

DEPÓSITO LEGAL ZU2020000153

ISSN 0041-8811

E-ISSN 2665-0428

Revista de la Universidad del Zulia

Fundada en 1947
por el Dr. Jesús Enrique Lossada



Ciencias del
Agro,
Ingeniería
y Tecnología

Año 14 N° 39

Enero - Abril 2023

Tercera Época

Maracaibo-Venezuela

Validación de las matrices de rigidez y masa obtenidas a partir de las ecuaciones bidimensionales de movimiento de vigas curvas de Timoshenko

Argenis Jesús Bonilla Pinto*
Carlos José Gomes Ansia**

RESUMEN

En este trabajo se obtuvieron las matrices de masa y rigidez que describen el movimiento vibratorio, en el plano, de vigas curvas bidimensionales. Se desarrolló el modelo matemático para la energía cinética y potencial elástica de una viga curva bidimensional de Timoshenko. Las ecuaciones de energía incluyen elementos discretos como inercias traslacionales y rotacionales, resortes traslacionales y torsionales. El principio de Hamilton se empleó para obtener la formulación débil por elementos finitos y consecuentemente las matrices de rigidez y masa. Los términos de las matrices se obtuvieron mediante integración paramétrica con elementos cúbicos de tres grados de libertad por nodo. Las matrices desarrolladas para el elemento viga curva se validaron con casos de estudio presentados en publicaciones anteriores, encontrando buena concordancia.

PALABRAS CLAVE: Viga curva, viga curva de Timoshenko, método de los elementos finitos, matriz de rigidez, matriz de masa.

*Departamento de Mecánica, Universidad de Oriente. Núcleo Anzoátegui. Barcelona, 4327. Anzoátegui, Venezuela. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0488-1151>. E-mail: aj.bonilla.13@gmail.com

** Departamento de Mecánica, Universidad de Oriente. Núcleo Anzoátegui. Barcelona 4327. Anzoátegui, Venezuela. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8235-4280>. E-mail: prof.Carlos.J.Gomes@gmail.com

Recibido: 08/09/2022

Aceptado: 03/11/2022

Validation of the stiffness and mass matrices obtained from the two-dimensional equations of motion of curved Timoshenko beams

ABSTRACT

In this work, the mass and stiffness matrices for the vibrational behavior, on the plane, of curved Timoshenko's beams were developed. The mathematical model for the kinetic and elastic potential energy of a two-dimensional curved Timoshenko beam was developed. The energy equations include discrete elements such as translational and rotational inertias, translational and torsional springs. Hamilton's principle was used to obtain the weak finite element formulation and consequently the stiffness and mass matrices. The terms of the matrices were obtained by parametric integration with cubic elements of three degrees of freedom per node. The matrices developed for the curved beam element were validated with case studies presented in previous publications, finding good agreement.

KEYWORDS: Curved beam, Timoshenko curved beam, finite elements method, stiffness matrix, mass matrix.

Introducción

La descripción matemática del comportamiento elástico de vigas curvas es más compleja que el de las vigas rectas debido a que el desplazamiento axial (tangencial), el desplazamiento transversal (radial), y el giro de la sección transversal de una viga curva están acoplados. Un número de investigadores han abordado este tema: Auciello y de Rossa (1994), Chidamparam y Leissa, (1993), Henrych (1981), Markus y Nanasi (1981), y Yang et. al. (2018) realizaron revisiones de las investigaciones sobre vigas curvas, tanto dentro del plano, como fuera del plano. Rao (2007), desarrolló ecuaciones diferenciales de una viga curva bidimensional considerando los efectos de la inercia rotacional y los esfuerzos cortantes, obtuvo soluciones analíticas paramétricas para varios casos prácticos. Lee y Yan (2015) desarrollaron ecuaciones diferenciales para una viga curva bidimensional de Timoshenko y las resolvieron usando el método de la función de desplazamiento con condiciones de borde no lineales. Tang et. al. (2013) desarrollaron un elemento viga curva bidimensional utilizando polinomios mixtos trigonométricos como funciones de forma para obtener las matrices de rigidez. Estos polinomios están basados en la teoría de vigas rectas, y sus desplazamientos no están acoplados. Obtuvieron resultados para

varios casos de vigas circulares bajo cargas estáticas. Yang et. al. (2014) identificaron un elemento viga curva bidimensional utilizando funciones B-spline como funciones de forma para obtener las matrices de rigidez y masa, obtuvieron soluciones para varios casos de vigas circulares bajo carga estática y vibración natural.

En el presente trabajo se presentan las ecuaciones diferenciales bidimensionales que describen el comportamiento vibracional de una viga curva en el plano de curvatura. La viga se trató como una viga de Timoshenko, en la cual el giro de la sección transversal es la suma de la rotación por deflexión más la rotación por deformación cortante. Las ecuaciones de desplazamiento y deformación se emplearon en el cálculo de la energía cinética y potencial elástica, respectivamente. El material se consideró homogéneo e isotrópico lineal con pequeñas deformaciones, mientras que la viga se trató como una sección transversal prismática.

