opción

Revista de Antropología, Ciencias de la Comunicación y de la Información, Filosofía, Lingüística y Semiótica, Problemas del Desarrollo, la Ciencia y la Tecnología

Año 38, 2022, Especial N° 29

Revista de Ciencias Humanas y Sociales
ISSN 1012-1587/ ISSNe: 2477-9385
Depósito Legal pp 198402ZU45

Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Ciencias Humanas
Maracaibo - Venezuela

opción
Revista de Ciencias Humanas y Sociales

ISSN 1012-1587/ ISSNe: 2477-9385
Depósito legal pp. 198402ZU45
Portada: Dándole
Artista: Rodrigo Pirela
Medidas: 25 x 30 cm
Técnica: Acrílico sobre tela
Año: 2012

opción
Año 38, Especial No. 29 (2022): 214-233
ISSN 1012-1587/ISSNe: 2477-9385
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.7498739

Hacia la conceptualización de número con base en Von Neumann, Educación Primaria

María Leticia Rodríguez González
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México
Código ORCID: 0000-0001-5667-2955
leticia.rodriguez@cinvestav.mx

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia, España
Código ORCID: 0000-0003-1098-4130
bernardo.gomez@uv.es

Resumen

Este artículo síntetiza la investigación sobre la construcción y aprendizaje de los números en los primeros grados de educación primaria. Objetivo: Estudiar la viabilidad de introducir un Modelo de Enseñanza para la construcción de los números naturales, dirigido a niños/as de los dos primeros ciclos de educación primaria, incluyendo el cero. (RODRÍGUEZ, 2021). Con el Marco Teórico - metodológico de los Modelos Teórico Locales, se experimentó la construcción de los números con niños/as. Los resultados permitieron comprender que cuando los infantes tienen la oportunidad de experimentar con contenidos formales, tienen mayores posibilidades de llegar a la conceptualización aritmética.

Palabras clave: aprendizaje; conceptualización; números; cero; Von Neumann.

Towards the conceptualization of number based on Von Neumann, elementary school

Abstract

This article synthesizes the research on the construction and learning of numbers in the elementary school's first grades. Objective: To study the feasibility of introducing a Teaching Model for the construction of natural numbers, aimed at children of the first two cycles of elementary school, including zero. (RODRÍGUEZ, 2021). With the Theoretical -methodological Framework of the Local Theoretical Models, the construction of numbers with children was experimented with. The results allowed us to understand that when infants can experiment with formal content, they are more likely to reach arithmetic conceptualization.

Recibido: 18-06-2022 •Aceptado: 21-07-2022

Keywords: learning; conceptualization; numbers; zero; Von Neumann.

1. INTRODUCCIÓN: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las acciones de conteo oral, clasificación, seriación, dibujo y representación de algunos números que logran realizar los niños pequeños, no significa que ya tengan nociones aritméticas, ni que reconozcan que "…la numeración tiene que ver con las reglas sintácticas y fonéticas para expresar el número" (GÓMEZ, 1988. p. 17). Por ello, que una de las funciones de los sistemas educativos es introducir las nociones aritméticas para establecer las bases del pensamiento matemático infantil.

A pesar de que el problema de aprendizaje de los números ha generado numerosas investigaciones, todavía no se ha podido determinar con precisión las dificultades que tienen las/os niñas/os para conceptualizar, comprender y usar los números en diversas situaciones de la vida escolar y cotidiana. Por lo que esta investigación se cuestiona si es posible avanzar en el tratamiento paralelo de la cardinalidad y la ordinalidad de los números naturales, sin que una de estas componentes anule a la otra.

Para esta tarea se propuso la estructura matemática de Von Neumann, traducida por HAMILTON y LANDIN (1961), dado que permite reducir la problemática a sus elementos primarios: la iteración como la operación básica y base del proceso recursivo. Esta propuesta usa la teoría de conjuntos y en el principio de inducción finita encapsula la axiomática de PEANO (1979). Esta estructura matemática inicia con la construcción del número cero y de la noción de sucesor.

Es importante señalar que un modelo de enseñanza de esta naturaleza, nunca se ha puesto en práctica en la escuela primaria, sólo se tiene el referente del trabajo de investigación de MARAVILLA (2011), bajo la dirección del Dr. Filloy, que propuso establecer el orden y el conteo a niños de edad preescolar, usando el modelo de Von Neumann.

Para darle continuidad, en este proyecto de investigación se trabaja con alumnado de los dos primeros ciclos de educación primaria; profundizando en los Modelos de Competencia Formal y el de Comunicación; el uso de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) involucrados en la construcción de los números naturales, incluyendo el cero, sus propiedades y sus operaciones.

