

Año 28 No. 101, 2023  
enero-marzo



Año 28  
No. 101, 2023

# Revista Venezolana de Gerencia



UNIVERSIDAD DEL ZULIA (LUZ)  
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales  
Centro de Estudios de la Empresa

ISSN 1315-9984

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons  
Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported.  
[http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.es\\_ES](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.es_ES)



# Anomalía del portafolio de mínima varianza del mercado de valores colombiano

Acevedo Amoroch, Alejandro\*  
Celis, Jennifer\*\*  
Ballesteros, Libardo\*\*\*  
Cala Díaz, María Teresa\*\*\*\*

## Resumen

La hipotética presencia de la anomalía de rendimientos superiores de la cartera de mínima varianza, en comparación con las carteras ponderadas por la capitalización de mercado, se ha identificado como uno de los principales fenómenos que se estudian en la teoría financiera. Siendo evidente que dicho fenómeno hace presencia en diferentes mercados, se decide revisar la virtual presencia de este evento, el contexto del mercado colombiano, por lo cual el objetivo de la presente investigación se orientó en mostrar si las propiedades riesgo-retorno están presentes en los portafolios de Mínima Varianza estructurados con acciones del mercado de valores nacional. La metodología aplicada posee un enfoque cuantitativo, y alcance correlacional, y mediante el desarrollo de modelos de optimización para minimizar la varianza de los portafolios constituidos se procedió a hacer la revisión sistemática del evento. Los resultados muestran que los rendimientos del portafolio de mínima varianza son más favorables que los resultados de tres portafolios constituidos como Benchmark, como lo es un portafolio de mercado con retornos proyectados por promedio histórico, un portafolio de mercado con retornos proyectados por el modelo de valoración de activos de capital, y, finalmente, el índice del mercado de valores en Colombia, la revisión comprendió la ventana de tiempo entre enero de 2008 a octubre de 2020. En conclusión, se ha encontrado evidencia empírica de la presencia de la anomalía para los años 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 y 2020, en donde efectivamente los resultados del portafolio de mínima varianza supera a los otros tres portafolios constituidos para referenciar el desempeño.

**Palabras clave:** Anomalía de baja volatilidad; optimización de portafolio; portafolio de variación mínima; mercado de valores de Colombia; varianza del mercado.

Recibido: 21.06.22

Aceptado: 05.10.22

\* PhD en Currículum y Profesorado UGRA, Mg en Finanzas UDES, Mg en Ciencia y Tecnología U Sevilla. Email: [alejandro.acevedoa@upb.edu.co](mailto:alejandro.acevedoa@upb.edu.co) ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6715-2832>

\*\* Economista Universidad Industrial de Santander. Email [jennifer.celis@uis.edu.co](mailto:jennifer.celis@uis.edu.co) ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2967-9155>

\*\*\* Economista Universidad Industrial de Santander. Email [libardo.ballesteros@uis.edu.co](mailto:libardo.ballesteros@uis.edu.co) ORCID <https://orcid.org/0000-0002-5247-4211>

\*\*\*\* Administradora de empresas, MSc. Educación. Email [posgradoscienciaseconomicas@unisangil.edu.co](mailto:posgradoscienciaseconomicas@unisangil.edu.co) ORCID: [0000-0002-4746-4713](https://orcid.org/0000-0002-4746-4713)

# Minimum variance portfolio anomaly in the Colombian stock market

## Abstract

The hypothetical presence of the outperformance anomaly of the minimum variance portfolio, compared to market capitalization-weighted portfolios, has been identified as one of the main phenomena studied in financial theory. Being evident that this phenomenon is present in different markets, it is decided to review the virtual presence of this event in the context of the Colombian market, for which the objective of the present investigation was oriented to show if the risk-return properties are present in the portfolios of Minimum Variance structured with shares of the national stock market. The applied methodology has a quantitative approach, and correlational scope, and through the development of optimization models to minimize the variance of the constituted portfolios, a systematic review of the event was carried out. The results show that the returns of the minimum variance portfolio are more favorable than the results of three portfolios constituted as Benchmark, such as a market portfolio with returns projected by historical average, a market portfolio with returns projected by the valuation model of capital assets, and, finally, the stock market index in Colombia, the review comprised the time window between January 2008 and October 2020. In conclusion, empirical evidence of the presence of the anomaly has been found for years 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 and 2020, where effectively the results of the minimum variance portfolio exceeded the other three portfolios constituted to benchmark the performance.

**Keywords:** Low volatility anomaly; portfolio optimization; minimum variation portfolio; Colombian stock market; risk return ratio.

## 1. Introducción

Durante las últimas décadas, con el auge de las inversiones en renta variable, es decir, en el mercado accionario, una de las estrategias de inversión que más popularidad ha adquirido es la del portafolio de Mínima Varianza, desarrollado teóricamente por Markowitz (1952). Una de sus características más relevantes, es que este portafolio está diseñado con el fin de minimizar el riesgo de cartera para un nivel de rentabilidad dada, en otras

palabras, es la cartera de inversión que contiene el nivel más bajo de riesgo o variación sin depender de estimaciones de rentabilidad. Por ende, no existe otro portafolio que para un determinado nivel de rentabilidad pueda tener un riesgo menor. La teoría de Markowitz (1952) propuesta con un enfoque de media-varianza en el análisis del portafolio, incorporó la frontera eficiente del mercado, la cual ha permitido la creación ilimitada de portafolios ajustados a los criterios de retorno y riesgo de cada inversionista. En este sentido, cada

portafolio está conformado por todas las combinaciones de riesgo-rentabilidad que puedan obtenerse entre los múltiples activos que hacen parte de éste.

No obstante, Michaud (1989); Kritzman, Page, & Turkington (2010) y Clarke, De Silva y Thorley (2011), señalan que en los últimos años la implementación empírica de la teoría de Markowitz ha dado lugar a ciertos problemas prácticos, como la complejidad de las técnicas econométricas necesarias para un conjunto de activos mayor, y los problemas que resultan por las estimaciones de los retornos esperados.

Aunado a lo anterior, cabe preguntarse por qué en un modelo basado en el riesgo multifactorial, si el portafolio de mínima varianza es capaz de superar a la cartera de mercado, necesariamente esto será debido a que la cartera de mercado no es multifactorialmente eficiente, y que la cartera de mínima varianza está presentando algún tipo de anomalía basada en el riesgo.

Ante estos inconvenientes, se ha cuestionado la eficiencia de los índices ponderados por capitalización de mercado, cuando hay numerosas alternativas de inversión que en la práctica son más rentables. En este sentido, Haugen & Baker (1991) están entre los primeros investigadores que cuestionaron dicho índice ponderado, argumentando que la estrategia de inversión que consiste en igualar el mercado es ineficiente, incluso si los inversores optimizan racionalmente la relación entre el riesgo y el retorno esperado en equilibrio, en un mercado de capitales informalmente eficiente.