Como procedimiento de validación de las matrices de rigidez y masa se escogió determinar las frecuencias naturales de vigas curvas para diferentes ensayos numéricos. Primero se realizó un ensayo de convergencia en función del tamaño del elemento para verificar comportamiento asintótico de los resultados, también se compararon los resultados obtenidos con las matrices desarrolladas en este trabajo con el reportado por otros y finalmente se modeló una viga recta como caso extremo de una viga curva.

1. Modelo matemático

En esta sección se desarrollan las ecuaciones fundamentales que describen la dinámica de una viga curva en el plano, utilizando viga curva de Timoshenko, material elástico lineal e isotrópico, y sección transversal constante.

1.1. Energía potencial elástica

La energía potencial elástica, U_{elas} , para un sólido deformable está dada por el producto de las componentes del tensor tensión, σ_{ij} , y el tensor deformación, ϵ_{ij} . Si las deformaciones ocurren dentro del límite elástico para un material homogéneo de comportamiento lineal e isotrópico, la energía potencial elástica en coordenadas cilíndricas para un volumen V es:

$$\begin{aligned} \Pi_{elas} &= \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{\theta\theta} \cdot \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \cdot \sigma_{zz} + \sigma_{rr} \cdot \sigma_{zz})}{E} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_{r\theta}^2 + \tau_{z\theta}^2 + \tau_{rz}^2}{G} \right) dV \end{aligned} \quad (1)$$

Donde, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr} , σ_{zz} y $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ y τ_{rz} son las componentes de esfuerzo normal y cortante, respectivamente, E es el módulo de elasticidad, G es el módulo de rigidez o resistencia al corte, y ν es el coeficiente de Poisson.

Dado que solo se considera el comportamiento vibratorio en el plano de curvatura, no existe dependencia con la coordenada z . Además, las componentes $z\theta$, zr y $r\theta$ de las deformaciones y de los esfuerzos son cero.

El esfuerzo normal debido a flexión y carga axial para una viga curva está dado por Raveendranath et al. (2001):

$$\sigma_{\theta\theta} = E \cdot \left(\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} - u_r \right) - \frac{r}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

Donde r se mide desde el centroide de área de la sección transversal, u_{θ} y u_r son los desplazamientos axiales y radiales respectivamente, ϕ es la rotación de la sección transversal con respecto al eje z debido a flexión, y R es el radio de curvatura.

El esfuerzo cortante debido a flexión viene dado por (Rao S., 2007):

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\kappa \cdot G}{R} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_{\theta} - R \cdot \phi \right) \quad (3)$$

Donde κ es el coeficiente de corte de Timoshenko. El esfuerzo σ_{rr} es nulo durante la flexión en el plano $r-\theta$.

Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 en la ecuación 1, expandiendo los cuadrados perfectos, tomando la dirección axial como $s = R \cdot \theta$ ($ds = R \cdot d\theta$), el diferencial de área como $dA = dr \cdot dz$ y el diferencial de volumen como $dV = R \cdot d\theta \cdot dA$ se obtiene la energía potencial elástica de una viga curva en el plano en función de sus desplazamientos en el plano:

$$\begin{aligned} \Pi_{elas} = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2} \left[E \left(\left(\frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{\partial u_{\theta}^2}{\partial \theta} - \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \cdot u_r + u_r^2 \right) \int_A dA \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} - u_r \right) \int_A r dA \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \phi^2}{\partial \theta} \int_A r^2 dA \right) \right) \\ \left. + \kappa^2 G \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_r^2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \cdot u_{\theta} + u_{\theta}^2 - \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_{\theta} \right) \cdot (R \cdot \phi) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (R \cdot \phi)^2 \right) \int_A dA \right) \right] R \cdot d\theta \end{aligned} \quad (4)$$

Donde las integrales de área resultan en:

$$\int_A dA = A \quad (5)$$

$$\int_A r dA = 0 \quad (6)$$

$$\int_A r^2 dA = I_{zz} \quad (7)$$

Donde A es el área de la sección transversal e I_{zz} es el segundo momento de área con respecto al eje z . De esta manera, la energía potencial resulta en:

$$\begin{aligned} \Pi_{elas} = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2} \left[E \left(\left(\frac{A}{R} \cdot \left(\frac{\partial u_{\theta}^2}{\partial \theta} - \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \cdot u_r + u_r^2 \right) + \frac{I_{zz}}{R} \frac{\partial \phi^2}{\partial \theta} \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2 GA}{R} \left(\left(\frac{\partial u_r^2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \cdot u_{\theta} + u_{\theta}^2 - \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_{\theta} \right) \cdot (R \cdot \phi) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (R \cdot \phi)^2 \right) \right) \right] d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

Las conexiones flexibles a la viga curva se modelaron como resortes elásticos lineales, traslacionales y rotacionales, los cuales almacenan energía potencial de acuerdo a:

$$\Pi_{resorte} = \frac{1}{2} \cdot \sum_i k_{ri} \cdot (u_r)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_j k_{\theta j} \cdot (u_\theta)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_l k_{\tau l} \cdot (\phi)^2 \quad (9)$$

Donde $\Pi_{resorte}$ es la energía potencial elástica total debido a los resortes lineales traslacionales y rotacionales, k_{ri} es la constante de resorte traslacional del resorte i en dirección radial, $k_{\theta j}$ es la constante de resorte traslacional del resorte j en dirección axial, y $k_{\tau l}$ es la constante de resorte rotacional del resorte l en dirección angular.