Identificar y comprender cómo estructuran esbozos lógico semióticos de cada situación; identificar el papel que juegan los procesos cognitivos en la construcción de representaciones y las inferencias analíticas, el tipo de códigos personales que usan para referirse a las acciones que realizan en las actividades que se les proponen, las posibilidades de generalización y abstracción que van dotando de sentidos intermedios a las redes de acciones cada vez más abstractas para convertirlas en operaciones (FILLOY, 1999).

2. MARCO TEÓRICO: MODELOS TEÓRICOS LOCALES

Los MTL son una estructura teórica para la observación experimental en la investigación en Matemática Educativa. Tienen su origen en ROJANO (1985), quien proposo a la observación empírica como la herramienta metodológica para comprender los procesos cognitivos que se articulan en la competencia formal y pragmática, en situaciones de enseñanza y aprendizaje en las aulas.

El sentido de lo *Local* está focalizado en fenómenos específicos a partir del análisis de competencia Formal, cogntivo, comunicación y el modelo de enseñanza. El análisis está centrado en las actuaciones de los participantes, para observar cómo se están construyendo los procesos de pensamiento a través del intercambio de mensajes con contenido matemático y los distintos grados de compentencia en el uso de los SMS, para crear textos matemáticos.

A través de los procesos de lectura/transformación se van concretando estrategias y códigos personales para producir significados intermedios en la resolución de situaciones problemáticas a las que se exponen. Para decodificar las observaciones empíricas, se requiere la "…conveniencia de que el observador cuente con una competencia de uso de los SMS más abstracto que englobe todos los utilizado sen el proceso observado." (FILLOY, 1999, p. 7).

Este MTL se ha estructurado considerando los cuatro componentes: Competencia Formal, Competencia cognitiva, Competencia de comunicación y Modelo de Enseñanza.

2.1. COMPETENCIA FORMAL

Es el referente matemático abstracto y sus aplicaciones. Su análisis implica la identificación de objetos matemáticos como un concepto, una estructura o una idea matemática "…que se construyen como medios de organización (…) como fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas (…) sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de las acciones…" (PUIG, 1994, p. 9), a través de la acción educativa.

En la adaptación didáctica que hacen HAMILTON y LANDIN (1961) del modelo formal de Von Neumann, consideran que su conceptualización es un proceso complicado y no es solamente nombrar los números o establecer una correspondencia uno – uno; por lo que es necesario construirlos ordinalmente.

Se comienza por la construcción del cero como primer número y a partir de la iteración como principio del proceso recursivo se va obteniendo el sucesor. De acuerdo con CHOATE, DEVANEY y FOSTER (1999, p. IX) "Iterar significa repetir algo una y otra vez"; lo que se hace para el primer elemento se hace para los subsiguientes: entonces el paso $n + 1$ se obtiene del paso n. Con la recursión se puede definir una función para todos los ordinales, El proceso que hizo para el primero, se hace para los sucesores. De acuerdo con MOSTERÍN:

> El teorema de la recursión transfinita nos permite definir una función para todos los ordinales, definiéndola para el 0 y, suponiendo que ya esté definida para un ordinal cualquiera α, definiéndola para $\alpha + 1$, y, suponiendo que ya esté definida para todos los ordinales menores que un ordinal límite λ, definiéndola para λ. (p. 188).

Entonces, "…una función computable puede definirse también como función recursiva. Toda definición recursiva es computable, y a la inversa, toda función computable es recursiva". Más adelante refiere: "… una función es recursiva si y solo si es computable…" (MOSTERÍN, 2000, p. 295).

2.2. COMPETENCIA COGNITIVA

En esta componente se identifican y analizan los procesos cognitivos que se ponen en acción para desarrollar el pensamiento matemático y su comunicación: la expresión y representación de las ideas matemáticas a través de códigos establecidos convencionalmente. Para ello, se orienta la atención en desarrollar procesos de comprensión de los textos matemáticos, apoyados en la memoria, desencadenar procesos de análisis y síntesis en distintas situaciones matemáticas, lo que a su vez posibilita acciones y actuaciones heurísticas ligadas a la promoción de la generalización y la abstracción, generando nuevos usos de los SMS de la matemática escolar (FILLOY,1999, p. 37).

Estos procesos se van desarrollando gradualmente, hasta consolidar el sentido de la convencionalidad, generando procesos de análisis lógicos cada vez más abstractos. Los procesos memorísticos permiten establecer inferencias y descubrir las relaciones matemáticas involucradas, desarrollando de forma natural la necesidad de dotar de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

De acuerdo con FILLOY, ROJANO y PUIG (2008, pp. 164 – 166), en una situación de enseñanza y con la intención de que los estudiantes logren transitar de un estrato de lenguaje SMS concreto a uno más abstracto, los procesos que se producen de forma recurrente las denominan tendencias cognitivas. Lo que se buscó fue identificar y comprender el papel que éstas juegan para establecer el tránsito de la *acción* a la *operación* y consolidar la abstracción matemática.