En esta misma línea, autores como Ang et al, (2006; 2009), Scherer (2011), Leote de Carvalho, Lu, & Moulin, (2012), Blitz et al, (2013), Cao & Han, (2013),

Goldberg, Leshem, & Geddes (2014), Frazzini & Pedersen (2014), Blitz & Groot (2014), Yanushevsky & Yanushevsky (2015), Chiu & Jiang (2016), Bednarek & Patel (2018) y Pyo & Lee (2018), han encontrado evidencia empírica de la presencia de la anomalía de portafolios de mínima varianza en diferentes mercados a nivel mundial, axioma que contradice el supuesto básico de la teoría financiera, la cual indica que un alto riesgo conllevaría a obtener una mayor rentabilidad y en reciprocidad, si el riesgo es bajo, será compensado por una rentabilidad menor. De hecho el Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM), propone que la relación riesgo rentabilidad, debe ser ajustada de forma razonable en relación con la cantidad de riesgo que asumen los inversionistas.

Ahora bien, en el contexto colombiano, esta anomalía ha sido poco estudiada, siendo Viveros (2013), uno de los pioneros en este campo al desarrollar un análisis del fenómeno para el período comprendido entre el año 2007 y 2013, sin embargo, en su estudio no se encuentran evidencias significativas de la presencia de esta anomalía.

Este tipo de revisiones ha presentado incrementos en su nivel de importancia para el contexto nacional, pues el mercado de valores colombiano ha disfrutado de grandes avances y desarrollos durante los últimos años en materia de inversiones y alianzas que potencializan la dinámica de este, de la mano con el crecimiento económico sólido que ha tenido desde las últimas décadas, así como la profundización del mercado financiero acompañado de un fuerte rendimiento del mercado accionario.

Al distinguir dicho interés por el mercado accionario nacional, la presente

investigación tiene como objetivo evidenciar si las propiedades de riesgo-retorno de un portafolio de Mínima Varianza constituidos con acciones del mercado bursátil colombiano, son más eficientes en comparación con tres portafolios *Benchmark* estructurados por capitalización de mercado, estos son el portafolio de referencia con el índice COLCAP, un portafolio de mercado con retornos proyectados por promedio histórico, y un último portafolio de mercado cuyos retornos proyectados se desarrollaron mediante el modelo de valoración de activos de capital (CAPM), durante el período comprendido entre enero de 2008 a octubre de 2020.

El presente trabajo puede servir como evidencia empírica para profundizar en la discusión sobre la existencia de una anomalía en la teoría del portafolio de Mínima Varianza desarrollado por Markowitz (1952). Se utilizó información financiera de 42 acciones colombianas proporcionada por la herramienta para análisis de acciones y fondos de inversión Economatica.

El período de estudio seleccionado comprende desde enero del año 2008 hasta octubre del año 2020. Siendo así, para dar cumplimiento al objetivo de la investigación, se calcularon cuatro series de portafolios de inversión: en primer lugar, un portafolio de Mínima Varianza; en segundo lugar, un portafolio de Máximo Desempeño proyectado bajo la metodología de retornos históricos; en tercer lugar, un portafolio de Máximo Desempeño proyectado bajo la metodología CAPM y, por último, el portafolio de mercado; el índice de mercado utilizado fue el COLCAP, con el fin de evidenciar que el fenómeno teórico de la anomalía del Portafolio de Mínima Varianza está presente en el mercado colombiano para los años

objeto de estudio.

Los resultados anteriores proporcionan grandes aportes a la discusión sobre la presencia de anomalías en los portafolios de inversión, particularmente el de Mínima Varianza. En la presente investigación se logra evidenciar que el fenómeno teórico de la anomalía del portafolio de Mínima Varianza está presente en el mercado de valores colombiano en la mayoría de los años objeto de estudio.

En consonancia con lo anterior, un hecho particular que se hace pertinente mencionar, es la susceptibilidad de la presencia de la anomalía al período de estudio que se utilice, puesto que, cuando se realiza la comparación a largo plazo (desde el año 2008 al 2020, es decir, doce años) no hubo presencia de la anomalía de baja volatilidad; mientras que, al comparar portafolios anuales, se pudo detectar la presencia de la anomalía en la mayoría de los años. Para poder evidenciar el ejercicio investigativo, la presente obra está conformada por cinco secciones: la primera, aborda lo concerniente al problema de investigación; en la segunda, se realiza una contextualización y referenciación del problema; en la tercera, se especifica la metodología empleada para el análisis desarrollado; en la cuarta se desarrollan y se discuten los resultados y, por último, en la quinta sección se mencionan las conclusiones a las que se llegó del fenómeno estudiado.

## 2. Portafolio mínima varianza y la anomalía de baja volatilidad

Los esfuerzos para el desarrollo de optimización de portafolios de inversión es un tema álgido en el ecosistema

financiero, y uno de los temas más reconocidos y estudiados es el aporte desarrollado por Markowitz en 1952, el cual proporciono el marco conceptual del manejo eficiente de un portafolio, y a nivel teórico goza de cierto prestigio en el ambiente de las finanzas, pues permite de cierta manera la estructuración de carteras en términos de optimización, de la mano con la diversificación requerida para minimizar el riesgo, este modelo aunque útil presenta una serie de dificultades y desventajas, las cuales han impactado de forma notable en el limitado éxito de su implementación (Franco, Avendaño, & Barbutín, 2011: 71).

La arquitectura matemática propuesta para el modelo de Markowitz, presentada en (1), se orienta a determinar las ponderaciones  $w_p$ , la cual maximiza los rendimientos de la cartera en función de un riesgo máximo admitido, es decir que el principal reto de la formación eficiente del portafolio es estimar con precisión los rendimientos esperados. Los pesos de los portafolios eficientes dependen en gran medida, de las medidas de retorno esperadas. Un pequeño cambio en la estimación de retorno podría causar un cambio severo en el proceso de asignación de peso para cada acción (Van Leur, 2013: 10).

$$\text{Max } E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i * R(R_i) \quad (\text{Ecuación 1})$$

Sujeto a (2)

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_p) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \sigma_{ij} \leq \sigma_0^2 \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1; \quad w_i \geq 0 (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2})$$

Ahora bien, la función de

optimización de la cartera de mínima varianza está sujeta a dos limitaciones. En primer lugar, la suma de todas las ponderaciones de los valores individuales debe ser igual al cien por ciento, de modo que todo se invierta en la cartera de riesgo. En segundo lugar, el peso de cada acción individual debe ser igual o mayor que cero, lo que está de acuerdo con la restricción de ventas en descubierto. Así, la estimación final se da mediante la operativización de las fórmulas 3 y 4

$$\text{Minimizar } [w_1 \dots w_N]_t * \Omega_t * \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_t = \min w^T \Omega w \quad (\text{Ecuación 3})$$

$$\text{Sujeto a } w^T \mathbf{1}_n = 1 \quad (\text{Ecuación 4})$$

$$w \geq \mathbf{0}_n$$

La realización de este problema de minimización proporciona las ponderaciones de las acciones del portafolio de Mínima Varianza individuales para las que se minimiza la variación de la cartera en la muestra. Este problema de minimización se resuelve por el método de Lagrange a través de las funciones 5, 6 y 7.

