

## Determination of the solution of the integral double of Fresnel to predict the electromagnetic attenuation in the case of double knife edges with ground reflexion

Venancio Balassone<sup>1,2</sup>, Hernán Romero<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia.

<sup>2</sup>Centro Local Zulia, Universidad Nacional Abierta.

vbalassone@fing.luz.edu.ve; hernanrafaelromero@hotmail.com

### Abstract

The effect of the attenuation caused by obstacles such as “knife edge” is a major communication problem for fixed receivers and / or mobile. In this paper the propagation mechanism, by different paths, is studied when radio waves interact with metal objects and / or dielectric. The mechanisms governing the radio propagation are complex and diverse. Generally, the losses are attributed to the phenomenon of diffraction, reflection, refraction and dispersion or combinations thereof, all this according to the frequency band used and the atmospheric environment in which electromagnetic waves propagate. This paper presents an explicit development of the double integral Fresnel Xiongwen raised by Zhao, whose resolution is obtained by means of mathematical analysis techniques, after already raised the integral approach which is reached from theoretical developments in physical - mathematical, using the Fresnel-Kirchhoff theory to predict the electromagnetic attenuation in the case of one and multiple “knife edges”. This paper considers only the phenomena of diffraction and reflection, for one and double knife edges.

**Keywords:** diffraction, double edge of knife, radio propagation.

## Determinación de la solución de la integral doble de Fresnel para predecir la atenuación electromagnética en el caso de doble filo de cuchillo con reflexión en la superficie terrestre

### Resumen

El efecto de la atenuación causada por obstáculos tipo “filo de cuchillo” es un importante problema de comunicación para receptores fijos y/o móviles. En este trabajo el mecanismo de propagación, por diferentes trayectorias, es estudiado cuando ondas de radio interactúan con objetos metálicos y/o dieléctricos. Los mecanismos que gobiernan la radio propagación son complejos y diversos. Generalmente, las pérdidas son atribuidas a los fenómenos de difracción, reflexión, refracción y dispersión o sus combinaciones, todo esto, dependiendo de la banda de frecuencia utilizada y al medio atmosférico en el cual se propagan las ondas electromagnéticas. Este trabajo presenta un desarrollo explícito de la integral doble de Fresnel, planteada por Xiongwen Zhao, cuya resolución se obtiene por medio de técnicas de métodos numéricos, después de planteada la integral y a cuyo planteamiento se llega a partir de desarrollos teóricos de carácter físico - matemático, recurriendo a la teoría de Fresnel-Kirchhoff para predecir la atenuación electromagnética en el

caso de uno y doble fillos de cuchillos. En este trabajo se considera solamente los fenómenos de difracción y reflexión, para uno y dos "fillos de cuchillos".

**Palabras clave:** difracción, reflexión, doble filo de cuchillo, radio propagación.

## Introducción

La física óptica o la teoría de Fresnel - Kirchhoff, es usada frecuentemente para analizar problemas de propagación de ondas de radio terrestres, aplicando eficientes técnicas numéricas, las cuales constituyen una herramienta matemática importante utilizada en el desarrollo de modelos de predicción que contribuyen a una mejor planificación y dimensionamiento de sistemas de comunicaciones terrestres, lo que redundará en un aumento en la precisión en la estimación del nivel de señal recibida en un sistema de comunicaciones inalámbricas. Se presenta un algoritmo que permite predecir la atenuación de una señal de radiofrecuencia en presencia de dos obstáculos, considerando solamente los fenómenos de difracción y reflexión.

## Formulación matemática

La Figura 1 muestra la geometría para el estudio del fenómeno de difracción y reflexión para el caso de doble "fillo de cuchillo", en la cual se aprecian los obstáculos y las antenas transmisora y receptora, donde  $H_T$ ,  $H_R$ ,  $H_1$  y  $H_2$  son las alturas relativas a tierra para el transmisor, el receptor, y los dos fillos de cuchillos, respectivamente.