Las actividades que los niños van realizando con los símbolos y los signos les permiten sustituir, codificar, esquematizar y modelar una situación, concepto u objeto (TALIZINA, 2000); mientras que "…la imaginación es la formación psicológica nueva, central, que garantiza la preparación para los estudios escolares." (TALIZINA, 2000, p. 45), lo que les permitirá desarrollar la reflexión como un acto inminente de la conciencia humana para desarrollar la habilidad de argumentar y explicar la realidad. (TALIZINA, 2000). En síntesis, las *acciones* se pueden orientar, ejecutar, controlar y corregir (TALIZINA, 2000). De acuerdo con esta postura, hay acciones específicas para la formación de los conceptos matemáticos, por lo que se consideró fundamental para identificar, entender y comprender las actuaciones de los niños, lo que se constituye como unidad de análisis del aprendizaje.

Con la teoría de las acciones, se puede entender que la asimilación guía la formación de acciones cognoscitivas para la formación de conceptos matemáticos (TALIZINA, 2001). Pero, es necesario considerar que en el ámbito de la enseñanza que las experiencias adquiridas en el contexto familiar, escolar, cultural y social pueden generar obstructores cognitivos que dificultan el paso de las acciones a las operaciones para la construcción de conceptos matemáticos.

2.3. COMPETENCIA DE COMUNICACIÓN

En esta componente se propuso entender y comprender cómo son los procesos de comunicación que se generan en el aula, para identificar las dificultades que tienen los niños con el uso de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales; así como la producción de sentido para consolidar los procesos de significación, que les permita llegar a la abstracción. Para ello, se recuperan las aportaciones semióticas de PEIRCE (1987), para entender los procesos de significación que desarrollan los niños en el aula, la producción de sentido las acciones que van realizando en la construcción de los números naturales, incluyendo el cero.

La atención se enfocó en identificar las relaciones significantes como interrelaciones activas, continuas y complejas entre la sintaxis, la semántica y la pragmática, permitió entender cómo los niños/as usan e implementan códigos, para darle sentido a los símbolos y signos que se fueron produciendo (BARTHES, 1993, pp. 22 – 23), durante las secuencias didácticas propuestas; dando lugar al uso de argumentos como procesos de significación: inducción, deducción y abducción (PEIRCE, 1987, pp. 258 – 260); constituyendo la base de la reflexión y abstracción conceptual.

Se identificaron los argumentos que los niños emplean permite entender los procesos de significación y el uso de los SMS implicados en la construcción de los números naturales, pues los SMS son "…una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares…" (FILLOY, 1999, p. 64). En los textos, los niños producen sistemas de signos o estratos de sistemas de signos para darle sentido a las actividades que se les proponen en el modelo de enseñanza (FILLOY, ROJANO y PUIG, 2008, p. 7), teniendo en cuenta que en los SMS lo *matemático* está en los sistemas no en los signos.

> De esta componente, el interés fue identificar la dotación de sentidos intermedios con el uso de códigos personales, como parte del proceso de transición entre lo concreto y lo abstracto, para nombrar y reconocer al objeto con el empleo de códigos convencionales de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales.

2.4. MODELO DE ENSEÑANZA

Es una colección de textos, donde se generan y modelan acciones, con lenguajes que van de lo concreto a lo abstracto, con códigos intermedios, para gradualmente desarrollar habilidades matemáticas y resolver distintas situaciones o problemas. Estas habilidades matemáticas van desde los conocimientos intuitivos, sintácticos y semánticos que la experiencia escolar y cognitiva les va aportando. La base de este modelo de enseñanza debe partir de una estructura matemática formal, transformándola en actividades concretas, como un texto para producir otros textos en la interacción maestro – alumno; alumno – alumno; alumno – maestro. En los intercambios de textos se producen "…códigos para desarrollar habilidades de resolución." (FILLOY 1999, p. 26).

El modelo de enseñanza se diseñó a partir de la componente formal y en el caso particular de este diseño se articula la estructura de J. Von Neumann (HAMILTON y LANDIN, 1961); con el aporte de los otros dos componentes se observan y analizan las actuaciones de los niños, para identificar dificultades o procesos de aprendizaje, a partir de analizar los procesos de lectura/transformación que se van generando.

Las secuencias de actividades fueron publicadas anteriormente (RODRÍGUEZ, et. al 2020); pero es necesario mencionar que, para el diseño de este modelo, se tradujeron los principios (P_i) matemáticos del modelo formal de Von Neumann: número cero, sucesor, definición de números naturales, conteo y uso de las formas aritméticas $10 + a$ en acciones de suma y multiplicación, cuando los resultados o productos son mayores a diez se usó $a \cdot 10 + b$.

3. METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

La metodología es de corte cualitativo, el énfasis está centrado en la observación, generalización y la interpretación. En este modelo la explicación del fenómeno se realiza a la luz de la teoría, constituyendo la base fundamental para dar validez a la investigación. En la fase experimental participaron tres grupos de primero segundo y tercer grado (2016 – 2017) de tres escuelas diferentes, y en el siguiente ciclo escolar (2017 – 2018) sólo participaron dos de los tres grupos, debido a que una de las escuelas resultó seriamente dañada por el sismo de 2017; sin embargo, esta situación no obstaculizó que la experimentación se realizara con grupos de 1º a 4º grado: los alumnos de primero pasaron a segundo y los de tercero a cuarto.

Esta organización metodológica se realizó en tres fases: Diseño del MTL; Experimentación y Diagnóstico y; Entrevistas clínicas.

3.1. DISEÑO DEL MTL

El diseño consistió en la articulación de cada componente para la construcción de los números naturales incluyendo el cero con la base formal matemática de von Newman; traduciéndolas a secuencias de actividades, con el uso de material manipulativo, siguiendo un orden de lo fácil a lo difícil.

3.2. EXPERIMENTACIÓN Y DIAGNÓSTICO

Experimentación del modelo de enseñanza y análisis de las actuaciones de los niños: para identificar dificultades observadas durante las actividades y como segundo momento analizarlas a la luz de las categorías de análisis. El diagnóstico se conformó por el análisis cuantitativo y cualitativo.

En el análisis cuantitativo.- se utilizó el modelo tridimensional propuesto por ROJANO (1985), que propone 3 ejes de análisis: Conocimientos Intuitivos, Semántico y Sintáctico. Druante la experimentación los alumnos resolvieron ejercicios escritos, donde cada reactivo está articulado teóricamente a cada uno de los ejes:

- *Conocimientos Intuitivos*: conocimientos previos y espontáneo.
- *Semántico*: resolución de situaciones problemáticas con base en sus conocimientos y producción de sentido que asignan a las actividades.
- *Sintáctico* uso de reglas aritméticas para usar y operar los números.

Se establecieron criterios para determinar el nivel de desempeño (alto, medio o bajo), de acuerdo con las respuestas en la resolución de los reactivos.

Cada reactivo se cuantificó con: (1) el reactivo fue contestado correctamente y (0) contestado incorrectamente o no contestado. La justificación teórica de cada reactivo se puede consultar en RODRÍGUEZ (2021).

Se establecieron criterios para determinar el estrato, clase y coordenadas de cada estudiante.

Estrato.- Se siguieron las pautas de ROJANO (1985, p. 40), determinando cinco criterios de estratificación de acuerdo con el número total de reactivos por eje, después los estratos 4 y 5 se sumaron para obtener el estrato alto; el estrato medio se tomó el estrato 3 y para el estrato bajo se sumaron el 1 y 2. (Tabla1.)

Tabla 1. Criterios de estratificación

Estrato	**Conocimientos Intuitivos**	**Semántico**	**Sintáctico**
Alto 4 y 5			
Medio 3			
Bajo 2 y 1			

Fuente: RODRÍGUEZ, (2021)

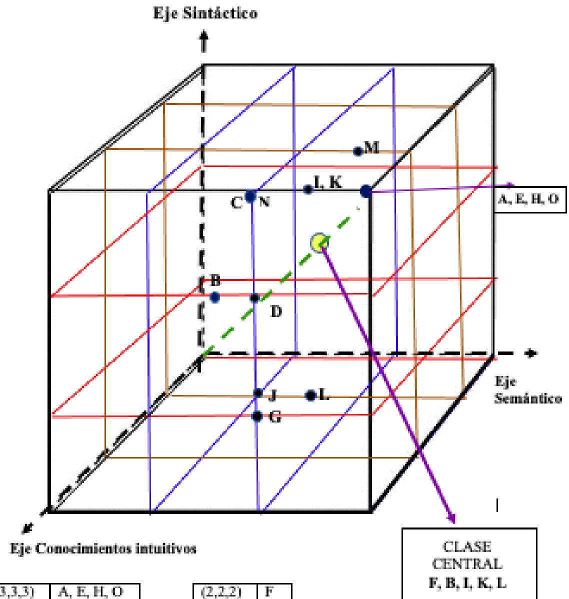
Clase: Para obtener la asignación de clase por eje, se consideró el total de reactivos, con relación a los rangos determinados por el porcentaje. (Tabla 2.)