$$L = w^T \Omega w + \lambda (w^T \mathbf{1}_n - 1) \quad (\text{Ecuación 5})$$

Las condiciones de Lagrange serían:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Omega w + \lambda r = 0 \quad (\text{Ecuación 6})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w^T \mathbf{1}_n - 1 = 0 \quad (\text{Ecuación 7})$$

Resulta un sistema de  $n+1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas ( $n$  ponderadores y el multiplicador de Lagrange). Al multiplicar ambos lados de la primera ecuación matricial por  $\frac{1}{2}$  y despejando 1 en la segunda, el sistema se representa matricialmente como muestra las fórmulas 8 y 9:

$$\begin{bmatrix} \Omega & 1_n \\ 1_n^T & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w \\ \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 8})$$

Despejando para  $w$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & 1_n \\ 1_n^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 9})$$

Asumiendo que la matriz aumentada tiene inversa, el vector solución  $w$  será único (portafolio de mínimo riesgo). De esta forma, el riesgo y el rendimiento del portafolio de mínimo riesgo ( $w$ ) están dados por las ecuaciones 10 y 11:

$$\sigma_p^2 = w^T \Omega w = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j} \right] \quad (\text{Ecuación 10})$$

$$\bar{r}_p = w^T \bar{r} = \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i \quad (\text{Ecuación 11})$$

Donde,

$\sigma_p^2$ : riesgo mínimo del portafolio

$\bar{r}_p$ : rendimiento de inflexión del portafolio

Por otra parte, para el desarrollo de la elección de la cartera de MV con activos libre de riesgo se tiene el siguiente modelo que dinamiza este tipo de activo, la función que la representa es la 12, 13 y 14:

$$R_{t+1}^p = X_t' R_{t+1} + (1 - X_t' 1_N) R_t^f =$$

$$R_t^f + X_t'(R_{t+1} - R_t^f) = R_t^f + X_t' R_{t+1}^e \quad (\text{Ecuación 12})$$

Donde:  $R_{t+1}^e = R_{t+1} - R_t^f$  indicando el exceso de retorno

$$\text{Let } \mu = R_t^f + \bar{\mu}$$

$$\min_{X_t} V[R_{t+1}^p] + \min_{X_t} X_t' V[R_{t+1}] X_t \quad (\text{Ecuación 13})$$

$$E[R_{t+1}^p] = R_t^f + X_t' E[R_{t+1}^e] = R_t^f + \bar{\mu} \quad (\text{Ecuación 14})$$

Otro de los modelos matemáticos a tener en cuenta es lagrangiano sin restricción de suma a uno el cual está definido por la ecuación 15:

$$L = X_t' V[R_{t+1}] X_t - 2\lambda(X_t' E[R_{t+1}^e] - \bar{\mu}) \quad (\text{Ecuación 15})$$

Resolviendo las condiciones de primer orden, queda como resultado la ecuación 16, y su transformación en 17 y 18:

$$\frac{\partial L}{\partial X_t} = 0 \iff X_t^* = \lambda^* V[R_{t+1}]^{-1} E[R_{t+1}^e] \quad (\text{Ecuación 16})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \iff \bar{\mu} = E[R_{t+1}^e]' X_t = \lambda' E[R_{t+1}^e]' V[R_{t+1}]^{-1} E[R_{t+1}^e] \quad (\text{Ecuación 17})$$

$$\leftrightarrow \lambda^* = \frac{\bar{\mu}}{E[R_{t+1}^e]'V[R_{t+1}]E[R_{t+1}^e]}$$

(Ecuación 18)

Por último, se debe desarrollar las ponderaciones óptimas de la cartera de MV en presencia de un activo libre de riesgo, las cuales esta dadas por la ecuación 19:

$$\begin{aligned} X_t' &= \lambda^* V[R_{t+1}]^{-1} E[R_{t+1}^e] \\ &= \frac{\bar{\mu}}{E[R_{t+1}^e]'V[R_{t+1}]^{-1}E[R_{t+1}^e]} V[R_{t+1}]^{-1} E[R_{t+1}^e] \end{aligned}$$

(Ecuación 19)

En este sentido, lo antes reflejado se orienta a mejorar el *Trade off* entre el riesgo y retorno, y este es el punto de partida para que diferentes investigadores desarrollen aportes adicionales que robustezcan esta base de conocimiento, un aporte es precisamente el de la revisión de la anomalía de baja volatilidad, tal como lo propone Haugen y Baker (1991) quienes afirman que los activos que han exhibido un bajo riesgo en el pasado, no solo su dinámica se mantendrá, sino que también alcanzarán aproximadamente los mismos rendimientos que el resto de las acciones, argumento en el cual coinciden Maguire et al, (2017), pues encuentran evidencia empírica que dichas carteras superan a las carteras estructuradas con activos con alta volatilidad. Por el contrario, Li, Sullivan & García (2014), indican que, en su estudio, la existencia y la eficacia comercial de la conocida anomalía bursátil de baja volatilidad son más limitadas, y que los

hallazgos siguen la línea del supuesto financiero el cual indica que, a mayor riesgo, será compensado con una mayor rentabilidad.

### 3. Consideraciones metodológicas de la investigación

Al investigar las propiedades de riesgo-retorno del portafolio de Mínima Varianza durante los años 2008-2020, se analizó la existencia de una anomalía de baja volatilidad, que como anteriormente se ha indicado, esta consiste en un rendimiento superior en la compensación riesgo-retorno de los portafolios de mínima volatilidad- al contrastar el PMV con tres portafolios estructurados para evidenciar dicho fenómeno, como lo es el portafolio de mercado (COLCAP), un portafolio proyectado con retornos históricos de las acciones y un tercer portafolio proyectado por CAPM. Para lograr lo previamente expuesto, se construyeron carteras anuales y mensuales con la base de datos de Economática. Por lo indicado anteriormente, el tipo de investigación es de carácter cuantitativo de alcance correlacional, pues se pretende medir la implicación de la anomalía y el desempeño de carteras *benchmark*.

Ahora bien, para estudiar la existencia de una posible anomalía, se debe observar el comportamiento del portafolio de Mínima Varianza en particular, como lo plantearon Clarke, de Silva & Thorley (2006), en comparación con el *benchmark*. En este orden de ideas, es pertinente establecer las características que inciden en la elección de las acciones y la construcción de cada uno de los portafolios correspondientes.



### 3.1. Fase I selección de activos

Los activos financieros de inversión que se contemplaron para el desarrollo del trabajo fueron explícitamente de renta variable del mercado colombiano, se analizaron los activos incluidos en el índice bursátil más importante del mercado de valores de Colombia, denominado COLCAP. Este índice que pondera las 25 acciones más representativas por capitalización de mercado, el cual es proporcionado por la Bolsa de Valores de Colombia - BVC como el índice de mercado.

