variación del área de un terreno rectangular de perímetro fijo, el cambio en el nivel de agua en un tanque, el cambio en la temperatura de cierto material y la variación en el costo de producción de cierto artículo. Los reactivos del tipo SC presentan gráficas de función y correspondiente derivada (parábolas y rectas) sin un significado real asociado. Se determina el grado de confiabilidad del instrumento empleando el coeficiente alfa de Cronbach (Vogt, 2007), obteniendo un puntaje de 0.7514 (un puntaje mayor a 0.70 en una escala de 0 a 1 es considerado como aceptable).

La Figura 8 muestra los promedios obtenidos para cada tipo de contexto considerando a los participantes en su totalidad. Estos resultados ayudan a determinar si el tipo de contexto en el que se presenta un reactivo en particular influye sobre la manera en la que los estudiantes lo responden. Este hecho es relevante porque los resultados matemáticos de interés fueron presentadas a los estudiantes a través del contexto del movimiento rectilíneo, mientras que en el instrumento de evaluación se presentan magnitudes que están cambiando en una variedad de contextos reales. A pesar de que el contexto en el que se presenta la situación descrita en ciertos reactivos es distinto, el tipo de información necesaria para darles respuesta es esencialmente equivalente.



**Figura 8. Promedios por tipo de contexto considerando los grupos de participantes.**

Como puede observarse en la imagen, el promedio para la categoría contexto de movimiento es ligeramente mayor que el promedio para la categoría sin contexto; mientras que es evidentemente mayor que el promedio de la categoría otros contextos (76.88, 76.00 y 71.31 respectivamente). El análisis comparativo realizado a estas diferencias muestra que el promedio de la clasificación OC es significativamente menor que los promedios obtenidos para las categorías CM y SC. Por otra parte, el análisis de la diferencia entre las categorías CM y SC no resulta significativo.

Esta última información resulta importante en varios sentidos. Por una parte, puesto que el contexto de movimiento era un escenario familiar para los estudiantes no es casual que el promedio en esta categoría fuera mayor que en las otras. Por otra parte, el hecho de que los resultados de las categorías CM y SC sean equivalentes sugiere que las relaciones que los estudiantes establecieron en el contexto de movimiento fue-

ron reconocidas y aplicadas al responder los reactivos descontextualizados en el instrumento de evaluación. El contexto de movimiento que ofrece SimCalc parece proveerles de las relaciones entre la gráfica de velocidad y la gráfica de posición que pueden aplicar en reactivos que no hacen alusión a un contexto real, aún y cuando pudiera haberse anticipado que estos últimos exigen un grado de abstracción mayor.

Finalmente, la diferencia entre los promedios en las categorías CM y OC es importante. Esto sugiere que los contextos reales (distintos al contexto de movimiento) que describían situaciones en las que una cierta magnitud está cambiando, influyeron en el reconocimiento y aplicación de las relaciones cualitativas gráficas de las que se apropiaron en el contexto real del movimiento. Es decir, en la categoría OC no hay evidencia de la transferencia de las relaciones que pudieron haberse apropiado los estudiantes en la categoría CM como se sugiere para el caso de las categorías CM y SC (Herbert & Pierce, 2008).

## 5. RESULTADOS

### 5.1. Fase cualitativa

En términos generales, el análisis de la transcripción muestra que el lenguaje es usado como un andamiaje que apoya a resolver la actividad matemática planteada. El análisis realizado a la producción multimodal de signos, ayuda a explicar la forma en la que los sistemas simbólicos son empleados para enfrentar una actividad de tipo matemática, no sólo en su estructura como disciplina científica sino también desde el punto de vista de su apropiación (Arzarello, 2006). De esta manera, al observar a los estudiantes resolver un actividad trabajando en grupo, sus gestos, miradas y lenguaje corporal revelan recursos semióticos cruciales.