Tabla 2. Criterios para asignación de clase

Clase	**Descripción del % (29 reactivos)**	**%**	**Rango numérico**
3	Más del 80% del total de reactivos	23.2	24-29
2	Menos del 80% del total de reactivos	23.2	14-23
1	Al menos el 80% de la mitad del total de reactivos	12.8%	8 - 13

Fuente: RODRÍGUEZ, (2021)

Representación espacial.- Representación de la población en el modelo tridimensional, (Rojano, 1985) de acuerdo con las coordenadas x, y, z: conocimientos intuitivos, semántico y sintáctico respectivamente. (Fig. 1)



(3,3,3)	A, E, H, O
(3,2,3)	C, N
(3,2,2)	D
(3,2,1)	G
(2,2,3)	I, K

(2,2,2)	F
(2,2,1)	L
(2,1,2)	B
(1,2,3)	M
(1,1,0)	J

Fig. 1. Representación gráfica del diagnóstico del grupo de 1º - 2º grado
Fuente: RODRÍGUEZ, (2021)

El análisis cualitativo se puede consultar en (RODRÍGUEZ, et. al. 2020).

El diagnóstico permitió concretar las primeras aproximaciones, el análisis cuantitativo permitió observar que el 33.3% de los alumnos representaron la clase central frente al 53.33% que se ubicaron en el desempeño alto y sólo 13.3% tuvo un desempeño bajo. Lo que significa que las acciones realizadas por los niños en un primer momento con el modelo de enseñanza diseñado con base en los MTL lograron dar sentido a las acciones de iteración y recursión para la construcción de los números naturales incluyendo el cero y lo aplicaron en diferentes situaciones problemáticas.

En el análisis cualitativo, se observó que conforme se repetía el proceso iteración y recursión en la construcción de cada número y la edad de los niños aumentaba; las dificultades se iban superando gradualmente. La interacción que se dio en la construcción de los intertextos facilitó la dotación de sentidos intermedios, posibilitando la producción de significación, propiciando una ruptura de los conocimientos previos, facilitando un pensamiento tendiente a la abstracción numérica. El reporte de este análisis se puede consultar en RODRÍGUEZ, et. al. (2020) y en RODRÍGUEZ (2021).

3.3. APLICACIÓN DE ENTREVISTAS CLÍNICAS

El protocolo de la entrevista se estructuró con las mismas actividades del modelo de enseñanza, con algunas modificaciones y aumentando el grado de dificultad (RODRÍGUEZ, 2021). Se seleccionó a 6 estudiantes, tres de primer y tres de segundo ciclo, con la finalidad de contrastar a través de la entrevista clínica si aún se presentan las dificultades observadas durante la experimentación. Las entrevistas se aplicaron después de ocho meses de no trabajar con los alumnos. Se volvió aplicar el modelo de enseñanza, modificando el grado de dificultad. Cada entrevista tuvo una duración de dos horas aproximadamente.

En el análisis de las entrevistas las dificultades que se presentaron se organizaron en dos grupos: dificultades recurrentes similares a la fase de experimentación y dificultades nuevas; también se identificaron indicios de transición hacia la generalización matemática. Por cuestiones de espacio sólo se ejemplificará una de las dificultades recurrentes: *Reconocer que todo sucesor contiene a sus anteriores (B3)*; con un fragmento de la entrevista de Ana de 7 años, en donde se estaba trabajando la construcción del sucesor del número dos. Para el análisis se numeraron los diálogos, con la finalidad de ubicar a qué parte del fragmento se está refiriendo; las iniciales son: E/entrevistadora y A/Ana.

1. *E: Pero ¿quién te falta para poderlo meter?* [Ana ha construido la bolsa/número dos].

2. *A: El cero* [toma otra bolsita vacía y le pega la etiqueta del cero].

3. *E: Ya tienes el cero, ahora ¿quién te falta? Tienes el cero y el dos ¿quién falta?*

4. *A: El tres.*

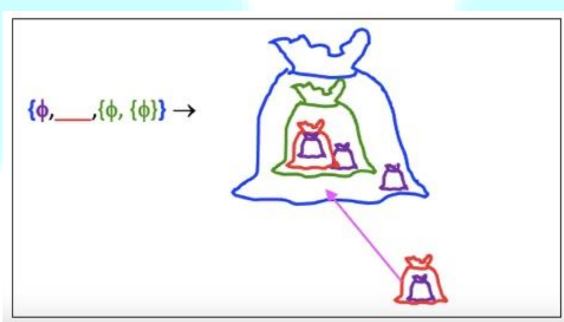
5. *E: Fíjate, tienes cero, el dos, ¿quién falta* [al mismo tiempo que le señala las dos bolsas/número del cero y dos, que acaba de construir. Señalando el espacio entre ambas bolsas. Pero Ana duda

por lo que la entrevistadora le vuelve a señalar el espacio entre las dos bolsas/número y le pregunta] *¿quién sigue después del cero?*

6. *A: El uno.*

En este fragmento Ana presenta la dificultad *B3*, pues a pesar de haber construido las bolsa/número dos E(1) y la bolsa/número cero A(2), no logra reconocer que falta la bolsa/número uno A(4) como se puede apreciar en la figura Núm. 2 y su representación simbólica en la figura 4; hasta que E(5) le muestra las bolsas/número que están sobre la semirrecta, para que ella pudiera reconstruir el proceso en A(6), acto que es interpretado por Ana, a través de la reversibilidad, ver Fig. 2 y Fig. 3

Fig. 2. Ana tiene la dificultad B3
Fuente: RODRÍGUEZ, (2021).