### Atenuación para doble fillo de cuchillo, con reflexión desde tierra

Se considera la difracción con reflexión debido a doble fillo de cuchillo. Se asume que  $H_T$ ,  $H_R$ ,  $H_1$  y  $H_2$  son las alturas relativas a tierra para el transmisor, el receptor y los fillos de cuchillos.

Las distancias entre el transmisor y el primer fillo de cuchillo, entre los dos fillos de cuchillo y el segundo fillo de cuchillo y el receptor son  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , respectivamente. En la formulación matemática son  $R_{F1}$ ,  $R_{F2}$ ,  $R_{F3}$  los coeficientes de reflexión correspondientes a las regiones que comprenden las distancias  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente. Si se mantiene el punto de transmisión como punto de referencia, el campo recibido relativo al espacio libre, en el punto  $R$  es según [1]:

$$E(R) = \left( \frac{k}{2\pi j} \right) \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \times \int_{h_1}^{\infty} \int_{h_2}^{\infty} dz_1 dz_2 \left\{ 1 + R_{F1} \exp \left[ jk \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \right\}^* \left[ \exp(jkr_0) + R_{F2} \exp(jkr'_0) \right] \left[ \exp(jkr) + R_{F3} \exp(jkr') \right] \quad (1)$$

$$r_0 = \frac{a+b}{2ab} \left( z_1 - \frac{a}{a+b} z_2 \right)^2 \quad (2)$$

$$r'_0 = \frac{a+b}{2ab} \left( z_1 + \frac{a}{a+b} z_2 \right)^2 + \frac{2(z_1 + z_2)H_T}{b} + \frac{2H_T^2}{b} \quad (3)$$

$$r = \frac{a+b+c}{2(a+b)c} \left[ z_2 - \frac{a+b}{a+b+c} (H_R - H_T) \right]^2 \quad (4)$$

$$r' = \frac{(a+b+c)}{2(a+b)c} \left[ z_2 + \frac{a+b}{a+b+c} (H_R - H_T) \right]^2 + \frac{2z_2 H_T}{c} + \frac{2H_R H_T}{c} \quad (5)$$

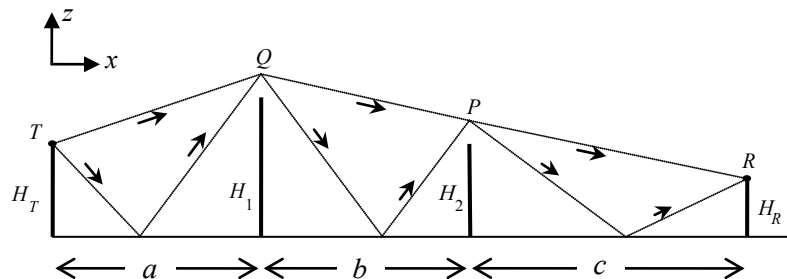


Figura 1. Representación gráfica de doble fillo de cuchillos.

$h_1 = H_1 - H_T$ ,  $h_2 = H_2 - H_T$ . Se asume que los coeficientes de reflexión desde tierra son constantes y que la ecuación (1) se divide en ocho campos, desde  $E_1$  hasta  $E_8$ .

$$E_1(R) = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \times \int_{h_1}^{\infty} dz_1 \int_{h_2}^{\infty} dz_2 * \exp(jkr_0) * \exp(jkr) \quad (6)$$

$$E_8(R) = R_{F1} R_{F2} R_{F3} \exp \left( jk \frac{2H_T^2}{a} \right) * \frac{k}{2\pi j} * \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \int_{h_1}^{\infty} dz_1 \int_{h_2}^{\infty} dz_2 * \exp \left( jk \frac{2z_1 H_T}{a} \right) \exp(jkr_0) \exp(jkr) \quad (7)$$

Por simplicidad, se hace:

$$\Omega = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \int_{h_1}^{\infty} dz_1 \int_{h_2}^{\infty} dz_2$$

$$\bar{E} = \Omega \left\{ \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F1} \times \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F2} \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F1} R_{F2} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \times \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F3} \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F1} R_{F3} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \times \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F2} R_{F3} \exp(ikr_0) \exp(ikr) + R_{F1} R_{F2} R_{F3} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \exp(ikr_0) \exp(ikr) \right\} \quad (8)$$