De igual forma, para el desarrollo de la investigación se tomó como la tasa libre de riesgo la IBR (tasa de interés de referencia de corto plazo denominada en

pesos colombianos, que refleja el precio al que los bancos están dispuestos a ofrecer o a captar recursos en el mercado monetario), tomado del sitio web del Banco de la República.

Aunado a lo anterior, es necesario indicar que las canastas de acciones que dan precio al índice COLCAP se rebalancian de forma anual y trimestralmente, por lo cual se optó por filtrar las acciones que siempre han estado vigentes en el índice desde su creación en 2008 hasta el 2020, como resultado, se obtuvo una lista de 42 activos, ajustados estos por dividendos y Splits. En el cuadro 1, se presentan en detalle los activos tomados en cuenta para la conformación de los cuatro (4) portafolios analizados en esta investigación.

**Cuadro 1**  
**Activos seleccionados para conformar los portafolios de inversión**

Nombre empresa	Nemotécnico	Clase	Sector
Avianca Holdings S.A.	PFAVH	Preferencial	Transporte Servicios
Banco Bogotá	BOGOTA	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Banco Crédito Colom	PFHELMBANK	Preferencial	Finanzas y Seguros
Banco Davivienda	PFDAVVNDA	Preferencial	Finanzas y Seguros
Bancolombia	BCOLOMBIA	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Bancolombia	PFBCOLOM	Preferencial	Finanzas y Seguros
Biomax Colombia	BIOMAX	Ordinaria	Comercio
Bolsa Mercantil de Colombia	BMC	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Bolsa Val. Colombia	BVC	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Canacol Energy Ltda.	CNEC	C1	Petróleo y Gas
Carvajal Empaques S.A.	PFCARPAK	Preferencial	Otros
Celsia S.A. E.S.P.	CELSIA	Ordinaria	Energía Eléctrica
Cementos Argos	CEMARGOS	Ordinaria	Minerales no Metales
Cementos Argos	PFCEMARGOS	Preferencial	Minerales no Metales

### Cont... Cuadro 1

Cemex Latam Holdings	CLH	Ordinaria	Otros
Coltejer	COLTEJER	Ordinaria	Textil
Constructora Concreto S.A.	CONCRET	Ordinaria	Construcción
Corporación Financiera Colombiana S.A.	CORFICOLCF	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Ecopetrol	ECOPETROL	Ordinaria	Petróleo y Gas
Emp. Telecom. Bogotá	ETB	Ordinaria	Química
Enka Colombia	ENKA	Ordinaria	Comercio
Éxito	ÉXITO	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Grupo Argos	GRUPOARGOS	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Grupo Argos	PFGRUPOARG	Preferencial	Otros
Grupo Aval Ac Va	GRUPOAVAL	Ordinaria	Otros
Grupo Aval Ac Va	PFAVAL	Preferencial	Fondos
Grupo de Inversiones Suramericana	GRUPOSURA	Ordinaria	Fondos
Grupo de Inversiones Suramericana	PFGRUPSURA	Preferencial	Energía Eléctrica
Grupo Energía Bogotá S.A. Esp.	GEB	Ordinaria	Finanzas y Seguros
Interbolsa C de B	INTERBOLSA	Ordinaria	Energía Eléctrica
Interconexión Eléctrica S.A. Esp.	ISA	Ordinaria	Energía Eléctrica
Isagen S.A. Esp.	ISAGEN	Ordinaria	Minería
Mineros S.A.	MINEROS	Ordinaria	Alimentos y Bebidas
Nutresa	NUTRESA	Ordinaria	Petróleo y Gas
Pacific Rubiales Energy Corp.	PREC	C	Minería
Paz del Rio	PAZRIO	Ordinaria	Petróleo y Gas
Petrominerales Ltda.	PMGC	C1	Petróleo y Gas
Promigas	PROMIGAS	Ordinaria	Otros
Sie	SIE	Ordinaria	Otros
Tablemac	TABLEMAC	Ordinaria	Petróleo y Gas
Terpel	TERPEL	Ordinaria	Textil
Tex Fabricato Tejic	Fabricato	Ordinaria	Finanzas y Seguros

Fuente: elaboración propia (2022).

La información contenida en cuadro anterior permite evidencia la pluralización de sectores, pues no hay una concentración sectorial en los activos seleccionados. En este caso, el sector con mayor participación es el de Finanzas y Seguros con un 26%, lo cual indicaría que el sector financiero ha estado muy presente en el índice COLCAP, como referente del mercado accionario colombiano. Por otra parte, los sectores que menos participación han tenido son: alimentos y bebidas, construcción, química, telecomunicación, transportes y servicios, comercio, fondos y minerales no metálicos, minería y textil, con una participación no mayor al 5%.

### 3.2. Fase II modelos de optimización de portafolios

Para el alcance de este propósito se estableció el desarrollo de cuatro carteras, las cuales se utilizaron para comparar y evidenciar si se puede afirmar la existencia de una anomalía en el performance del portafolio de Mínima Varianza, para el mercado accionario colombiano.

Las series de cada portafolio se construyeron a través de índices rebalanceados mensualmente, es decir, cada mes se devolvieron los portafolios a su asignación de activos inicial, puesto que las variaciones en el comportamiento del mercado desequilibran el portafolio, contruidos por un proceso de optimización utilizando el método de multiplicadores de Lagrange y álgebra matricial. Se utilizó los algoritmos de la herramienta Economatica, no sin antes comprobar mediante un proceso manual de Solver que los datos eran estables para su procesamiento en Economatica.

Ahora bien, para determinar la frontera eficiente de Markowitz, se

resolvió el siguiente problema, para diferentes niveles de rendimiento esperado ( $\bar{r}_p^{(k)}$ ), las cuales están dadas por las ecuaciones 20 y 21:

$$\text{Minimizar } w^T \Omega w \quad (\text{Ecuación 20})$$

$$\text{Sujeto a } \bar{r}_p^{(k)} = w^T \bar{r} \quad (\text{Ecuación 21})$$

$$1 = w^T \mathbf{1}_n \\ w \geq 0_n$$

Donde,

$\bar{r}_p^{(k)}$ : vector de rendimientos esperados individuales del activo  $k$  del portafolio  $p$   
 $w$ : vector de las ponderaciones del portafolio

$w^T$ : vector transpuesto de  $w$

$\Omega$ : matriz de varianzas y covarianzas de los retornos de los activos del portafolio

$\mathbf{1}_n$ : vector cuyos  $n$  elementos son todos 1.