F3. Esquematización de la dificultad B3
Fuente: RODRÍGUEZ, (2021)

De las nuevas dificultades que se observaron fueron principalmente el uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos. Situación que se resolvió durante la entrevista, a través de las preguntas de los niños y la guía de la entrevistadora para que las niñas y niños analizaran sus procesos de solución e identificaran los errores y corregirlos.

Lo más interesante de los hallazgos de la entrevista fueron los indicios de transición hacia la generalización aritmética. En estos indicios se puede observar las maneras en que reflexionan y argumentan el uso de las nociones aritméticas aplicadas en la resolución de problemas. En la tabla Núm. 3, se presentan las generalizaciones que están relacionadas con los P_i con base en el modelo de Von Neumann (GP_i).

Tabla 3. Generalización aritmética de acuerdo con el modelo de Von Neumann

P_i	GPi	Actividad de generalización
P_1	GP_1	Identificación del cero como número y como conjunto vacío.
P_2	GP_2	Reconocer que el cero es el único número que pertenece a todos los sucesores.
	GP_3	Reconocer que el cero es el único número que no es un sucesor.
P_3	GP_4	Acercamiento conceptual a la noción de sucesor.
	GP_5	Producción de sentido para la construcción del sucesor, usando el proceso recursivo.
P_4	GP_6	Acercamiento al sentido de ordinalidad: reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores.
P_6	GP_7	Uso del número cero como elemento neutro en la resolución de problemas aditivos.
	GP_8	Uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la operación de suma.

Fuente: RODRÍGUEZ, (2021)

En la tabla 4, se presentan las generalizaciones que están relacionadas con las nociones numéricas y sus operaciones (GNO_i).

Tabla núm. 4. Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones (GNO)

GNO_i	Actividad de Generalización hacia las nociones numéricas y sus operaciones
GNO_1	Identificar el cero como punto origen de la recta.
GNO_2	Uso de la transformación del modelo aditivo $A + B = C$, para la resolución de problemas aditivos.
GNO_3	Relacionar el uso de los $(+)$ y $(-)$ con las operaciones aditivas.

Fuente: RODRÍGUEZ, (2021).

A continuación se muestra un ejemplo de la generalización GP_3, con otro fragmento del trabajo de Ana:

1. *E: ¿Quién es el antecesor de cero?*

2. *A: Nadie. Porque no sigue nadie. Porque antes del cero no hay nadie. Hasta allí ya no hay.*

Se puede observar que Ana tiene clara la noción de sucesor A(2), lo que podemos interpretar como una dotación de sentido (DS 2) para acercarse a la noción de que *el número cero no es un sucesor (GP 3)*, apoyándose en un argumento (APS 2), justificando que el número cero representa un límite o frontera.

En el siguiente fragmento (Dulce, 9 años) se observa la dotación de sentido, para posibilitar la generalización para usar la propiedad asociativa en la resolución de problemas aditivos (GP_8):

1. *E: ¿Qué diferencia hay entre esta y esta?* [Entre la primera y la tercera opción].

2. *D: Que en esta tiene esto* [se refiere a las cantidades que están agrupadas de distinta manera por los paréntesis: $(32 + 23) + 21 =$ y $32 + (23 + 21) =$].

3. *E: Paréntesis.*

4. *D: Sí.*

5. *E: ¿Qué significan esos paréntesis?*

6. *D: Que están separados.*

Dulce le da sentido (DS2) al uso de la propiedad asociativa para la suma (D2), relaciona eficientemente el uso de parentesis para agrupar dos sumandos, en un algoritmo de suma de más de tres sumandos, no importa el orden, reconoce que se pueden sumar de las dos maneras (D6) donde:

> El parentesis de la expresión inicial $(a + b) + c$, indica que debemos determinar primero el elemento $(a + b)$ y después encontrar $(a + b) + c$. (…). En la expresión $a + (b + c)$, el paréntesis indica que primero debemos encontrar el elemento $(b + c)$ y después $a + (b + c)$. (PETERSON Y HASISAKI, 1996, p. 102).

3.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de la aplicación de este MTL, permitió averiguar qué dificultades de aprendizaje tienen los niños cuando se les enseña con un modelo fundamentado en la estructura formal matemática de Von Newmann, centrado en el principio de ordinalidad a partir de la construcción del número cero, usando los procesos de interación y recursión para la obtención del sucesor.

