Año 5, No. 7 OPCION Febrero de 1988

EUCLIDES Y SU OBRA*

Darío Durán C.

Profesor Titular y ex-Decano de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia.

1. EPOCA PRE-EUCLIDIANA

Cuando el hombre aparece en el mundo empieza a asombrarse. Queda perplejo ante la luz del Sol, la oscuridad de la noche, la lluvia, el terremoto, las estrellas, los animales y las plantas. El hombre inicia así la observación y se da cuenta de la necesidad de explicar lo que ve y palpa su alrededor. El filósofo (amigo de la sabiduría) trata de hallar un principio que le permita comprender los fenómenos. La racionalización de dichos fenómenos consiste en una enumeración de los objetos del conocimiento, para hacer después una medición de las dimensiones de esos fenómenos mediante una comparación con unidades creadas por el hombre. Se sabe desde tiempos inmemoriales que el número y la forma permiten explicar el mundo.

No se tiene idea exacta de dónde y cuándo surgió la geometría. Documentos que han llegado hasta nosotros nos dicen que los Babilonios, unos dos mil años antes de Cristo, podían calcular el área de un rectángulo, el volumen de un paralelepípedo rectangular y el volumen de un cono tomando $\pi = 3$. Los antiguos Egipcios, unos 1850 años antes de Cristo, sabían que el producto del área de la base por su altura nos da el volumen. Sabían calcular el área de un triángulo cualquiera.

---

* En Mayo de 1986 la profesora Fredefinda Nava M. me invitó a que diera a sus alumnos una charla sobre Euclides y su obra. Estas anotaciones son el resultado de tal conferencia y espero les sea de utilidad a todos los alumnos interesados en la "ventana" de la Matemática que, yo considero, es la Geometría.
Pido a mis lectores me hagan llegar su opinión sobre estas notas para futuras ediciones.
Dedico este pequeño trabajo a la Prof. Fredefinda Nava.

Todo el conocimiento matemático de estos tiempos era empírico y se usaba la experimentación y la aproximación para acumular los hechos geométricos. No se demostraban proposiciones generales sino que se usaban métodos que se aplicaban a cada caso en particular. El hombre empezó a preguntarse: ¿por qué los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales? El procedimiento empírico de los pre-helénicos servía para indicar cómo y no por qué.

Frente a esto los griegos inventaron (o descubrieron) el método deductivo, que consiste en ir demostrando proposiciones (teoremas), a partir de un conjunto de proposiciones (axiomas) aceptadas universamente como válidas y que no se demuestran, mediante un proceso lógico.

No sabemos cómo pasó el conocimiento geométrico antiguo a Grecia, pero oigamos a Herodoto (c.484-c.425 A.C.):

> Sesostris (el Rey), ellos dijeron repartió las tierras de Egipto entre sus habitantes, asignándole a cada uno de ellos un terreno cuadrado del mismo tamaño obteniendo de esta manera ingresos por la renta que cada propietario debía pagarle anualmente. Si la crecida del río se llevaba parte del terreno, el propietario tenía que avisarle al Rey para que enviara sus agrimensores y determinaran la extensión de los daños. Luego, el propietario sólo tenía que pagar sobre el terreno que le quedaba. De esta práctica, yo creo, se conoció la Geometría en Egipto, de donde pasó a Grecia.

Thales de Mileto (c640-c.546 A.C.), uno de los siete sabios de Grecia, fue el primero del cual tenemos noticias que dio una demostración de una proposición geométrica. Por ejemplo, probó que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Causó mucha admiración cuando midió las priámides por medio de su sombra comparándola con la de una persona.