De esta forma, se busca un portafolio  $w$  de mínima varianza ( $w^T \Omega w$ ), para un nivel particular de rendimiento requerido del portafolio (primera restricción), en el conjunto factible de portafolios (vectorialmente, los portafolios tales que:  $w^T \mathbf{1}_n = 1$ , segunda restricción). La tercera restricción  $w \geq 0_n$  indica la condición de no negatividad de cada componente del portafolio, es decir, que se restringen las ventas en corto. Asumiendo la posibilidad de realizar ventas en corto, el problema se resuelve por el método de Lagrange decantadas entre la ecuación 22 a la 25:

$$L = w^T \Omega w + \lambda_1 (w^T \bar{r} - \bar{r}_p^{(k)}) + \lambda_2 (w^T \mathbf{1}_n - 1) \quad (\text{Ecuación 22})$$

Las condiciones de primer orden

serían:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Omega w + \lambda_1 \bar{r} + \lambda_2 = 0_n$$

(Ecuación 23)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w^T \bar{r} - \bar{r}_p^{(k)} = 0$$

(Ecuación 24)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w^T \mathbf{1}_n - 1 = 0$$

(Ecuación 25)

Donde,

$\bar{r}$  : vector de rendimientos esperados individuales

Estas condiciones constituyen un sistema de n+2 ecuaciones con n+2 incógnitas. Se multiplica por 1/2 a ambos lados de la primera ecuación matricial y se despejan los términos independientes en las dos últimas ecuaciones. De esta forma, el sistema puede representarse matricialmente como lo representa la ecuación 26:

$$\begin{bmatrix} \Omega & \bar{r} & \mathbf{1}_n \\ \bar{r}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w \\ \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n \\ \bar{r}_p^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 26)

Al despejar matricialmente el anterior sistema, se obtiene la ponderación óptima estructurada en la fórmula 27:

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{\lambda_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & \bar{r} & \mathbf{1}_n \\ \bar{r}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{1}_n^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0_n \\ \bar{r}_p^{(k)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 27)

La solución anterior constituye la combinación de ponderaciones óptima  $w$  (portafolio eficiente) para un nivel particular de rendimiento esperado del portafolio  $\bar{r}_p^{(k)}$ . De esta forma, para construir la frontera eficiente se debe resolver el sistema matricial planteado anteriormente, para distintos valores particulares de  $\bar{r}_p^{(k)}$  (Medina, 2003). El sistema tiene solución única (a un nivel particular  $\bar{r}_p^{(k)}$ ) si la matriz  $\Omega$  aumentada es semidefinida positiva, es decir, si es una matriz cuadrada de elementos  $n \times n$  que tiene la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada. Para resolver el sistema anterior de ecuaciones, se utilizaron los sistemas iterativos de Microsoft Excel usando Solver y el portal de Big Data Economatica.

#### 4. Anomalía del portafolio de mínima varianza: Resultados y evidencias

La incógnita principal en este ejercicio gira en torno a encontrar evidencia empírica que permita precisar la existencia o no de la anomalía en el desempeño del portafolio de mínima varianza, en el mercado accionario colombiano para el periodo 2008-2020. Siendo así, el punto de partida es demostrar que la relación rendimiento-riesgo de la cartera de MV es superior en comparación con las carteras estructuradas, para tal fin, a ese respecto, el Cuadro 2 muestra el nombre teórico y el nombre metodológico de las carteras o portafolios comparados en este estudio.

## Cuadro 2

### Nombre metodológico de los portafolios

NOMBRE TEÓRICO	NOMBRE METODOLÓGICO
Portafolio de Mínima Varianza	Portafolio MV
Portafolio de mercado con retornos proyectado por promedio histórico	Portafolio Sharpe Histórico
Portafolio de mercado con retornos proyectado por CAPM	Portafolio Sharpe CAPM
Portafolio de mercado COLCAP	Portafolio COLCAP

Fuente: elaboración propia (2022).

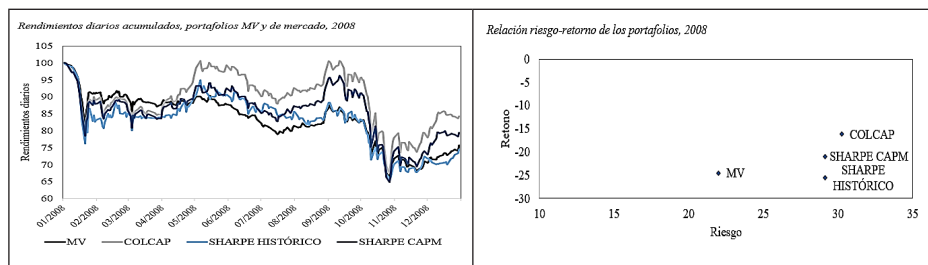
De igual forma, es pertinente indicar que los análisis de los cuatro portafolios se desarrollaron de forma anual, es decir, portafolios constituidos a 12 meses, ejercicio que permitía una revisión sistémica de los resultados y con ellos evidenciar la existencia de la anomalía de baja volatilidad. Para ello se analizó 12 portafolios anuales de cada uno de los cuatro portafolios, es decir el Portafolio de MV, y los Benchmark Sharpe histórico, Sharpe CAPM y

COLCAP, para un total de 48 portafolios anuales calculados, la descripción teórica y el nombre metodológico se precisan en el Cuadro 2.

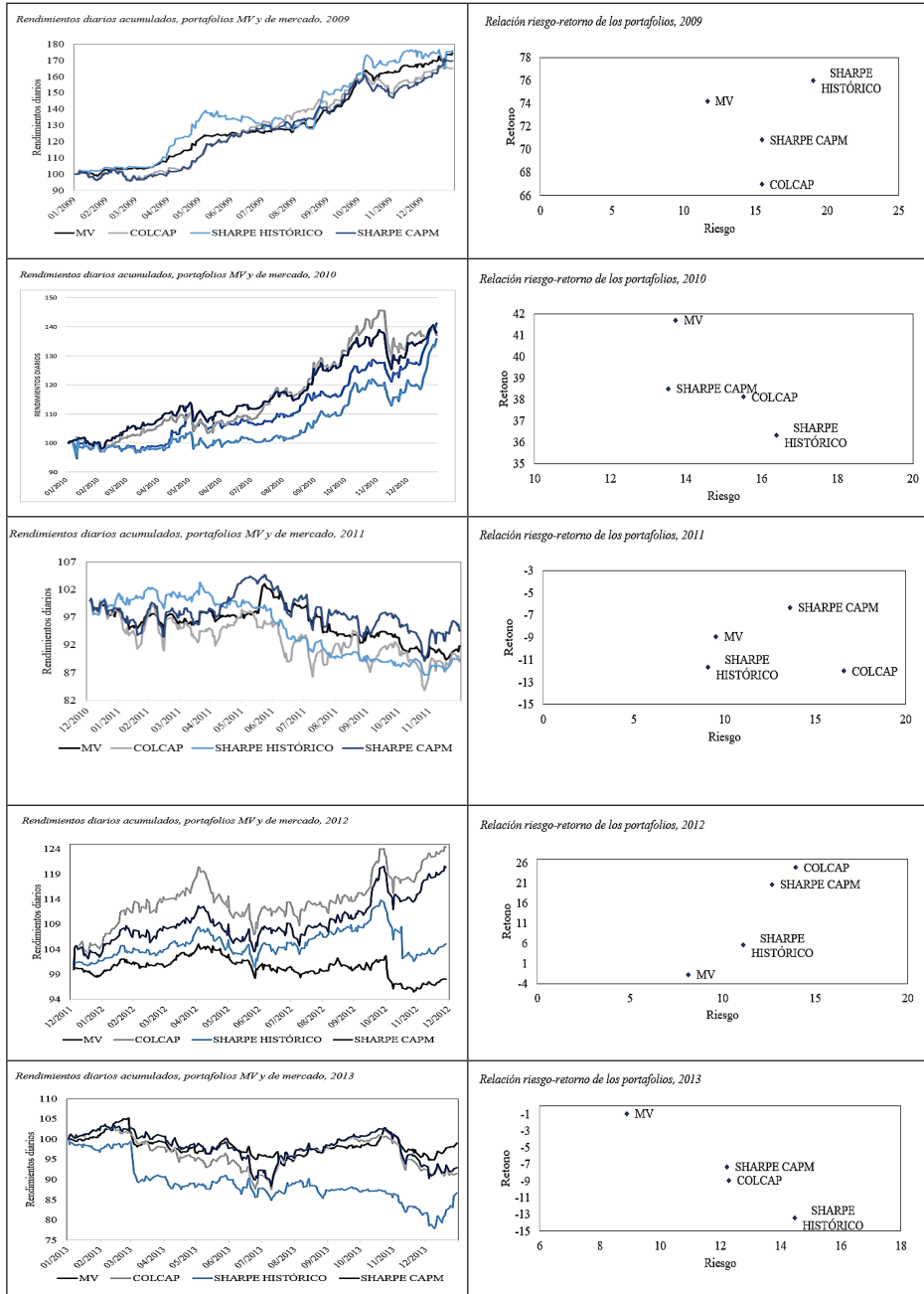
Ahora bien, para poder evidenciar los principales hallazgos, los cuales se encuentran expuestos en el gráfico 1 instrumento que contienen los resultados de los trece portafolios calculados para el período 2008-2020, es decir, se presentan portafolios a 13 años.