Este término se suma a la energía potencial elástica de la viga curva en el plano, resultando en una expresión de la siguiente forma:

$$\Pi_{total} = \Pi_{elas} + \Pi_{resorte} \quad (10)$$

Donde Π_{total} es la energía potencial elástica total de la viga curva y de los resortes.

1.2. Energía cinética

La energía cinética, para los desplazamientos definidos, se muestra en la Ec. 11. Donde el primer término representa la energía cinética en la dirección radial, el segundo término representa la energía cinética en la dirección axial, y el tercer término representa la energía de rotación, todos ellos de un elemento diferencial de viga curva:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left[\int_V \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 dV + \int_V \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 dV + \int_V \rho \left(r \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dV \right] \\
 T &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\int_A \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 dA + \int_A \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 dA + \int_A \rho \left(r \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dA \right] R d\theta \\
 T &= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho RA}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 d\theta + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho RA}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 d\theta \\
 &\quad + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho R I_{zz}}{2} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 d\theta \tag{11}
 \end{aligned}$$

Los accesorios conectados a la viga curva cuya inercia se desea considerar se modelan como inercias traslacionales y rotacionales puntuales cuyas energías cinéticas vienen dadas por:

$$T_{inercia} = \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot \left[\left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta i}}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \sum_i J_i \cdot \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)^2 \tag{12}$$

Donde $T_{inercia}$ es la energía cinética debido a las inercias conectadas a la viga curva, m_i y J_i representan la masa y la inercia del i -ésimo accesorio. La energía cinética total es la suma de la ecuación 11 y 12, y resulta:

$$\begin{aligned}
 T_{total} &= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho RA}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 d\theta + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho RA}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 d\theta + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho R I_{zz}}{2} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot \left[\left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta i}}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \sum_i J_i \cdot \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)^2 \tag{13}
 \end{aligned}$$

1.3. Principio de Hamilton

Despreciando las fuerzas no conservativas, la ecuación del Principio de Hamilton resulta en:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T_{total} - \Pi_{total}) \cdot dt = 0 \tag{14}$$

Sustituyendo las ecuaciones 10 y 13 en la ecuación 14, y realizando las integraciones correspondientes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$-\rho RA \cdot \ddot{u}_r + \frac{EA}{R} \cdot (u'_\theta - u_r) + \frac{\kappa^2 GA}{R} \cdot (u'_r + u'_\theta - R\phi') = 0 \quad (15)$$

$$-\rho RA \cdot \ddot{u}_\theta + \frac{EA}{R} \cdot (u''_\theta - u'_r) - \frac{\kappa^2 GA}{R} \cdot (u'_r + u_\theta - R\phi) = 0 \quad (16)$$

$$-\rho RI_{zz} \cdot \ddot{\phi} + \kappa^2 GA \cdot (u'_r + u_\theta - R\phi) + \frac{EI_{zz}}{R} \cdot \phi'' = 0 \quad (17)$$

Con las siguientes condiciones de borde:

$$\left[-\frac{\kappa^2 GA}{R} \cdot (u'_r + u_\theta - R\phi) + \sum_j k_{rj} \cdot u_\theta + \sum_i m_i \cdot \ddot{u}_r \right]_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{\theta=\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta u_r = 0 \quad (18)$$

$$+ \left[-\frac{EA}{R} \cdot (u'_\theta - u_r) + \sum_j k_{\theta j} \cdot u_\theta + \sum_i m_i \cdot \ddot{u}_\theta \right]_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{\theta=\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta u_\theta = 0 \quad (19)$$

$$\left[-\frac{EI_{zz}}{R} \cdot \phi' + \sum_k k_{\tau k} \cdot \phi + \sum_i J_i \cdot \ddot{\phi} \right]_{\theta=-\frac{\alpha}{2}}^{\theta=\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta \phi = 0 \quad (20)$$

Las ecuaciones diferenciales 15, 16, y 17 coinciden con las obtenidas por Lee y Yan (2015), quienes también estudiaron vigas curvas bidimensionales de Timoshenko. Las ecuaciones 18, 19, y 20 representan las condiciones de borde fuerza radial, fuerza axial, y momento flexionante, respectivamente.