El alumno más destacado de Thales fue Pitágoras (c.582-c.546 A.C.) quien estableció al sur de Italia una sociedad dedicada al estudio de la aritmética, geometría, música y astronomía. Estas cuatro asignaturas constituyeron en la Edad Media el Cuadrivium. Para Pitágoras la matemática es la única ciencia y los números resultan la esencia de la realidad. El número entero es la causa de las distintas cualidades de la materia. En su doctrina el número alcanza un sentido mágico y sobrenatural. A Pitágoras se le atribuye la demostración del teorema que lleva su nombre y el desarrollo de la teoría de las rectas paralelas. Conoció los números racionales y demostró que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Dos segmentos de longitudes m y n dícense conmensurables si existe un tercer segmento de longitud u de modo que $m = a \cdot u$ y $n = b \cdot u$ donde a y b son enteros positivos; es decir, dos segmentos son conmensurables si existe un segmento que los mide a ambos. Dos segmentos se dicen inconmensurables si no son conmensurables. Los pitagóricos desarrollaron la teoría de la proporción para segmentos conmensurables.

Platón (427-347 A.C.) no hizo descubrimientos matemáticos, pero impulsó el conocimiento geométrico porque ayudaban al buen razonamiento.

Aristóteles (384-322 A.C.) usó el método de reducción al absurdo para demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Eudoxio (c.370 A.C.) desarrolló la teoría de las proporciones para segmentos conmensurables e inconmensurables.

2. EUCLIDES Y SUS ELEMENTOS

La más alta expresión del racionalismo griego aparece cerca del año 300 A.C. cuando Euclides, quien fue profesor de Matemáticas en la Universidad de Alejandría, escribió sus **Elementos**. No sabemos cuándo nació ni cuándo murió Euclides, aunque sí sabemos que escribió varias obras.

Los Elementos están formados por 13 libros que contienen un total de 465 proposiciones sobre geometría, álgebra elemental y teoría de números.

El **Libro I** contiene 25 definiciones, 5 postulados, 5 axiomas o nociones comunes y 48 proposiciones. Las primeras 26 proposiciones tratan sobre las propiedades elementales del triángulo e incluye los tres criterios de congruencia. Se desarrolla la teoría de las paralelas desde la proposición 27 hasta la proposición 32. La proposición 47 es el teorema de Pitágoras y se da una demostración original de dicho teorema. La última proposición es el recíproco del teorema de Pitágoras.

El **Libro II** contiene 2 definiciones y 14 proposiciones que tratan sobre equivalencia de figuras y sobre álgebra (geométrica) elemental. Las 10 primeras proposiciones son equivalentes a ciertas identidades algebraicas. En este libro se resuelve geométricamente la ecuación de segundo grado. Las proposiciones 12 y 13 constituyen lo que hoy llamamos el teorema del Coseno.

El **Libro III** contiene 11 definiciones y 37 proposiciones que tratan sobre circunferencias, cuerdas, tangentes y ángulos en la circunferencia.

El **Libro IV** contiene 7 definiciones y 16 proposiciones que tratan sobre la construcción con regla y compás de polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y quince lados, y la inscripción y circunscripción de dichos polígonos en una circunferencia.

El **Libro V** contiene 18 definiciones y 25 proposiciones que tratan sobre la teoría de las proporciones de Eudoxio.

El **Libro VI** contiene 4 definiciones y 33 proposiciones que tratan sobre la semejanza de las figuras. Se construyen media y cuarta proporcionales de dos segmentos dados. La proposición 30 nos permite dividir un segmento en media y extrema razón (segmento áureo).

El **Libro VII** contiene 22 definiciones y 39 proposiciones. Se inicia este libro con el Algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos enteros. Se establece la teoría de la proporción de segmentos conmensurables.

El **Libro VIII** contiene 27 proposiciones y tratan sobre progresiones geométricas.

El **Libro IX** contiene 36 proposiciones. La proposición 20 prueba que existen infinitos números primos. Este teorema ha sido considerado por los matemáticos como un modelo de elegancia matemática.

El **Libro X** contiene 4 definiciones y 115 proposiciones que tratan sobre los números irracionales, i.e., segmentos que son inconmensurables respecto de un segmento dado.

El **Libro XI** contiene 28 definiciones y 39 proposiciones que tratan sobre rectas y planos en el espacio.