3.4.1. ANÁLISIS POR CICLO ESCOLAR

Los niños del primer ciclo escolar, se observó que las dificultades estuvieron centradas en el uso del proceso recursivo, para identificar que todo sucesor contiene a sus anteriores, pero en la medida en que el proceso se repetía al construir cada número; los niños fueron capaces de superar estas dificultades. El ejercitar la iteración y la recursión fue fundamental para que los niños se acercaran a la noción de cero, dotando de sentido las relaciones del cero como: vacío, ausencia de elementos, punto origen en la recta, primer elemento de la construcción, es el único número que pertenece a todos los sucesores, también es el único número que no es un sucesor, es el elemento neutro para la suma.

Se familiarizaron con el uso de el modelo aritmético *10 + a*; y cuando se representan números mayores de 10, usaron la forma: $a \cdot 10 + b$.

Los niños de segundo ciclo, le dieron sentido usaron el modelo aritmético A + B = C, dotando de sentido las acciones de transformación del modelo para la resolución de problemas de suma, en situaciones problemáticas.

La aplicación de las entrevistas clínicas permitió identificar que algunas de las dificultades recurrentes observadas en la fase de experimentación, se volvieron a presentar; pero en este ambiente personalizado, los niños lograron superarlas en menor tiempo.

3.4.2. INDICIOS HACIA LA GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA

Otro de los hallazgos más importantes que se observaron fue que la tendencia de los razonamientos que hicieron los niños, hacia la generalización aritmética. Estos razonamientos se agruparon por su estructura en dos bloques: 1. Los que se relacionan directamente con el modelo de Von Newmann y; 2. Los que se relacionan con las nociones numéricas y sus operaciones.

La generalización del primer bloque muestran un avance hacia la conceptualización del número cero como conjunto vacío, como el único número que pertenece a todos los sucesores, con la precisión de que él no es un sucesor y que es el elemento neutro para la suma. Lograron un acercamiento a la noción de sucesor con el uso de procedimientos iterativos y recursivos en la construcción de cada número; el acercamiento al sentido de ordinalidad para reconocer que todo sucesor contiene a sus anteriores. Usaron las propiedades asociativa y conmutativa para la suma.

La generalización del segundo bloque muestra el acercamiento al número cero como punto origen en la recta numérica. Le dieron sentido y usaron la transformación del modelo aditivo A + B = C, para la resolución de problemas aditivos. Relacionaron el uso de los signos (+) y (-) con la resolución de operaciones aditivas en problemas aritméticos.

4. REFLEXIONES FINALES

En conclusión, se puede decir que la implementación de este Modelo de Enseñanza, motivó a los niños a trabajar una manera distinta de conceptualizar a los números, a partir de la construcción del sucesor. Asimismo podemos señalar que los niños de los primeros grados de educación primaria, tienen un desarrollo cognitivo y comunicativo que les permite darle sentido a actividades que promueven la generalización aritmética.

La influencia de las maneras en que los niños han adquirido las nociones numéricas en los diferentes entornos de su vida cotidiana, pueden obstruir la comprensión y uso pragmático de la recursividad para reconocer que cada sucesor (número) contiene a todos los sucesores; que el número cero es el primer elemento de la construcción, que es el único que pertenece a todos sus sucesores y que no tiene antecesor. Pero cuando se trabaja con un modelo de enseñanza con una base formal matemática, como en este caso Von Neumann, esas dificultades se pueden superar, como muestran los resultados de la entrevista. Los niños con un bajo nivel de competencia (Estrato Bajo) superaron las dificultades que se presentaron durante la experimentación grupal, lo que nos permite proponer la posibilidad de implementar estos modelos desde los primeros grados de educación elemental, brindando un área de oportunidad para establecer las bases un pensamiento matemático que les permita acceder a otros niveles de comprensión.

Incorporar la componente formal para la conceptualización de los números desde el primer grado de primaria, facilita el desarrollo conceptual antes del uso del simbolísmo, propio del enfoque de la enseñanza de los números naturales como una construcción trivial, memorística y operativa.

Aunque la intención de esta investigación no estuvo centrada en las dificultades de la práctica docente, la experimentación del modelo diseñado permitió aportar elementos para el análisis de las dificultades de aprendizaje de los números naturales con especial atención al cero como número, abriendo un abánico de posibilidades para reconceptualizar la enseñanza, a partir de fortalecer la competencia formal de los docentes en servicio y los que están en formación.

Se considera necesario recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, para potenciar el pensamiento matemático abstracto, que les permita a los alumnos acceder a niveles superiores de conocimiento matemático.

Como producto de este proceso investigativo, se proponen futuras líneas de investigación:

La incorporación de la componente Formal Matemática en el currículo de Educación Básica para enriquecer y profundizar la relación entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Simplificando la práctica del pensamiento aritmético para la construcción de las nociones numéricas; mismas que servirán de base conceptual para que a través del manejo algebraico, se establezcan las relaciones abstractas entre dichas nociones, dando sentido y significado a las expresiones algebraicas.