2. Modelo por Elementos Finitos

2.1. Funciones de forma

Asumiendo que los desplazamientos tienen solución aproximada dentro de cada elemento de la siguiente forma:

$$u_{\theta}(\theta, t) = \sum_{i=1}^N U_{\theta i}(t) \cdot N_{\theta i}(\theta) = \sum_{i=1}^N u_{\theta i} \cdot e^{-j\omega t} \cdot N_{\theta i}(\theta) \quad (21)$$

$$u_r(\theta, t) = \sum_{i=1}^N U_{r i}(t) \cdot N_{r i}(\theta) = \sum_{i=1}^N u_{r i} \cdot e^{-j\omega t} \cdot N_{r i}(\theta) \quad (22)$$

$$\phi(\theta, t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(t) \cdot N_{\phi i}(\theta) = \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot e^{-j\omega t} \cdot N_{\phi i}(\theta) \quad (23)$$

Donde u_{θ} , u_r y ϕ son los desplazamientos axial, radial y rotacional dentro del elemento viga 2D, respectivamente, $U_{\theta i}$, $U_{r i}$ y Φ_i son las respuestas en el tiempo del i -ésimo nodo en las direcciones axial, radial y rotacional, respectivamente, $N_{\theta i}$, $N_{r i}$ y $N_{\phi i}$ son las funciones de forma asociadas al i -ésimo nodo dentro del elemento, N es el número de nodos en el elemento. Asumiendo respuesta armónica de frecuencia ω en el tiempo y usando notación vectorial, las ecuaciones 21, 22 y 23 se pueden escribir como:

$$u_r(\theta, t) = \{N_r(\theta)\}^T \cdot \{u\} \cdot e^{-j\omega t} = \{u\}^T \cdot \{N_r(\theta)\} \cdot e^{-j\omega t} \quad (24)$$

$$u_{\theta}(\theta, t) = \{N_{\theta}(\theta)\}^T \cdot \{u\} \cdot e^{-j\omega t} = \{u\}^T \cdot \{N_{\theta}(\theta)\} \cdot e^{-j\omega t} \quad (25)$$

$$\phi(\theta, t) = \{N_{\phi}(\theta)\}^T \cdot \{u\} \cdot e^{-j\omega t} = \{u\}^T \cdot \{N_{\phi}(\theta)\} \cdot e^{-j\omega t} \quad (26)$$

Donde $\{N_r(\theta)\}$, $\{N_{\theta}(\theta)\}$, $\{N_{\phi}(\theta)\}$ y $\{u\}$ son vectores columna. El superíndice T denota transpuesta. Se emplearon elementos cúbicos con cuatro nodos igualmente espaciados y el origen del elemento a la mitad del arco, las funciones de forma resultantes son:

$$N_1 = \frac{1}{16} \cdot (-1 + s + 9 \cdot s^2 - 9 \cdot s^3) \quad (27)$$

$$N_2 = \frac{1}{16} \cdot (9 - 27 \cdot s - 9 \cdot s^2 + 27 \cdot s^3) \quad (28)$$

$$N_3 = \frac{1}{16} \cdot (9 + 27 \cdot s - 9 \cdot s^2 - 27 \cdot s^3) \quad (29)$$

$$N_4 = \frac{1}{6} \cdot (-1 - s + 9 \cdot s^2 + 9 \cdot s^3) \quad (30)$$

La Figura 1 muestra el elemento curvo de cuatro nodos empleado en este trabajo

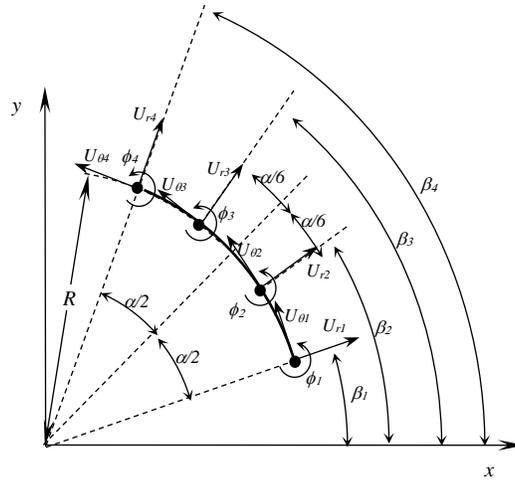


Figura 1. Distribución nodal del elemento cúbico.