El Libro XII contiene 18 proposiciones que tratan sobre el volumen de los sólidos.

El Libro XIII contiene 18 proposiciones que tratan sobre la construcción de los cinco poliedros regulares.

3. TERMINOS PRIMITIVOS

El método axiomático, introducido por Euclides en sus Elementos, enuncia los postulados y nociones comunes sin demostración alguna y de allí deduce lógicamente los teoremas geométricos.

Los postulados son proposiciones sobre los términos técnicos, i.e., términos de la teoría en cuestión. Todo término técnico debe definirse a partir de otros términos técnicos; como no podemos devolvernos ad infinitum, debemos partir de ciertos términos que no se definen y son llamados términos primitivos. Uno de los errores de Euclides es no haber admitido la existencia de términos primitivos.

En las dos primeras definiciones de Euclides leemos:

"Un punto es aquello que no tiene partes".

"Una línea es una longitud sin grosor".

Nos preguntamos ¿qué quiere decir partes, longitud y grosor?

Más adelante Euclides nos da las definiciones 15 y 16:

"Un círculo es una figura plana contenida por una línea de modo que todas las líneas rectas que parten de un punto, entre aquellos que están dentro de la figura, son iguales entre sí"

. "Y el punto se llama centro del círculo".

Nótese que esta es la definición actual de circunferencia.

Pienso que Euclides no trataba de definir un punto y una recta sino que trataba de dar una explicación de tales términos para que los postulados fuesen intuitivamente comprendidos. Esta es una razón por la cual la geometría euclidiana empezó a revisarse desde sus inicios.

4. POSTULADOS Y NOCIONES COMUNES

En el Libro I se ven los siguientes postulados:

1. Trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto.
2. Prolongar una línea recta finita indefinidamente según una recta.
3. Trazar una circunferencia con cualquier centro y cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectas.

Se leen los siguientes axiomas o nociones comunes:

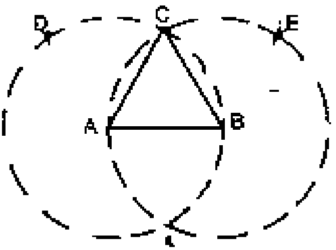
1. Cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si a iguales se añaden iguales se obtienen iguales.
3. Si a iguales se restan iguales sus restos son iguales.
4. Cosas que coinciden con una misma cosa son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Los axiomas son distintos a los postulados porque éstos se refieren a proposiciones de la geometría mientras que los primeros son proposiciones que sirven para cualquier ciencia. En el método axiomático actual los axiomas y los postulados son sinónimos y no existe diferencia alguna entre ellos.

Vamos a analizar la primera proposición de Euclides.

PROPOSICION 1

SOBRE UNA LINEA RECTA FINITA CONSTRUIR UN TRIANGULO EQUILATERO.



Sea AB la recta finita dada. Con centro A y distancia AB trace la circunferencia BCD (Post. 3). De nuevo con centro B y distancia BA trace la circunferencia ACE (Post. 3). Sea C el punto donde se cortan ambas circunferencias. Trace las rectas CA, CB (Post. 1). Ahora, como el punto A es el centro de la circunferencia CDB se tiene que AC es igual a AB (Def. 15). De nuevo, como el punto B es el centro de la circunferencia CAE, se tiene que BC es igual a BA (Def. 15). Pero, CA ya se había probado que era igual a AB. Por ende, cada una de las líneas rectas CA, CB es igual a AB. Y cosas iguales a la misma cosa son también iguales entre sí. Por consiguiente, las tres líneas rectas CA, CB, BC son iguales entre sí. En consecuencia, el triángulo ABA es equilátero.

Esta demostración, que es aparentemente impecable, no es válida porque asume la existencia del punto de corte de dos circunferencias, lo cual previamente no ha sido probado ni postulado. Colegimos de aquí que necesitamos introducir nuevos postulados si deseamos probar la primera proposición de Euclides. En el párrafo 7 veremos cómo hacer esto.

5. GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

Los cuatro primeros postulados de Euclides traducen propiedades más o menos evidentes para nuestra intuición geométrica. Sin embargo, el quinto postulado es mucho menos intuitivo y más complejo que los cuatro restantes. Por ello empezó a ser estudiado desde los primeros tiempos. El mismo Euclides trató de no usar dicho postulado ya que en su obra no aparece sino hasta la proposición 29 del Libro I.

Desde los inicios de la era cristiana los matemáticos pretendieron demostrar el quinto postulado a partir de los cuatro restantes. Estos esfuerzos siempre fracasaron porque lo que se lograba era admitir expresa o tácitamente otra proposición equivalente al quinto postulado.

De las proposiciones equivalentes al quinto postulado, quizás la más popular de ellas sea la dada por el matemático escocés John Playfair (1748-1819) que dice: "Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a ella".

Los nombres de Ptolomeo (segundo siglo de nuestra era), Proclo (410-485), Al-Nirizi (noveno siglo), Nassir-Edin (1201-1274), F. Commandino (1509-1575), C. Clavius (1537-1612), G. Borelli (1608-1679), G. Vitale (1633-1711), J. Wallis (1616-1703), G. Saccheri (1667-1773), J.H. Lambert (1728-1777), D'Allembert (1717-

1785), A. de Morgan (1736-1813), L.N.M. Carnot (1753-1823), Laplace (1749-1827) y A. Legendre (1752-1833), están asociados al intento de demostrar el quinto postulado a partir de los cuatro anteriores.

Posiblemente, debido a los trabajos de Abel y Galois, que veremos más adelante en 6, se llegó a la conclusión de que el quinto postulado no podía deducirse de los otros cuatro postulados de Euclides. El primero en concluir esto fue Carl F. Gauss (1777-1855), quien junto con Arquímedes e Isaac Newton es considerado como uno de los tres más grandes matemáticos de todos los tiempos. Gauss se abstuvo de hacer públicas sus investigaciones sobre la sustitución del quinto postulado por su negación. El húngaro Janos Bolyai (1802-1860) y el ruso Nicolas Lobachesky (1793-1856) publicaron independientemente trabajos sobre propiedades geométricas sin usar el quinto postulado y aceptando que por un punto exterior a una recta pasa más de una recta paralela a ella. Aparecieron de este modo las geometrías no euclidianas.

Dados un punto P y una recta m, que no pasa por P, existen las siguientes tres posibilidades:

I. Por P pasa una y sólo una recta paralela a m.

II. Por P pasa más de una recta paralela a m.

III. Por P no pasan paralelas a m.

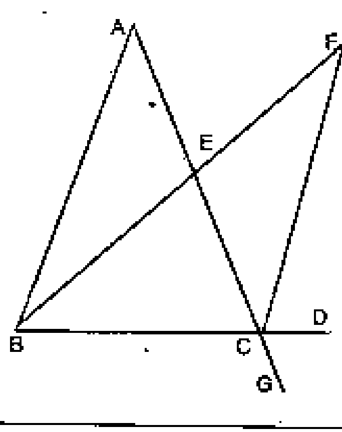
La primera de estas posibilidades está dada en la geometría euclidiana y la segunda corresponde a la geometría no euclidiana de Bolyai-Lobachesky. Analicemos la tercera posibilidad.

Euclides aceptó implícitamente que toda recta era de extensión infinita. Del postulado 2 no podemos deducir que una recta tiene longitud infinita aunque sí podemos colegir que una recta es interminable en el sentido de que siempre podemos extenderla añadiendo más puntos. Por ejemplo, el arco de un circulo máximo de una esfera que une dos de sus puntos puede prolongarse indefinidamente a lo largo de ese círculo haciendo dicha prolongación interminable, pero de longitud finita. Se puede concluir en este caso que una recta puede comportarse como un círculo máximo y que, después de cierta prolongación, se devuelve sobre sí misma.