Al desarrollar la ecuación (8) se obtienen ocho campos, llamados

$$\bar{E}_1 = \Omega * \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (9)$$

$$\bar{E}_2 = \Omega * R_{F1} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (10)$$

$$\bar{E}_3 = \Omega * R_{F2} \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (11)$$

$$\bar{E}_4 = \Omega * R_{F3} \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (12)$$

$$\bar{E}_5 = \Omega * R_{F1} R_{F2} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \times \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (13)$$

$$\bar{E}_6 = \Omega * R_{F1} R_{F3} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \times \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (14)$$

$$\bar{E}_7 = \Omega * R_{F2} R_{F3} \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (15)$$

$$\bar{E}_8 = \Omega * R_{F1} R_{F2} R_{F3} \exp \left[ ik \frac{2(z_1 + H_T)H_T}{a} \right] \times \exp(ikr_0) \exp(ikr) \quad (16)$$

El significado físico de los ocho campos son: difracción-difracción ( $E_1$ ), difracción-difracción-reflexión ( $E_4$ ), difracción-reflexión-difracción ( $E_3$ ), difracción-reflexión-difracción-reflexión ( $E_7$ ), reflexión-difracción-difracción ( $E_2$ ), reflexión-difracción-difracción-reflexión ( $E_6$ ), reflexión-difracción-reflexión-difracción ( $E_5$ ), reflexión-difracción-reflexión-difracción-reflexión ( $E_8$ ).

El objetivo de este trabajo es evaluar la integral que define el campo  $E_1$  ya que los campos restantes se calculan de manera análoga [2-5]. Se tiene entonces:

$$E_1 = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \int_{h_1}^{\infty} \int_{h_2}^{\infty} \exp(jk(r+r_0)) dz_2 dz_1 \quad (17)$$

Es decir,

$$r + r_0 = \frac{a+b+c}{2(a+b)c} \times \left[ z_2 - \frac{a+b}{a+b+c} (H_R - H_T) \right]^2 + \frac{a+b}{2ab} \left( z_1 - \frac{a}{a+b} z_2 \right)^2 = \gamma (z_1 - \sigma z_2)^2 + \alpha (z_2 - \beta)^2$$

donde,

$$\gamma = \frac{a+b}{2ab}, \quad \sigma = \frac{a}{a+b}, \quad \alpha = \frac{a+b+c}{2(a+b)c},$$

$$\beta = \frac{a+b}{a+b+c} (H_R - H_T)$$

de donde,

$$-\beta = \frac{a+b}{a+b+c} (H_T - H_R)$$

$$-\beta = \beta' (H_T - H_R) = \frac{a+b}{a+b+c} (H_T - H_R)$$

Y en consecuencia

$$r + r_0 = \gamma (z_1 - \sigma z_2)^2 + \alpha \left[ z_2 + \beta' (H_T - H_R) \right]^2 \quad (18)$$

Se hace un cambio de variable mediante la siguiente transformación [2-4],

$$T(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta' (H_T - H_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - \sigma z_2 \\ z_2 + \beta' (H_T - H_R) \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = T(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 - \sigma z_2 \\ z_2 + \beta' (H_T - H_R) \end{bmatrix}$$

Lo cual es equivalente a,

$$u = z_1 - \sigma z_2 \quad y \quad v = z_2 + \beta' (H_T - H_R)$$

de donde,

$$z_1 = u + \sigma z_2, \quad z_2 = v - \beta' (H_T - H_R)$$

Es decir,

$$z_1 = u + \sigma \left[ v - \beta' (H_T - H_R) \right] = u + \sigma v - \sigma \beta' (H_T - H_R) = u + \sigma v + \sigma \beta' (H_R - H_T)$$

$$z_1 = u + \sigma v + \sigma \beta' (H_R - H_T)$$

Esto es,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T^{-1}(u, v) \text{ donde } T^{-1} \text{ es la transformación inversa de } T.$$