2.2. Matriz de masa

Retomando la ecuación de Hamilton, ecuación 12, sustituyendo las ecuaciones 10 y 13, empleando las ecuaciones 21 a 30 y planteando la integral sobre la longitud de un elemento se obtiene, después de agrupar los términos inerciales:

$$[M] = [M]_{axial} + [M]_{radial} + [M]_{rotacional} + [M]_{inercia\ translacional} + [M]_{inercia\ rotacional} \quad (31)$$

Donde:

$$[M]_{axial} = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \{N_{\theta}(\theta)\} \cdot \{N_{\theta}(\theta)\}^T d\theta \quad (32)$$

$$[M]_{radial} = \rho RA \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \{N_r(\theta)\} \cdot \{N_r(\theta)\}^T d\theta \quad (33)$$

$$[M]_{rotacional} = \rho RI_{zz} \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \{N_{\phi}(\theta)\} \cdot \{N_{\phi}(\theta)\}^T d\theta \quad (34)$$

$$[M]_{inercia\ translacional} = \sum_i m_i \cdot (\{N_r(\theta)\} \cdot \{N_r(\theta)\}^T + \{N_{\theta}(\theta)\} \cdot \{N_{\theta}(\theta)\}^T) \quad (35)$$

$$[M]_{inercia\ rotacional} = \sum_i J_i \cdot \{N_{\phi}(\theta)\} \cdot \{N_{\phi}(\theta)\}^T \quad (36)$$

2.3. Matriz de rigidez

De manera análoga, al agrupar los términos procedentes de la energía potencial elástica se obtiene:

$$[K] = [K]_{axial} + [K]_{cortante} + [K]_{flexión} + [K_r]_{resorte} + [K_\theta]_{resorte} + [K_\tau]_{resorte} \quad (37)$$

Donde:

$$[K]_{axial} = \frac{EA}{R} \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\{N_\theta'(\theta)\} \cdot \{N_\theta'(\theta)\}^T - \{N_\theta'(\theta)\} \cdot \{N_r(\theta)\}^T - \{N_r(\theta)\} \cdot \{N_\theta'(\theta)\}^T + \{N_r(\theta)\} \cdot \{N_r(\theta)\}^T) d\theta \quad (38)$$

$$[K]_{cortante} = \frac{\kappa^2 GA}{R} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (\{N_r'(\theta)\} \cdot \{N_r'(\theta)\}^T + \{N_r'(\theta)\} \cdot \{N_\theta(\theta)\}^T + \{N_\theta(\theta)\} \cdot \{N_r'(\theta)\}^T + \{N_\theta(\theta)\} \cdot \{N_\theta(\theta)\}^T - R (\{N_r'(\theta)\} \cdot \{N_\phi(\theta)\}^T + \{N_\phi(\theta)\} \cdot \{N_r'(\theta)\}^T + \{N_\theta(\theta)\} \cdot \{N_\phi(\theta)\}^T + \{N_\phi(\theta)\} \cdot \{N_\theta(\theta)\}^T + R^2 (\{N_\phi(\theta)\} \cdot \{N_\phi(\theta)\}^T)) d\theta \quad (39)$$

$$[K]_{flexión} = \frac{EI_{zz}}{R} \cdot \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (\{N_\phi'(\theta)\} \cdot \{N_\phi'(\theta)\}^T) d\theta \quad (40)$$

$$[K_r]_{resorte} = \sum_i k_{ri} \cdot \{N_r(\theta)\} \cdot \{N_r(\theta)\}^T \quad (41)$$

$$[K_\theta]_{resorte} = \sum_j k_{\theta j} \cdot \{N_\theta(\theta)\} \cdot \{N_\theta(\theta)\}^T \quad (42)$$

$$[K_\tau]_{resorte} = \sum_k k_{\tau k} \cdot \{N_\phi(\theta)\} \cdot \{N_\phi(\theta)\}^T \quad (43)$$

2.4. Matriz de transformación

Las matrices de masa y rigidez del elemento, ecuación 31 y 37, respectivamente, se encuentran definidas en términos de las coordenadas locales del elemento (sistema coordenado $r-\theta$). En el sistema coordenado global $x-y$, las matrices de masa y rigidez son dadas por:

$$[KG_{XY}] = [R]^T \cdot [K] \cdot [R] \quad (44)$$

$$[MG_{XY}] = [R]^T \cdot [M] \cdot [R] \quad (45)$$

Donde $[KG_{XY}]$ y $[MG_{XY}]$ son las matrices de rigidez y masa, respectivamente, en función de las coordenadas globales $x-y$. $[R]$ es la matriz de rotación que relaciona los desplazamientos locales con los desplazamientos globales y viene dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Donde R_i es la matriz de rotación para el i -ésimo nodo, Figura 1, y está dada por:

$$[R_i] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\beta_i) & \text{cos}(\beta_i) & 0 \\ \text{cos}(\beta_i) & \text{sen}(\beta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

3. Resultados y Discusión

En esta sección se presentan los resultados obtenidos, para diferentes ensayos numéricos, empleando las matrices de rigidez y de masa desarrolladas en el presente trabajo.