PROPOSICION 16

EN CUALQUIER TRIANGULO, SI UNO DE LOS LADOS SE PROLONGA, EL ANGULO EXTERIOR ES MAYOR QUE CUALQUIER ANGULO INTERIOR NO ADYACENTE.

Sea ABC el triánculo con BC prolongado a D. Sea E el punto medio de AC. Trace BE y prolónguese en su propia longitud hasta F. Trace CF. Los triángulos BEA y FEC son congruentes. Así, los ángulos FCE y BAC son iguales. Pero, el ángulo ACD es mayor que el ángulo FCE. De donde sacamos que el ángulo ACD es mayor que el ángulo BAC. Extendiendo AC hasta G probamos análogamente que el ángulo ACD es mayor que el ángulo ABC.



Si aceptamos que una recta es interminable pero no infinita en longitud, entonces en la demostración anterior BF puede ser tan larga que F coincida con E, o F esté entre B y E o que el punto F no caiga dentro del ángulo ACD, lo que invalida tal demostración. Por consiguiente, en la geometría euclidiana habría que probar o postular que toda recta tiene longitud infinita, lo que Euclides no hizo. Usando la proposición anterior Euclides prueba la proposición 27 que dice: "Si una recta corta otras dos líneas rectas, formando ángulos alternos iguales, entonces las dos líneas rectas son paralelas". Por tanto, esta proposición nos garantiza la existencia de rectas paralelas por lo que la posibilidad III queda desechada.

En 1854, Bernardo Riemann (1826-1866) en su disertación Uber die Hypothesen welche des Geometrie zu Grunde liegen (Sobre la hipótesis en la cual la geometría se basa), discutió los conceptos de rectas de longitud infinita y rectas interminables.

Si los postulados 1, 2 y 5 de Euclides se sustituyen por los postulados:

R1. Dos puntos determinan, al menos, una recta.

R2. Una recta es interminable.

R3. Dos rectas cualesquiera del plano se cortan,

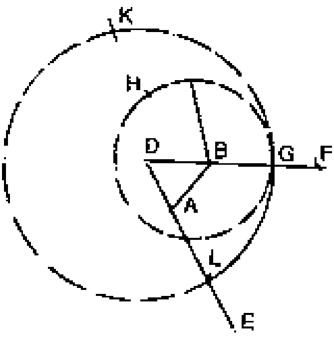
entonces surge una geometría que cubre la tercera posibilidad. Es obvio que en esta geometría no se cumplen, al menos, las proposiciones 16 y 27 del Libro I de Euclides.

6. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

Analicemos completamente la proposición 2 de Euclides.

PROPOSICION 2

COLOCAR EN UN PUNTO COMO EXTREMO UNA LINEA RECTA IGUAL A UNA LINEA RECTA DADA.



Sea A el punto dado y sea BC la línea recta dada. Trace AB. Sobre AB construya el triángulo equilátero ABD. Prolongue DA, DB hasta DE, DF. Trace la circunferencia CGH con centro B y distancia BC. De nuevo, con centro en D y distancia DG trace la circunferencia GKL. Se tiene que BC es igual a BG y DL igual a DG. DA es igual a DB. Por ende, AL es igual a BG. Pero, BC se había probado igual a BG. Así, AL, BL, son iguales a BG. Por tanto, AL es igual a BC. La recta pedida es AL que es igual a BC.

Obviamente esta construcción es muy complicada. Una más simple sería así: "Con el compás traslade la distancia BC y coloque la pata fija en A. Trace la circunferencia y tome un punto L cualquiera de ella. Por tanto, AL es una solución".

Euclides dio la primera demostración porque para los griegos un compás no podía trasladar distancias ya que al levantarlo del plano se cerraba. Un compás euclidiano sirve para trazar la circunferencia de centro un punto dado y que pasa por otro punto dado. Curiosamente, la proposición 2 nos dice que un compás sí puede transportar distancias aunque no de manera directa. La regla euclidiana no tiene marcas y tampoco sirve para trasladar distancias.