## Gráfico 1

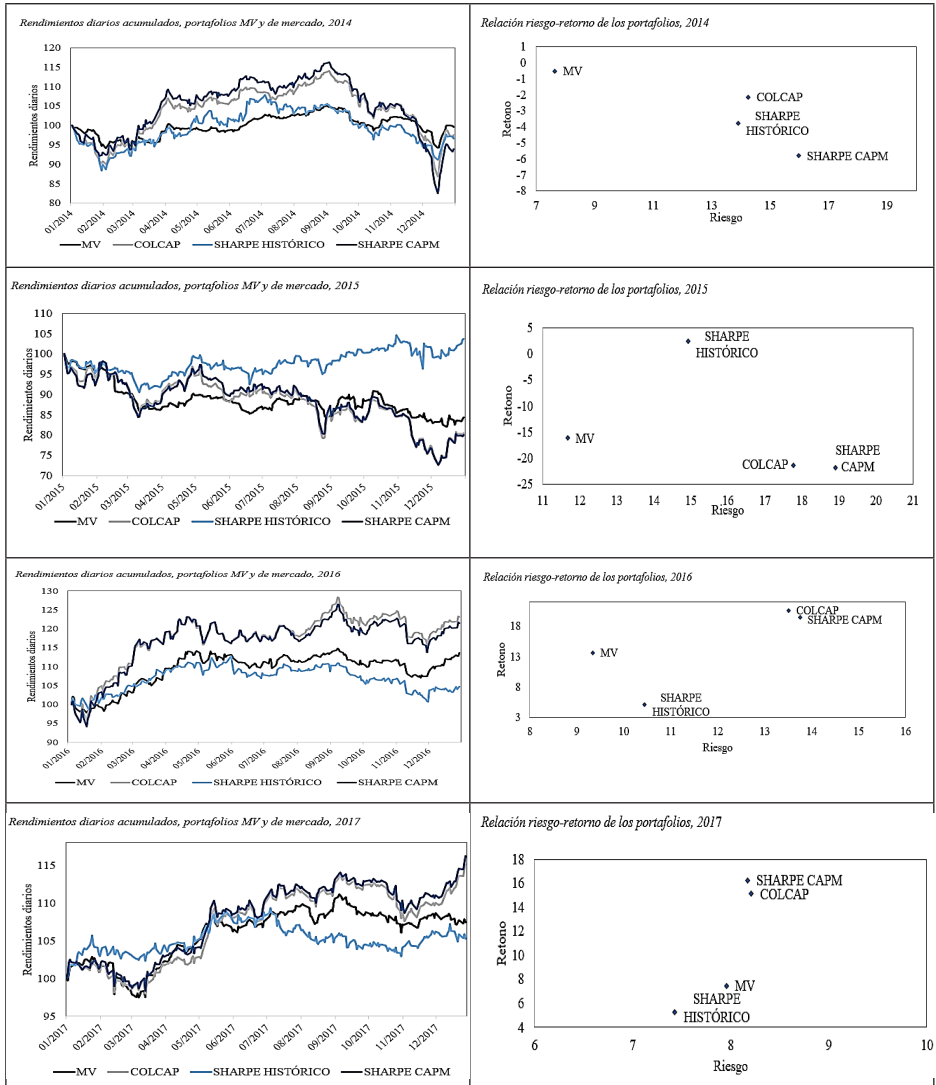
### Rendimientos diarios acumulados y relación riesgo retorno 2008-2020



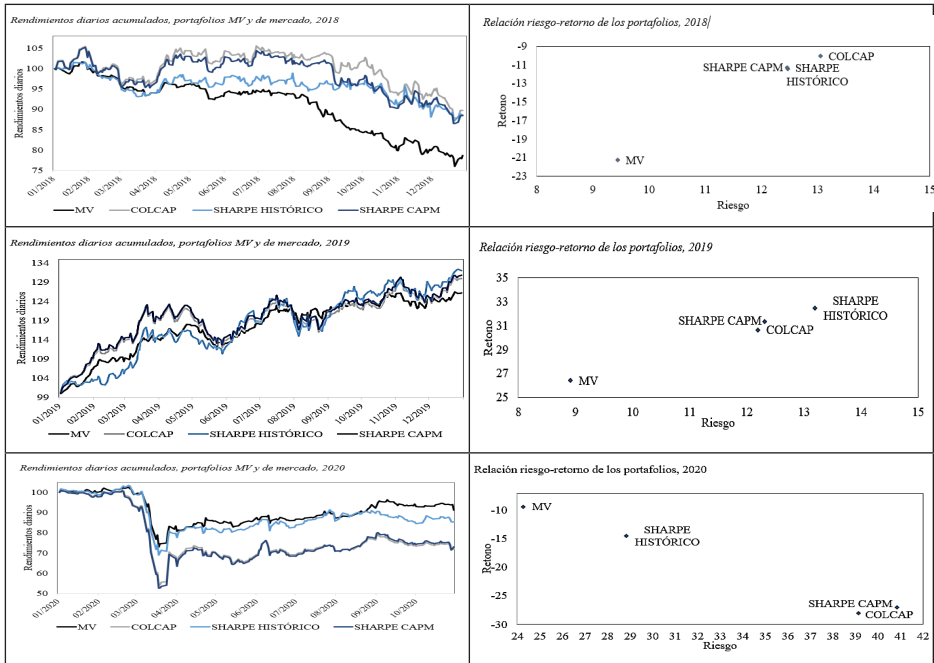
Cont... Gráfico 1



Cont... Gráfico 1



Cont... Gráfico 1



Fuente: elaboración propia, 2022 con base en datos acopiados de Economática.