3.1. Análisis de sensibilidad

En este ensayo se modela una viga curva de 90° en cantiléver (en un extremo no se permite ni desplazamientos ni rotaciones, el otro extremo libre) con sección transversal circular hueca. Las propiedades geométricas de la sección transversal y las propiedades del material se muestran en la tabla 1. En este ensayo se varía el número de elementos en la simulación, desde dos hasta

ochenta. Las primeras diez frecuencias naturales en Hertz, para 80 elementos son: 1960.13, 5251.79, 10430.00, 14628.78, 19699.57, 24484.57, 24484.35, 25806.10, 29095.63, 33950.93, y 38163.68.

Parámetros	Valor
Radio de curvatura R (m)	0.1
Diámetro externo (m)	0.0568
Diámetro interno (m)	0.0508
Coeficiente de corte de Timoshenko, k	0.7284
Módulo de elasticidad E (GPa)	70.0
Módulo de Poisson ν	0.3
Densidad ρ (kg/m ³)	2698.4

Tabla 1. Propiedades geométricas de la sección transversal y del material utilizadas para el caso de la figura 2.

En la figura 2 se muestra la variación del porcentaje de diferencia de las diez primeras frecuencias naturales con respecto a las frecuencias naturales calculadas con 80 elementos versus el número de elementos. Se observa que, a medida que se incrementa el número de elementos en el modelo, los valores de la diferencia disminuyen asintóticamente a cero para todas las frecuencias. En el caso de las primeras frecuencias (1^{ra}-3^{ra}) se logra una diferencia menor al 1% con dos elementos, para las frecuencias intermedias (4^{ta}-9^{na}) se logra lo mismo con cuatro elementos, y para la décima frecuencia se requiere menos de ocho elementos.

3.2. Viga Curva con Diferente Ángulo de Longitud

En este ensayo se determina la primera frecuencia natural de una viga curva de sección transversal rectangular y extremos articulados cuyo ángulo de longitud varía desde 10° hasta 350°. Las propiedades geométricas de la sección transversal y del material utilizado se listan en la tabla 2.

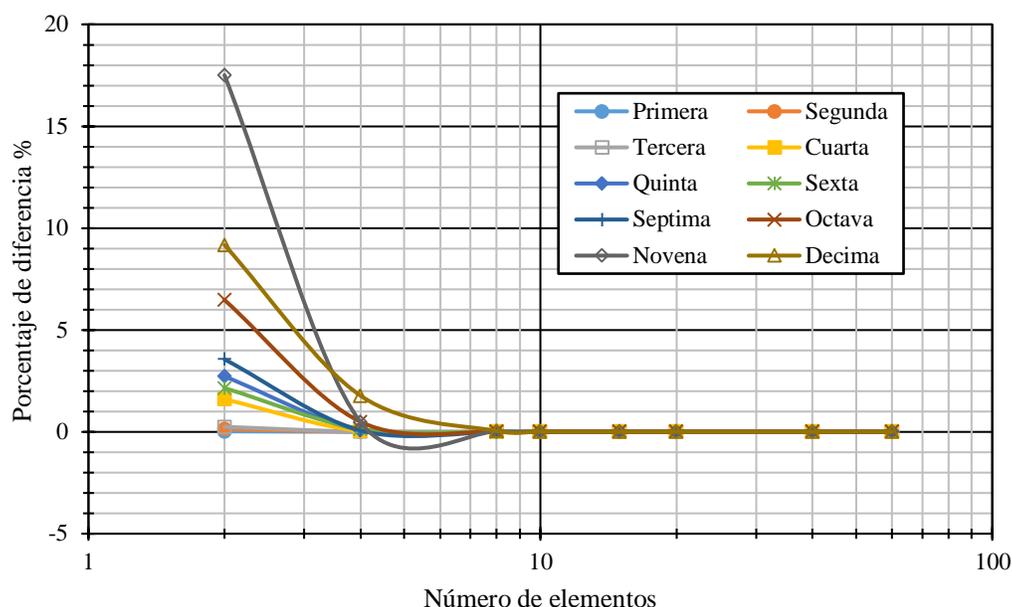


Figura 2. Porcentaje de diferencia con respecto a las frecuencias calculadas con 80 elementos para una viga curva de 90°.

Este ensayo numérico fue presentado por Yang et. al. (2014), en el que se compilan resultados de varios investigadores para mostrar la exactitud de sus métodos de cálculo. Esos resultados y los obtenidos utilizando las matrices desarrolladas en este trabajo se listan en la tabla 3, en el caso del presente trabajo también se listan el número de elementos necesarios para lograr una diferencia menor al 1% con respecto a los resultados compilados por Yang et. al. (2014). Se observa que los resultados obtenidos en el presente trabajo concuerdan con los resultados publicados, existiendo mayor semejanza con los resultados de THICK-2, CHM2, y BSWI.

Parámetros	Valor
Radio de curvatura R (pulg)	12.0
Altura de sección h (pulg)	0.25
Ancho de sección b (pulg)	0.625
Coefficiente de corte de Timoshenko k	0.8497
Módulo de elasticidad E (Mpsi)	30.4
Módulo de Poisson ν	0.3
Densidad ρ (slugs pie / pulg ⁴)	0.02763

Tabla 2. Propiedades geométricas de la sección transversal y del material utilizadas para el caso de la Tabla 3.