Cuando hablemos de construir o trazar nos referiremos al uso de la regla euclidiana y el compás moderno que sí sirve para trasladar distancias.

Los griegos pudieron realizar muchas construcciones: la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo, la perpendicular a una recta, un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular. También resolvieron los siguientes problemas geométricos: Dados dos segmentos de longitudes a y b y un segmento unitario (de longitud 1), construir segmentos de longitudes $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, a/b y $\sqrt{a}$. Sabían resolver ecuaciones de primer grado $ax+b=c$ y ecuaciones de segundo grado $X^2+ax+b=0$.

Con la aparición del simbolismo algebraico en el siglo XVI se empezó a explicitar fórmulas que nos permitían evaluar las raíces de las ecuaciones algebraicas (polinómicas). Así $x=(c-b)/a$ es la raíz de la ecuación de primer grado y las raíces de la ecuación de segundo grado están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Nótese que estas raíces pueden construirse con los instrumentos euclidianos. Por el uso de las fórmulas anteriores se dice que las ecuaciones algebraicas se han resuelto por radicales.

En el mismo siglo XVI, S. de Ferro (1465-1526), Nicola de Brescia (Tartaglia) (c.1499-1557), G. Cardano (1501-1576) y F. Viete (1540-1603), resolvieron las ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grados por cuadraturas.

En 1824 el famoso matemático noruego Niels H. Abel (1802-1829) demostró que era imposible resolver la ecuación algebraica de quinto grado por cuadraturas, lo mismo que ya había hecho el físico P. Ruffini (1765-1822) unos 10 años antes. Evaristo Galois (1811-1832) desarrolló la teoría de las ecuaciones algebraicas usando el concepto de grupo, que fue dado en 1830, y demostró que era imposible, en general, resolver las ecuaciones algebraicas de grado mayor que 4 mediante cuadraturas. De esta misma teoría surgen criterios que nos permiten decir cuáles problemas geométricos pueden resolverse con regla y compás y cuáles no. Los griegos no pudieron resolver varios problemas geométricos, entre ellos los llamados Problemas Famosos de la Antigüedad.

El primero de ellos, la Duplicación del Cubo, consiste en trazar la arista de un cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado. El segundo problema es la Trisección de un Angulo que consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Finalmente, el tercer problema es la Cuadratura del Círculo que consiste en construir un cuadrado que tenga área igual a la de un círculo dado.

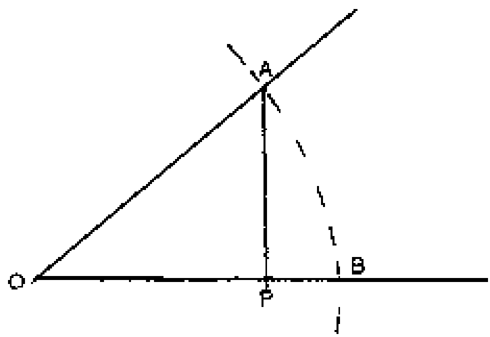
Fue en el siglo XIX cuando finalmente se demostró que era imposible resolver estos tres problemas, usando la regla y el compás. Los dos primeros problemas se resolvieron usando el siguiente teorema: "Dado un segmento unitario, es imposible construir un segmento cuya longitud sea la raíz de una ecuación cúbica (de grado 3) de coeficientes racionales que no tenga raíces racionales.

Duplicación del Cubo: Consideremos un cubo dado de arista 1. Su volumen es 1. Si x es la longitud de la arista del cubo que deseamos construir, entonces su volumen es x. Por las condiciones del problema tendremos que x=2.1. Por ende, x debe ser raíz de la ecuación cúbica $x^3-2=0$. Si esta ecuación tuviese raíces racionales serían los números 1 y 2, los cuales podemos verificar directamente que no son raíces. Por el teorema anterior, no podemos construir x con regla y compás.