O sea,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma \beta' (H_R - H_T) \\ -\beta' (H_T - H_R) \end{bmatrix}$$

Calculando el Jacobiano de la transformación  $T^{-1}$  tenemos,

$$z_1 = u + \sigma v + \sigma \beta' (H_R - H_T)$$

$$z_2 = v - \beta' (H_T - H_R)$$

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial z_2}{\partial u} & \frac{\partial z_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Y entonces,

$$E_1 = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \int_{h_1}^{\infty} \int_{h_2}^{\infty} \exp(jk(r+r_0)) dz_2 dz_1$$

$$E_1 = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \int_{h_1}^{\infty} \int_{h_2}^{\infty} \exp(jk[\gamma(z_1 - \sigma z_2)^2 + \alpha(z_2 + \beta' (H_T - H_R))^2]) dz_2 dz_1$$

$$\int_{h_1}^{\infty} \int_{h_2}^{\infty} \exp(jk[\gamma(z_1 - \sigma z_2)^2 + \alpha(z_2 + \beta' (H_T - H_R))^2]) dz_2 dz_1$$

Luego,

$$E_1 = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2} \int_{h_1 - \sigma h_2}^{\infty} \int_{h_2 + \beta' (H_T - H_R)}^{\infty} \exp[jk(\gamma u^2 + \alpha v^2)] dv du$$

$$\Delta = \frac{k}{2\pi j} \left( \frac{a+b+c}{abc} \right)^{1/2}$$

Entonces,

$$E_1 = \Delta \int_{(h_1 - \sigma h_2)}^{\infty} \int_{(h_2 + \beta'(H_T - H_R))}^{\infty} \exp jk(\gamma u^2 + \alpha v^2) dv du$$

Ahora bien  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{2\lambda}$  y en consecuencia

$$E_1 = \Delta \int_{h_1 - \sigma h_2}^{\infty} \int_{h_2 + \beta'(H_T - H_R)}^{\infty} \exp j \frac{\pi}{2} \left( \frac{4\gamma}{\lambda} u^2 + \frac{4\alpha}{\lambda} v^2 \right) dv du$$

Se hace

$$\eta^2 = \frac{4\gamma}{\lambda} u^2 \text{ y } \xi^2 = \frac{4\alpha}{\lambda} v^2$$

$$u = \eta \sqrt{\frac{\lambda}{4\gamma}} \text{ y } v = \xi \sqrt{\frac{\lambda}{4\alpha}}$$

El Jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\eta,\xi)} = \frac{\lambda}{4} \sqrt{\frac{1}{\alpha\gamma}}$$

Pero,

$$\alpha\gamma = \frac{a+b+c}{2(a+b)c} \left( \frac{a+b}{2ab} \right) = \frac{a+b+c}{4abc}$$

Luego,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\eta,\xi)} = \lambda \left( \frac{1}{4} \right) \left( \sqrt{\frac{4abc}{a+b+c}} \right) = \frac{\lambda}{2} \left( \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} \right)$$

Por lo tanto,

$$E_1 = \Delta \int_{h_1 - \sigma h_2}^{\infty} \int_{h_2 + \beta'(H_T - H_R)}^{\infty} \exp \left[ j \frac{\pi}{2} \left( \frac{4\gamma}{\lambda} u^2 + \frac{4\alpha}{\lambda} v^2 \right) \right] dv du$$

$$E_1 = \Delta \int_{(h_1 - \sigma h_2) \sqrt{\frac{4\gamma}{\lambda}}}^{\infty} \int_{(h_2 + \beta'(H_T - H_R)) \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda}}}^{\infty} \exp \left[ j \frac{\pi}{2} (\eta^2 + \xi^2) \right] \frac{\partial(u,v)}{\partial(\eta,\xi)} d\xi d\eta$$

$$E_1 = \Delta \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} \int_{g_1}^{\infty} \int_{w_1}^{\infty} \exp j \frac{\pi}{2} (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta$$

$$w_1 = \left( h_2 + \beta'(H_T - H_R) \right) \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda}}$$

$$g_1 = \left( h_1 - \sigma h_2 \right) \sqrt{\frac{4\gamma}{\lambda}}$$

$$\Delta \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = \frac{k}{2\pi j} \sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = -\frac{j}{2}$$