Ángulo (°)	Primera Frecuencias Naturales [rad/s]					Presente trabajo (# elementos)
	CHM2 (Kim & Park, 2006)	THICK-2 (Leung and Zhu, 2004)	MFE (Raveendranath et. al 1999)	EI.Ib (Krishnan et. al. 1995)	BSWI (Yang et. al. 2014)	
10	5845.78	5841.74	5852.32	5874.30	5881.64	5798.76 (10)
20	2836.20	2827.63	2829.66	2823.10	2829.13	2813.15 (10)
30	2370.01	2339.82	2373.23	2345.20	2348.11	2324.70 (15)
60	564.05	560.25	567.71	561.20	560.62	557.22 (15)
90	230.31	229.66	232.94	230.40	229.69	228.47 (20)
120	115.82	115.64	117.50	116.30	115.64	115.05 (24)
150	64.52	64.43	76.24	64.93	64.42	64.11 (24)
180	37.91	37.86	38.71	38.24	37.85	37.67 (24)
210	22.80	22.77	23.42	23.05	22.76	22.65 (32)
240	13.69	13.66	14.19	13.87	13.66	13.59 (32)
270	7.94	7.92	8.39	8.06	7.92	7.88 (32)
300	4.20	4.18	4.65	4.27	4.19	4.16 (32)
330	1.70	1.69	2.28	1.73	1.69	1.68 (32)
350	0.50	0.49	1.38	0.50	0.50	0.49 (32)

Tabla 3. Primera frecuencia natural de un arco circular articulado en sus extremos, variando el ángulo del arco.

3.3. Viga curva de sección transversal circular y 90° de ángulo de longitud

En esta sección se analiza un cuarto de círculo con sección transversal circular sólida para varias condiciones de borde; estas son: doble articulación, doble empotramiento, y empotrado – articulado. Las propiedades geométricas de la sección transversal y del material utilizado para este ensayo se listan en la tabla 4. Tomando en consideración los resultados obtenidos en la sección 3.1, se emplearon 16 elementos igualmente espaciados para los tres casos considerados.

Parámetros	Valor
Radio de curvatura R (m)	1.90507
Diámetro externo (m)	0.0568
Diámetro interno (m)	0.0508
Coefficiente de corte de Timoshenko <i>k</i>	0.7284
Módulo de elasticidad <i>E</i> (GPa)	70
Módulo de Poisson ν	0.3
Densidad ρ (kg/m ³)	2698.4

Tabla 4. Propiedades geométricas de la sección transversal y del material utilizadas para el caso de la Tabla 5.

Para este caso, los resultados se comparan con los resultados publicados por Yang et. al. (2014). Los resultados se listan, Tabla 5, empleando una frecuencia natural adimensional definida por la siguiente ecuación:

$$\Omega = \omega \cdot (R \cdot \alpha)^2 \cdot \sqrt{\rho \cdot A / (E \cdot I_{zz})} \quad (48)$$

Con $R/r = 100$, donde R es el radio de curvatura del arco, y r es el radio de giro de la sección transversal definido por $r = \sqrt{I_{zz}/A}$.

Se observa que los resultados del presente trabajo poseen muy buena concordancia con los resultados publicados por Yang et. al. (2014).

3.4. Viga recta en voladizo

En este caso se estudia una viga recta en voladizo con sección transversal rectangular, como un caso extremo de una viga curva con radio de curvatura infinito y ángulo de longitud muy pequeño. Las propiedades geométricas y del material utilizadas se muestran en la tabla 6.

Condición de borde	Autores	Modos	
		1 ^{ro}	2 ^{do}
Doblemente articulada	Raveendranath et al., (2001)	33.83	78.72
	Krishnan y Suresh, (1998)	33.93	79.42
	Sabir et al., (1994)	33.79	79.02
	BSWI (Yang Z. et. al., 2014)	33.87	78.95
	Presente trabajo	33.79	78.48
Doblemente empotrado	Raveendranath et al., (2001)	55.34	102.28
	Krishnan y Suresh, (1998)	55.82	104.28
	Sabir et al., (1994)	55.45	103.59
	BSWI (Yang Z. et. al., 2014)	55.54	103.00
	Presente trabajo	55.12	101.73
Empotrado - articulado	Raveendranath et al. (2001)	43.81	90.60
	Krishnan y Suresh, (1998)	44.05	91.82
	Sabir et al. (1994)	43.81	91.29
	BSWI (Yang Z. et. al., 2014)	43.91	91.00
	Presente trabajo	43.70	90.18

Tabla 5. Primera y segunda frecuencia natural adimensional de una viga curva de 90° con diferentes condiciones de borde.