Trisección del Angulo: Considérese la identidad trigonométrica

$$\cos\theta = 4.\cos^3(\theta/3) - 3.\cos(\theta/3)$$

Haciendo $\theta = 60^\circ$ y $x = \cos 20^\circ$ se obtiene la ecuación algebraica $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Esta ecuación no tiene raíces racionales. Por ende, no puede construirse con regla y compás el segmento $x = \cos 20^\circ$. Supóngase que podemos construir un ángulo de 20° de vértice 0.



Trace la circunferencia de centro O y radio 1 hasta cortar los lados del ángulo en los puntos A y B. Trace por A la perpendicular a la recta OB hasta cortarla en el punto P. Es fácil verificar que $OP = x$ y se ha construido el segmento x con regla y compás lo cual ya se había visto que era absurdo. En consecuencia, no puede trisecarse el ángulo de 60°. Se advierte que sí es posible trisecar un ángulo de 90° con regla y compas, lo cual se deja como ejercicio.

Un número dícese algebraico si es la raíz de una ecuación algebraica de coeficientes racionales. Un número se dice trascendente si no es algebraico. En 1882, C.L.F. Lindemann (1852-1939) probó que π es trascendente.

El tercer problema se resuelve usando el siguiente teorema: "La longitud de cualquier segmento que se pueda construir con regla y compás, usando un segmento unitario, es un número algebraico".

Cuadratura del Círculo: Considérese un círculo dado de radio 1. Su área es π. Si x es el lado del cuadrado que queremos construir, entonces x^2 es su área. Por las condiciones del problema tenemos que $x^2 = \pi$. O sea, $x = \sqrt{\pi}$. Si x se pudiese construir, entonces también pudiese construir $x \cdot x = \pi$, lo cual es absurdo por el último teorema. En consecuencia, no se puede cuadrar un círculo.

7. FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA

Ya hemos visto algunos errores en las definiciones y demostraciones dadas por Euclides en sus Elementos. Con la aparición de las geometrías no euclidianas se hizo necesaria una profunda revisión del sistema axiomático sobre el cual descansa toda la geometría euclidiana.

En 1882 el matemático alemán M. Pasch (1843-1930) en su **Vorlesungen iber neuere geometrie** (Lecciones sobre la nueva geometría) inicia la tarea de organizar la teoría axiomática. Pasch acepta punto, recta y plano como términos primitivos. En la proposición 21 del Libro I de Euclides al hacer su demostración, se admite sin justificación alguna que si una recta entra en un triángulo por un vértice, entonces deberá cortar otro lado del triángulo. Pasch se dio cuenta de esto y formuló el siguiente axioma que hoy recibe su nombre:

Axioma de Pasch: "Sean A,B,C tres puntos no colineales y sea m una recta del plano ABC que no pase por ninguno de dichos puntos. Entonces si m pasa por un punto del segmento AB, también pasará por un punto del segmento AC o por un punto del segmento BC". Nótese que este es un axioma de orden que Euclides nunca tomó en cuenta aunque lo usó implícitamente.

En 1872, R. Dedekind (1831-1916) enunció el siguiente **Axioma de Continuidad:** "Si todos los puntos de una recta están en dos clases de modo que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que divide a la recta en dos partes". Con este axioma se completa la demostración de la proposición 1 del Libro 1 de los Elementos de Euclides.

En 1889 el matemático italiano G. Peano (1858-1932) introdujo un nuevo sistema axiomático para la geometría euclidiana. Construyó su geometría desde un punto de vista estrictamente lógico.

En el mismo año el italiano M. Pieri (1860-1940) introdujo punto y movimiento como términos primitivos. En este trabajo se ve la idea de transformación del plano. Los movimientos de Pieri son desplazamientos rígidos.

El tratamiento axiomático de la geometría euclidiana que ha recibido la mayor aceptación es el introducido por el eminente matemático alemán David Hilbert (1862-1943). Publicó en 1899 la primera edición de sus **Grundlagen der geometrie** (Fundamentos de la geometría). Se han hecho diez ediciones de esa obra y se ha ido revisando cada edición. Los comentarios que haremos ahora se basan en la décima edición de 1968 que fue revisada por P. Bernays.