El análisis desarrollado en esta fase evidenció que la *co-acción* es un elemento esencial empleado para realizar *pruebas situadas* en el ambiente, a través de identificar una exploración sistemática que conlleva cierta intencionalidad. Esto implica que para que la retroalimentación dinámica que ofrece SimCalc cumpla su propósito, es crucial una *orientación indagatoria* hacia la actividad. El conocimiento matemático de interés está inmerso en el ambiente de SimCalc, pero es ahí donde los estudiantes deben buscar, discutir y reconstruir significados a través de la co-acción. Es así que las características de SimCalc y el fenómeno de

co-acción que en él tiene lugar juegan un rol valioso dentro de las conversaciones didácticas analizadas.

Esto en parte, puede ser explicado por el hecho de que las computadoras poseen una naturaleza dual, pudiendo ser vistas como máquinas (objetos) y a su vez pudiendo actuar como si fueran personas (sujetos) (Wegerif, 2004). De esta manera, se observa que al trabajar frente a una computadora, un grupo de estudiantes tienen una nueva opción: colocarse a un lado de la pantalla de la computadora y discutir su respuesta juntos. Esta opción está disponible porque la computadora es una máquina, y por tanto colocarla en segundo plano y hacerla esperar hasta llegar a un acuerdo de respuesta, es una forma que normalmente no sería apropiado con un compañero.

El análisis de la transcripción de Érik y Fer evidencia que gracias a la posibilidad de la interacción por pares es posible construir oportunidades de apropiación de ideas matemáticas a través de un medio esencialmente distinto (como ocurriera en los turnos 73-74, 79 y 91). Con el análisis de la interacción de este equipo, se muestra especialmente cómo cada participante tiene algo que decir en momentos cruciales de la resolución de la tarea. Un aspecto relevante presente en la actividad, es la forma en la que los estudiantes hablan y discuten resultados matemáticos sin ser explícitamente presentados por el profesor. Respecto a éste último, su rol se transforma; de ser el único y legítimo poseedor del conocimiento, ahora es un facilitador del conocimiento, un diseñador de experiencias de aprendizaje significativas y el responsable de legitimar los resultados que los estudiantes construyen y descubren en la actividad situada.

## **5.2. Fase cuantitativa**

Los resultados de la fase cuantitativa del estudio, mostraron que los estudiantes pudieron transferir las relaciones matemáticas abordadas en el contexto de movimiento en situaciones sin un contexto real asociado (en un terreno puramente matemático), aunque no ocurrió de la misma manera con situaciones en otros contextos reales. Esto es importante porque pese a que las relaciones abordadas en el contexto del movimiento no fueron transferidas de la misma manera a otros contextos, se sugiere su reconocimiento y aplicación en situaciones ajenas a un significado real asociado (con un nivel mayor de abstracción).

## 6. CONCLUSIÓN GENERAL

En esta investigación se muestra el aula de matemáticas como un ambiente de participación activo y colaborativo estimulado por el software. Este ambiente didáctico fue un espacio de interacción propicio para evidenciar la construcción de resultados matemáticos por parte de los estudiantes a través de una producción multimodal de signos, particularmente el habla y los gestos. En este proceso se revaloró un nuevo rol del profesor. La apropiación de ideas importantes del Cálculo fue propiciada a través de la mediación del recurso tecnológico de SimCalc. En la actualidad, la tecnología digital puede valorarse con fines didácticos; a través de ella es posible promover una cultura matemática importante para los estudiantes.