En este caso, se utiliza las soluciones analíticas de una viga recta de Euler – Bernoulli (Ferreira, 2008), y un elemento viga recta de Timoshenko (Ferreira, 2008) como parámetros de comparación, los resultados se muestran en la Tabla 6. En esta tabla se muestran las primeras dos frecuencias naturales, y se observa que los resultados del presente trabajo tienen excelente concordancia con parámetros de comparación.

Parámetros	Valor
Longitud L (m)	1
Altura de sección h (m)	0.001
Ancho de sección b (m)	1
Coefficiente de corte de Timoshenko k	5/6
Módulo de elasticidad E (GPa)	0.01
Módulo de Poisson ν	0.3
Densidad ρ (kg / m ³)	1

Tabla 6. Propiedades geométricas de la sección transversal y del material utilizadas para el caso de la tabla 7.

Modo	Frecuencias naturales (Hz)		
	Solución Exacta (Euler - Bernoulli)	Solución usando 10 elementos viga recta de Timoshenko	Presente trabajo
1	3.2097	3.2097	3.2101
2	20.1148	22.1152	20.1147

Tabla 7. Primera y segunda frecuencia natural de una viga recta en cantiléver.

Conclusiones

El modelo matemático de la energía cinética y energía potencial elástica seleccionado para modelar vigas curvas de Timoshenko se validó al deducir las ecuaciones diferenciales de movimiento y condiciones de borde, empleando el principio de Hamilton y encontrando igualdad con las ecuaciones diferencias de movimiento y condiciones de borde deducidas por Lee y Yan (2014), para vigas curvas de Timoshenko.

Las matrices de rigidez y masa desarrolladas a partir del modelo matemático de la energía cinética y energía potencial elástica, se validaron mediante la estimación de las frecuencias naturales para diferentes experimentos numéricos, encontrándose: convergencia asintótica con la disminución del tamaño del elemento, buena concordancia con resultados reportados por otros para casos de cambios en la longitud angular y variación en las condiciones de borde. También se verificó la condición límite de viga recta encontrando excelente concordancia con resultados analíticos y numérico.

Referencias

- Auciello, N. M. y de Rosa, M. (1994). A. Free vibrations of circular arches: a review. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 176, no. 4, pp. 433-458.
- Chidamparam, P. y Leissa, A. W. (1993). Vibration of planar curved beams, rings, and arches. *Applied Mechanical Reviews*, vol. 46, no. 9, pp.467-483.
- Ferreira, A. [Ed.]. (2008), MATLAB Codes for finite element analysis, solids and structures. Solid Mechanics and its Applications, Volume 157, Portugal: Springer.
- Henrych J. (1981), The dynamics of arches and frames, Elsevier, Amsterdam.
- Kim, J.-G. y Park, Y.-K. (2006). Hybrid-mixed curved beam elements with increased degrees of freedom for static and vibration analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 68, no. 6, pp. 690-706.
- Krishnan, A. y Jayadevappa, Y. (1998). A simple cubic linear element for static and free vibration analyses of curved beams. *Computers & Structures*, vol. 68, no. 5, pp. 473-489.
- Krishnan, A., Dharmaraj, S. y Jayadevappa, Y. (1995). Free vibration studies of arches. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, no. 5, pp. 856-863.
- Lee, S. y Yan, Q. (2015). Exact static analysis of in-plane curved Timoshenko beams with strong nonlinear boundary conditions. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, no. 4, pp. 1-12.
- Leung, Y. T. y Zhu, B. (2004). Fourier p-elements for curved beam vibrations. *Thin-Walled Structures*, vol. 42, no. 1, pp. 39-57.
- Markus, S. y Nanasi, T. (1981). Vibration of curved beams. *Shock and Vibration Digest*, vol. 13, no. 4, pp. 3-14.

Rao, Singeresu. (2007), *Vibration of continuous systems*, Primera Edición. Editorial John Wiley & Sons.

Raveendranath, P., Singh, G. y Pradhan, B. (1999), A two-noded locking-free shear flexible curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, no. 2, pp. 265-280.

Raveendranath, P., Singh, G., y Rao, G. (2001). A three-noded shear-flexible curved beam element based on coupled displacement field interpolations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, no. 1, pp. 85-101.

Sabir, A., Djoudi, M. y Sfindji, A. (1994). The effect of shear deformation on the vibration of circular arches by the finite element method. *Thin-Walled Structures*, vol. 18, no. 1, pp. 47-66.

Tang, Y. Q., Zhou, Z., y Chan, S.L. (2013). An accurate curved beam element based on trigonometrical mixed polynomial function. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 13, no. 4, 1250084.

Yang, F., Sedaghati, R. y Esmailzadeh, E. (2018) Free in-plane vibration of curved beam structures: A tutorial and the state of the art. *Journal of Vibration and Control*, vol. 24(12), pp. 2400-2417.

Yang, Z., Chen, X., He, Y., He, Z. y Zhang, J. (2014). The analysis of curved beam using B-spline wavelet on interval finite element method. *Shock and Vibration*, vol. 2014.