Tomando como referencia solo el retorno generado de forma anual (tabla 1), es evidente que el año 2010, el Portafolio de MV superó a los demás portafolios tomados como Benchmark; de igual forma, es tangible y claro que los años 2013, 2014 y 2020, aunque los retornos del PMV rentaron con valores negativos, su retorno fue superior que los referentes con los que se comparó, evidenciando presencia de la

anormalidad en sus rendimientos. Estos hallazgos son prometedores para las estrategias de inversión por parte de corporativos y *traders* independientes, pues se ha comprobado que en los últimos años los aportes teóricos que han sido la base en los cálculos de la mayoría de las carteras de inversión están siendo empíricamente cuestionados en la práctica.



**Tabla 1**  
**Riesgos y retornos de los portafolios entre 2008 y 2020**

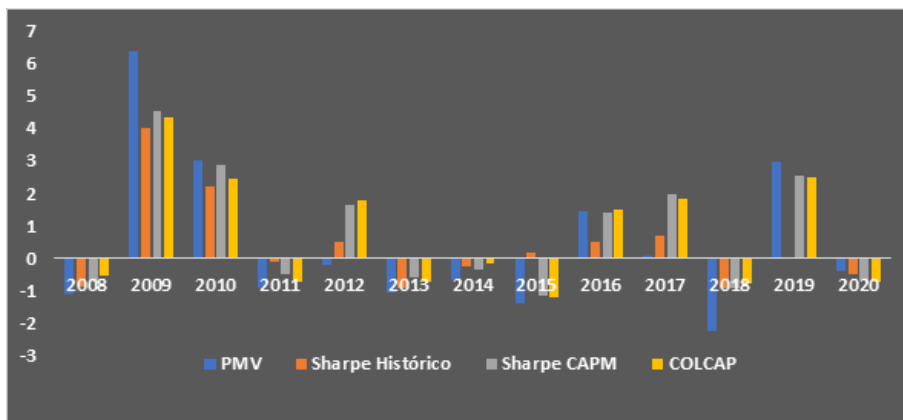
Años/ $\bar{X}$ - $\sigma$	PMV		Sharpe Histórico		Sharpe CAPM		COLCAP	
	$\bar{X}$	$\sigma$	$\bar{X}$	$\sigma$	$\bar{X}$	$\sigma$	$\bar{X}$	$\sigma$
2008	-24,5%	21,9%	-25,4%	29,1%	-20,9%	29,1%	-16,2%	30,2%
2009	74,2%	11,6%	75,9%	19,0%	70,8%	15,4%	66,9%	15,4%
2010	41,6%	13,7%	36,3%	16,3%	38,5%	13,5%	38,1%	15,5%
2011	-8,92%	9,53%	-11,6%	9,08%	-6,34%	13,6%	-12,0%	16,5%
2012	-1,75%	8,14%	5,51%	11,11%	20,65%	12,6%	24,82%	13,9%
2013	-0,93%	8,89%	-13,4%	14,46%	-7,34%	12,22%	-8,92%	12,28%
2014	-0,53%	7,64%	-3,77%	13,9%	-5,82%	15,9%	-2,14%	14,2%
2015	-16,1%	11,6%	2,43%	14,9%	-21,8%	18,9%	-21,3%	17,7%
2016	13,6%	9,34%	5,13%	10,44%	19,4%	13,74%	20,5%	13,50%
2017	7,44%	7,95%	5,26%	7,43%	16,2%	8,17%	15,1%	8,20%
2018	-21,1%	9,43%	-11,4%	12,47%	-11,3%	12,4%	-10,1%	13,0%
2019	26,4%	8,90%	32,4%	13,2%	31,3%	12,3%	30,6%	12,2%
2020	-9,35%	24,27%	-14,4%	28,83%	-27,0%	40,85%	-28,0%	39,12%

Fuente: elaboración propia (2022).

Por otra parte, para lograr determinar el desempeño de los portafolios analizándolos desde otra perspectiva de evaluación que sirve como soporte de decisión, se recurre

a la operativización del Cociente de Desempeño, *driver* que se obtiene de la interacción del Retorno sobre Riesgo ( $\bar{X} / \sigma$ ), dicho ejercicio y resultados se pueden apreciar en el Gráfico 2.

**Gráfico 2**  
**Cociente de desempeño de los portafolios entre 2008 y 2020**



Fuente: Elaboración propia (2022)

Al vincular el cociente de desempeño como referente de medición, se hace indiscutible que los años 2009, 2010 y 2019 el resultado del Portafolio de MV superó a los tres Benchmark, evidenciando desde luego la presencia de la anomalía de los retornos en los portafolios objeto de estudio, es decir el cociente entre riesgo retorno, fue mejor en los portafolios constituidos en el de mínima varianza logro un mejor comportamiento en términos de desempeño que los otros que asumen un mayor riesgo con la esperanza de un mejor retorno.

Aunado a lo anterior, es preciso mencionar que los actuales hallazgos son consistentes con los resultados logrados por Baker, Brendan & Wurgler (2011), pues según los autores en la medida en que las mediciones sean desarrolladas en períodos de mediano plazo, es decir, la conformada de 3 a 12 meses, el impulso en una cartera de baja

volatilidad histórica, supera una cartera de alta volatilidad histórica, lo anterior se explica, puesto que las posiciones de agentes de mercado institucionales se orientan a superar un índice de referencia fijo, acción que desalienta la actividad de arbitraje en acciones de alfas altos y betas bajos, como en acciones de alfas bajos con betas altos.

De igual forma, en el caso colombiano, Viveros (2013:29), señala que “hay evidencia parcial en periodos de tiempo relativamente amplios cercanos a los 12 meses para una estrategia de largo en activos de baja volatilidad y corto en activos de alta volatilidad”.

## 5. Conclusiones

La investigación presentada evidencia plausible de la presencia de la anomalía en el portafolio de Mínima Varianza en el mercado colombiano para periodo de tiempo medio, en contra

posición con los postulados planteados por la teoría financiera, la cual es considerada la anomalía más expedita del mundo de las finanzas. Para poder comprobar dicho fenómeno en el contexto nacional se utilizó las series temporales de 42 acciones colombianas, proporcionada por la herramienta para análisis de acciones y fondos de inversión Economatica.