### Referencias Bibliográficas

- ARZARELLO, Ferdinando. 2006. "Semiosis as a multimodal process". **Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**. [Número especial]: 267–299.
- ARZARELLO, Ferdinando; PAOLA, Domingo; ROBUTTI, Ornella y SABENA, Cristina. 2008. "Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom". **Educational Studies in Mathematics**. Vol. 70. N° 2: 97–109.
- BURKE, James; HEGEDUS, Stephen y ROBIDOUX, Ryan. 2013. "Reflections on significant developments in designing SimCalc software" en Hegedus, S. y Roschelle, J. (eds.). **The SimCalc vision and contributions**. pp 65–83. Springer Netherlands. Dordrecht (Holanda).
- D'AMBROSIO, Ubiratan. 2013. "Philosophy & background" en Hegedus, S. y Roschelle, J. (eds.). **The SimCalc vision and contributions**. pp 1–3. Springer Netherlands. Dordrecht (Holanda).
- FERNÁNDEZ-CÁRDENAS, Juan Manuel. 2013. "El habla en interacción y la calidad educativa". **Revista Mexica de Investigación Educativa**. Vol. 18. N° 56: 223–248.
- GOLDIN-MEADOW, Susan. 1999. "The role of gesture in communication and thinking". **Trends in Cognitive Sciences**. Vol. 3. N° 11: 419–429.
- HEGEDUS, Stephen y MORENO-ARMELLA, Luis. 2010. "Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments". **For the Learning of Mathematics**. Vol. 30. N° 1: 26–31.
- HEGEDUS, Stephen; MORENO-ARMELLA, Luis; DALTON, Sara; BROOKSTEIN, Arden y TAPPER, John. 2013. "Impact of classroom

- connectivity on learning and participation” en Hegedus, S. y Roschelle, J. (eds.). **The SimCalc vision and contributions**. pp 203–229. Springer Netherlands. Dordrecht (Holanda).
- HERBERT, Sandra y PIERCE, Robyn. 2008. “An “emergent model” for rate of change”. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. Vol. 13. Nº 3: 231–249.
- MORENO-ARMELLA, Luis y HEGEDUS, Stephen. 2009. “Co-action with digital technologies”. **ZDM—The International Journal on Mathematics Education**. Vol. 41. Nº 4: 505–519.
- NOSS, Richard y HOYLES, Celia. 2004. “The technological presence: Shaping and shaped by learners”. **Plenary paper of the 10th International Congress on Mathematical Education**. 1–2.
- NOSS, Richard; HOYLES, Celia; MAVRIKIS, Manolis; GERANIOU, Eirini; GUTIERREZ-SANTOS, Sergio y PEARCE, Darren. 2009. “Broadening the sense of “dynamic”: A microworld to support students’ mathematical generalisation”. **ZDM—The International Journal on Mathematics Education**. Vol. 41. Nº 4: 493–503.
- POZO, Ignacio. 2006. **Teorías cognitivas del aprendizaje**. Morata. (España).
- ROGOFF, Bárbara. 1993. **Aprendices del pensamiento: El desarrollo cognitivo en el contexto social**. Paidós. Barcelona (España).
- SALINAS, Patricia; ANALÍS, Juan Antonio y PULIDO, Ricardo. 2011. “Cálculo de una variable: Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza”. **Didac**. Nº 56-57: 62–69.
- SALINAS, Patricia; ALANÍS, Juan Antonio; PULIDO, Ricardo; SANTOS, Francisco; ESCOBEDO, Julio César y GARZA, José Luis. 2012. **Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos**. Cengage Learning. D.F. (México).
- SHECHTMAN, Nicole; HAERTEL, Geneva; ROSCHELLE, Jeremy; KNUDSEN, Jennifer y SINGLETON, Corinne. 2013. “Development of student and teacher assessments in the scaling up SimCalc project” en Hegedus, S. y Roschelle, J. (eds.). **The SimCalc vision and contributions**. pp 167–181. Springer Netherlands. Dordrecht (Holanda).
- VÉRILLON, Pierre y RABARDEL, Pierre. 1995. “Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity”. **European Journal of Psychology of Education**. Vol. 10. Nº 1: 77–101.
- VOGT, Paul. 2007. Quantitative research methods for professionals. **Pearson Allyn and Bacon**. Boston, MA (EUA).
- VYGOTSKY, Lev. 1978. **Mind in society: The development of higher psychological processes**. Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. y Souber-

- man, E. (eds.). Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts (EUA).
- WEGERIF, Rupert. 2004. "The role of educational software as a support for teaching and learning conversations". **Computers & Education**. Vol. 43. N° 1-2: 179–191.
- WERTSCH, James. 1998. **Mind as action**. Oxford University Press. New York (EUA).