El diseño de actividades para los libros de texto para los alumnos, reconceptualizando la enseñanza evitando saltos y rupturas entre el aprendizaje de la aritmética y del álgebra a través de la traducción de los principios matemáticos a actividades concretas, con el uso de material manipulable.

La incorporación de la componente formal matemática en el currículo de formación docente de las Escuelas Normales y en la formación continua de maestros en servicio, para consolidar la competencia matemática en los profesores en servicio y en los que están en formación, con la finalidad para que la enseñanza promueva el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico de los alumnos, a través de la manipulación de expresiones matemáticas cada vez más abstractas.

5. AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado a través de la beca para la realización de estudios de Doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Becario 88237/88237

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARTHES, Roland. (1993). **La aventura semiológica**. Editorial Paidós, Barcelona (España).

CHOATE, Jonathan. DEVANEY, Robert. FOSTER. Alice. 1999. **Iteration: the tool kit fo dynamic activities. Key Currículum Prees**, Innovators in Mathematics Education. (USA)

FILLOY, Eugenio. 1999. Aspectos Teóricos del álgebra educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. (México).

FILLOY, Eugenio, ROJANO, Teresa, y PUIG, Luis. 2008. Educational algebra: a theoretical and empirical approach. Springer. (USA).

GÓMEZ, Bernardo. 1988. Numeración y Cálculo. Editorial Síntesis (España).

HAMILTON, Norman. y LANDIN, Joseph. 1961. Set theory and the structure of arithmetic. Editorial Allyn and Bacon, Inc. (USA).

MOSTERIN, Jesús. 2000. Los lógicos. Editorial Espasa Calpe, S. A. (España).

PEANO, José. 1979. Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método. Tr. e introducción Velarde, Lombraña, J. Colec. Clásicos el Basilisco. Pentalfa, Ediciones Oviedo. (España).

PEIRCE, Charles. 1987. Obra lógico semiótica. Taurus Ediciones. (Madrid)

PETERSON, John. y HASHISAKI, Joseph. 1996. Teoría de la aritmética. Editorial Limusa Noriega. (México).

PUIG, Luis. 1994. Semiótica y matemáticas. Eutopías 2ª época. **Centro de Semiótica y teoría del espectáculo de la Universitat de Valencia & Asociación Vasca de Semiótica**, Vol. 51. (España).

RODRÍGUEZ GONZÁLEZ, María Leticia, FILLOY FILLOY, Eugenio, GÓMEZ ALFONSO, Bernardo. 2020. "Dificultades en la construcción de los números naturales incluyendo el cero con estudiantes de 6 a 8 años". En revista Enseñanza las Ciencias, 38. – 3. Disponible en: https://ensciencias.uab.cat/article/view/v38-n3-rodriguez-gomez-filloy/2881-pdf-es consultado el: 10.05.2022

RODRIGUEZ GONZÁLEZ, María Leticia. 2021. Análisis de dificultades de la construcción de los números naturales con base en Von Neumann. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Departamento de Matemática Educativa. (México).

TALIZINA, N. 2000. Manual de Psicología Pedagógica. Editorial Universidad de San Luis Potosí. (México).

TALIZINA, N. 2001. La formación de las habilidades del pensamiento matemático. Editorial Universidad de San Luis Potosí. (México).

VAN HEIJENOORT, Jean. 1967. From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic. 1879 – 1931. Editorial Harvard University. (USA).

BIODATA DE AUTORES

María Leticia Rodríguez González. Profesora de Educación primaria, pedagoga, maestría y doctorado en Matemática Educativa por el Cinvestav – IPN (México). 30 años de experiencia como maestra de educación primaria y 16 años como catedrática en licenciatura y posgrado. He participado como ponente en diversos Congresos Nacionales e Internacionales sobre Matemática Educativa (RELMA, CIMA, MATHENSM, SEIEM, PME-NA. Publicación de artículos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y el español en educación primaria. Coautora de libro Metodología de la investigación Educativa. ISBN 978-607-538-486-3.

Bernardo Gómez Alfonso. Director, Catedrático jubilado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia. Excodirector de la revista "Enseñanza de las ciencias y de las Matemáticas", expresidente de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Experiencia investigadora en Pensamiento numérico y algebraico, con énfasis en los modelos de enseñanza y aprendizaje de los procesos arimético y algebraicos de los currículos de educación primaria y secundaria, su desarrollo y evolución histórica. Elaboración de libros de texto. Colaboración en investigación con el Cinvestav-IPN. Sus publicaciones son de impacto internacional.

UNIVERSIDAD
DEL ZULIA

opción
Revista de Ciencias Humanas y Sociales

Año 38, Especial N° 29 (2022)

Esta revista fue editada en formato digital por el personal de la Oficina de Publicaciones Científicas de la Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia. Maracaibo - Venezuela

www.luz.edu.ve

www.serbi.luz.edu.ve

produccioncientifica.luz.edu.ve