Es decir,

$$E_1 = \frac{-j}{2} \int_{g_1}^{\infty} \int_{w_1}^{\infty} \exp j \frac{\pi}{2} (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta$$

Lo cual permite escribir,

$$E_1 = \frac{-j}{2} \left[ \int_{g_1}^{\infty} \exp \left( j \frac{\pi}{2} \eta^2 \right) d\eta \right] \left[ \int_{w_1}^{\infty} \exp \left( j \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi \right]$$

El problema se reduce entonces a calcular,

$$\int_a^{\infty} \exp j \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx$$

con  $a = g_1$  y  $a = w_1$

Se tiene entonces que

$$\int_a^{\infty} \exp j \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx = \int_0^{\infty} \exp j \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx - \int_0^a \exp j \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx$$

El cálculo de

$$\int_0^{\infty} \exp j \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx$$

Se reduce a las integrales de Fresnel:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \text{sen} x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

En efecto

$$\int_0^{\infty} \exp j \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx =$$

$$\int_0^{\infty} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) + j \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) \right) dx =$$

$$\int_0^{\infty} \cos \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx + j \int_0^{\infty} \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx$$

Sea,

$$u^2 = \frac{\pi}{2} x^2, \quad u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x, \quad du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} dx, \quad dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \int_0^\infty \cos u^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}du + j \int_0^\infty \sin u^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \int_0^\infty \cos u^2 du + j \int_0^\infty \sin u^2 du \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + j \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$\int_0^\infty \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$$

Finalmente,

$$\int_a^\infty \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx =$$

$$\int_0^\infty \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx - \int_0^a \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) - \int_0^a \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$$

Y así,

$$E_1 = -\frac{j}{2} \left[ \int_{g_1}^\infty \exp j\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right)d\eta \right] \left[ \int_{w_1}^\infty \exp j\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi \right] \quad (19)$$

$$E_1 = -\frac{j}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j - \int_0^{g_1} \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \right] \times$$

$$\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j - \int_0^{w_1} \exp j\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \right] \quad (20)$$

De manera análoga se obtiene

$$E_8 = -\frac{j}{2} R_{F1} R_{F2} R_{F3} \exp(jkC_2) \times$$

$$\left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) - \int_0^{g_8} \exp\left(j\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \right] \times$$

$$\left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) - \int_0^{w_8} \exp\left(j\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \right] \quad (21)$$

$$C_2 = 4\gamma H_T \sigma \beta (H_R - H_T) -$$

$$2H_T \left(\frac{b+c}{bc}\right) \beta' (H_R - H_T) +$$

$$\frac{2}{c} H_R H_T - \frac{H_T^2}{\alpha} \left(\frac{b+c}{bc} - 2\gamma\sigma\right)^2$$

$$g_8 = (h_1 + \sigma h_2 + 2H_T) \sqrt{\frac{4\gamma}{\lambda}}$$

$$w_8 = \left[ h_2 + \beta' (H_R - H_T) + \frac{H_T}{\alpha} \left(\frac{b+c}{bc} - 2\gamma\sigma\right) \right] \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda}}$$

### Resultados y discusión

En este estudio se observó que, al comparar la Figura 2 con la curva obtenidas por Xiongwen Zhao, en la Figura 7, de su trabajo [1], para obtener esta curva se utilizaron los ocho campos. Se aprecia coincidencia en las formas de las curvas así como en los valores de las abscisas en los cuales se alcanzan los máximos y mínimos y también en los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En las Figuras 3 y 4 se observan curvas muy parecidas a las curvas obtenidas en las Figuras 3 y 4 del trabajo realizado por los autores Schneider and Luebbers [6], se utilizaron los ocho campos, pero con los coeficientes de reflexión iguales a cero.