Los términos primitivos en esta geometría son: punto, recta, plano, contiene o está sobre, entre y congruencia.

Los axiomas de Hilbert están clasificados en 5 grupos:

Grupo I. Axiomas de Incidencia: Contiene 8 axiomas que establecen una relación de incidencia entre los puntos, rectas y planos. Los 3 primeros axiomas son de la geometría plana y los restantes del espacio. Los 2 últimos axiomas indican que el espacio euclidiano es de 3 dimensiones. Se enuncian dos teoremas sin demostración.

Grupo II. Axiomas de Orden: Estos axiomas fueron estudiados detalladamente por Pasch en 1882. Este grupo contiene 6 definiciones, 8 teoremas y 4 axiomas que definen el concepto de entre y, por medio de este término el concepto de orden en la recta, el plano y el espacio. El tercer teorema de este grupo fue usado por Hilbert como axioma y en 1902 E.H. Moore demostró que era un teorema.

Grupo III. Axiomas de Congruencia: Los axiomas de este grupo definen la noción de congruencia y con él, el de desplazamiento. Este grupo contiene 7 definiciones, 19 teoremas y 5 axiomas. Los teoremas 12, 13 y 18 son los criterios de congruencia de triángulos.

Grupo IV. Axioma de las Paralelas: Este grupo contiene 2 definiciones, 2 teoremas y el axioma de Playfair.

Grupo V. Axiomas de Continuidad: Este grupo contiene 1 teorema y 2 axiomas. El primer axioma de este último grupo corresponde al proceso de determinar la distancia entre dos puntos de una recta usando una longitud cualquiera como medida. De este postulado podemos deducir toda la teoría de las proporciones. Los teoremas de la geometría euclidiana no dependen del último axioma de Hilbert para sus demostraciones, pero da la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales y poder así desarrollar una geometría analítica.

En 1904 el matemático norteamericano O. Veblen (1880-1960) desarrolló un sistema axiomático usando como términos primitivos: punto y orden. En 1911, el mismo Veblen, hizo una revisión de su propio sistema.

En 1940 G.D. Birkhoff (1886-1944) y R. Beatley, profesores de la Universidad de Harvard desarrollaron un sistema axiomático totalmente distinto a los anteriores porque utilizaron la noción de distancia entre dos puntos como el centro de su geometría. Esta es una visión métrica de la geometría en contraste con la visión sintética de Euclides.

En 1953 L.M. Blumenthal introdujo otro sistema axiomático métrico.

En 1972 los profesores W. Prenowitz y J. Jantosciak del Brooklyn College de New York, introdujeron 7 axiomas para desarrollar la geometría euclidiana centrando su atención en los términos segmento y convexidad.

BIBLIOGRAFIA

BLUMENTHAL, L.M.A.: *A Modern View of Geometry*. San Francisco: W.H. Freeman, 1961.

BONOLA, R.: *Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover, 1955.

DURAN, C.D.: *Geometrías no Euclidianas. Una Introducción a su Historia*, Maracaibo: LUZ, 1982.

DURAN, C.D.: *Construcciones Imposibles con Regla y Compás*. Maracaibo: LUZ, 1986.

EVES, H.: *A Survey of Geometry*. Boston: Allyn and Bacon, Vol I, 1972.

EVES, H.: *An Introduction to the History of Mathematics.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.

HEATH, Sir T.: *Euclid. The Thirteen Books.* New York: Dover, 1956.

HILBERT, D.: *Foundations of Geometry.* La Salle, Illinois: Open Court, 1971.

PRENOWITZ, W.-JANTOSCIAK J.: *Join Geometries.* New York: Springer-Verlag, 1979.

TULLER, A.: *A Modern Introduction to Geometries.* Princ., New Jersey: D. van Nostrand, 1967.