El período de estudio seleccionado data desde enero del año 2008, hasta octubre del año 2020, de igual forma se calcularon cuatro series de portafolios de inversión, el primero de ellos fue el portafolio de Mínima Varianza, una segunda cartera construida fue la de Máximo Desempeño proyectado bajo la metodología de retornos históricos; un tercer Benchmark fue el de Máximo Desempeño proyectado bajo la metodología CAPM, y por último, el portafolio de mercado el cual se tomó como referente el índice COLCAP, con el fin de mostrar que el evento teórico de la anomalía del Portafolio de Mínima Varianza hace presencia en el mercado nacional.

Para lograrlo, se requirió de las series de los portafolios y la data de los índices, que fueron rebalanceados de forma mensual, construidos por un proceso de optimización utilizando el método de multiplicadores de Lagrange y álgebra matricial, se evidencia que al comparar las series de portafolios de forma anual para cada uno de los años estudiados, se encontró que hay varios años en donde la anomalía de baja volatilidad recusa los postulados de Markowitz, pues en los años 2010, 2013, 2014 y 2020, el PMV supera en términos de rentabilidad a los *benchmark* con los cuales fue evaluado.

Por otra parte, se encuentra material empírico para los años 2009,

2011 y 2015, en donde el portafolio de Mínima Varianza tuvo un mejor desempeño que dos portafolios de los tres portafolios con los que se comparó. Por último, durante el año 2008 y 2016 el PMV únicamente superó a un portafolio en la relación riesgo-retorno.

Según lo anterior, solo durante los años 2012, 2017, 2018 y 2019 no se presentó la anomalía en el desempeño del portafolio de Mínima Varianza en el mercado colombiano, debido en gran medida a la respuesta que da el mercado a los estímulos otorgados por los fundamentales, aunado a lo anterior, el limitado tamaño del contexto bursátil nacional en términos de profundidad como en emisores ayudan a consolidar lo expuesto por Markowitz en términos de riesgo-retorno.

Los resultados anteriores proporcionan grandes aportes para la discusión sobre la presencia de anomalías en los portafolios de inversión, particularmente el de Mínima Varianza. Asimismo, se evidencia que este tipo de análisis ha sido sutilmente estudiado, y pues en el territorio nacional este sería el segundo desarrollado en esta línea.

Finalmente, se indica que la evidencia aportada en el presente estudio no es suficiente para determinar las razones por las cuales se presenta la anomalía teórica estudiada, simplemente se dieron los primeros indicios de su existencia en el mercado colombiano.

## Referencias bibliográficas

- Ang, A., Hodrick, R., Xing, Y., & Zhang, X. (2009). High idiosyncratic volatility and low returns: International and further us evidence. *Journal of Financial Economics*, 91, 1-23.
- Ang, A., Hodrick, Y., Xing, Y., & Zhang, X. (2006). The cross-section of volatility

- and expected returns. *The Journal of Finance*, 61(1), 259-299.
- Baker, M., Brendan, B., & Wurgler, J. (2011). Benchmarks as limits to arbitrage: Understanding the low-volatility anomaly. *Financial Analysts Journal*, 67(1), 40-54. <https://doi.org/10.2469/faj.v67.n1.4>
- Bednarek, Z., & Patel, P. (2018). Understanding the outperformance of the minimum variance portfolio. *Finance Research Letters, Elsevier*, 24(C), 175-178.
- Blitz, D., & Groot, W. (2014). Strategic allocation to commodity factor premiums. *The Journal of Alternative Investments*, 17, 103-115.
- Blitz, D., Pang, J., & Van Vliet, P. (2013). The volatility effect in emerging markets. *Emerging Markets Review*, 16, 31-45.
- Cao, J., & Han, B. (2013). Cross section of option returns and idiosyncratic stock volatility. *Journal of Financial Economics*, 108, 231-249. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2012.11.010>
- Chiu, W., & Jiang, C. (2016). On the weight sign of the global minimum variance portfolio. *Finance Research Letters*, 19, 241-246. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.08.008>
- Clarke, R., De Silva, H., & Thorley, S. (2011). Minimum Variance Portfolio composition. *The Journal of Portfolio Management*, 37(2), 31-45.
- Franco, L., Avendaño, C., & Barbutín, H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, (26), 71-88.
- Frazzini, A., & Pedersen, H. (2014). Betting against beta. *Journal of Financial Economics*, 111(1), 1-25.
- Goldberg, L., Leshem, R., & Geddes, P. (2014). Restoring value to minimum variance. *Journal of Investment Management*, 12(2), 32-39. <https://joim.com/restoring-value-to-minimum-variance/>
- Haugen, R., & Baker, N. (1991). The efficient market inefficiency of capitalization-weighted stock portfolios. *The Journal of portfolio management*, 17(3), 35-40. <https://doi.org/10.3905/jpm.1991.409335>
- Kritzman, M., Page, S., & Turkington, D. (2010). In Defense of Optimization: The Fallacy of 1/N. *Financial Analysts Journal*, 66(2), 31-39. doi:<https://doi.org/10.2469/faj.v66.n2.6>
- Leote de Carvalho, R., Lu, X., & Moulin, P. (2012). Demystifying equity risk-based strategies: A simple alpha plus beta description. *The Journal of Portfolio Management*, 38(3), 56-70.
- Li, X., Sullivan, R., & García, L. (2014). The Limits to Arbitrage and the Low-Volatility Anomaly. *Financial Analysis Journal*, 70(1), 52-63. <https://doi.org/10.2469/faj.v70.n1.3>
- Maguire, P., Kelly, S., Miller, R., Moser, P., Hyland, P., & Maguire, R. (2017). Further evidence in support of a low-volatility anomaly: Optimizing buy-and-hold portfolios by minimizing historical aggregate volatility. Springer, 18, 326-339.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Medina, L. (2003). Aplicación de la teoría de portafolio en el mercado accionario colombiano. *Cuadernos de economía*, 22(39), 129-168. [http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0121-47722003000200007](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-47722003000200007)
- Michaud, R. (1989). The markowitz optimization enigma: Is optimized optimal? ICFA *Continuing Education*

- Series, 4, 43-54.
- Nielsen, F., & Aylursubramanian, R. (2008). Far From the Madding Crowd – Volatility Efficient Indices. MSCI Barra Research, 1-14. <https://docplayer.net/40142089-Far-from-the-madding-crowd-volatility-efficient-indices-april-2008.html>
- Pyo, S., & Lee, J. (2018). Exploiting the low-risk anomaly using machine learning to enhance the Black–Litterman framework: Evidence from South Korea. *Pacific-Basin Finance Journal*, 51, 1-12.
- Scherer, B. (2011). A note on the returns from minimum variance investing. *Journal of Empirical Finance*, 18(4), 652-660.
- Van Leur, N. (2013). The Minimum Variance Portfolio. Tilburg University. <http://arno.uvt.nl/show.cgi?fid=131072>
- Viveros, C. (2013). Evaluación de la significancia de la anomalía de baja volatilidad en el mercado accionario colombiano. Universidad ICESI.
- Yanushevsky, R., & Yanushevsky, D. (2015). Comment on “a note on the returns from minimum variance investing. *Journal of Empirical Finance*, 31, 109-110.