En las Figuras 5 y 6 se observan curvas muy parecidas a la curva obtenida por X. Zhao en las

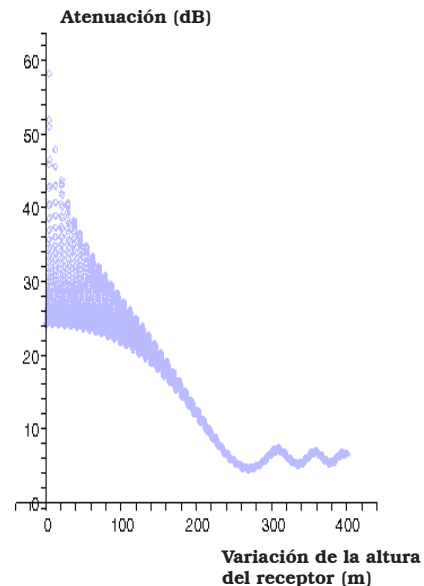


Figura 2. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo con reflexión desde tierra variando la altura del receptor, desde cero metros hasta 400 m, con  $a = 8000$  m y  $b = 2000$  m y  $c = 10000$  m.  $\lambda = 0.3$  m.  $H_T = H_1 = H_2 = 200$  m.  $R_{F1} = R_{F2} = R_{F3} = 1$ .

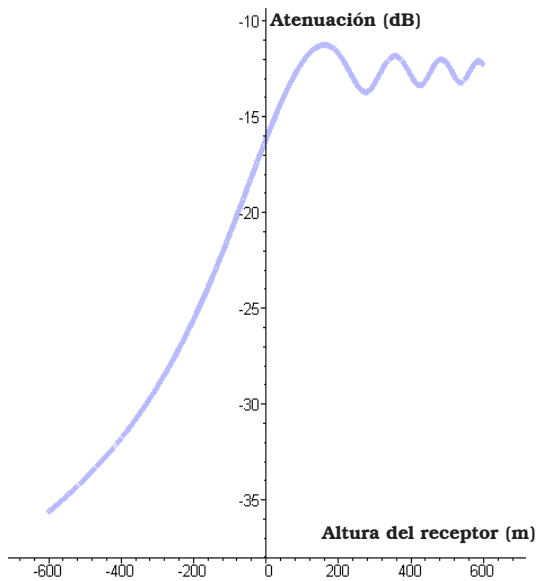


Figura 3. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo, variando la altura del receptor para los parámetros, igual a  $3.00\text{ m}$ ,  $\lambda = 3.0\text{ m}$ ,  $a = 8000\text{ m}$ ,  $b = 2000\text{ m}$ ,  $c = 10000\text{ m}$ ,  $H_T = H_1 = H_2 = 50\text{ m}$ .

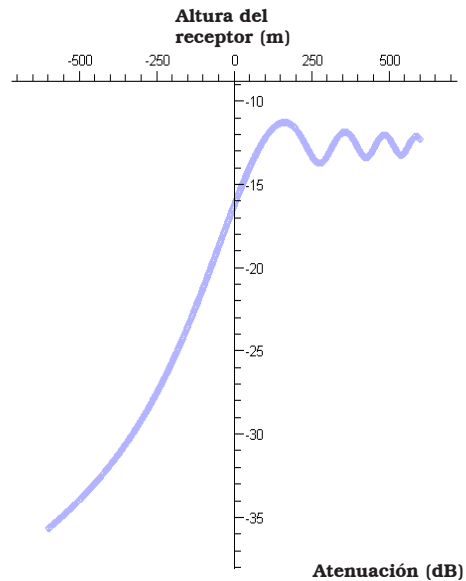


Figura 4. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo, variando la altura del receptor para los parámetros  $\lambda = 3.0\text{ m}$ ,  $a = 8000\text{ m}$ ,  $b = 2000\text{ m}$ ,  $c = 10000\text{ m}$ ,  $H_T = H_1 = 50\text{ m}$ ,  $H_2 = 0\text{ m}$ .

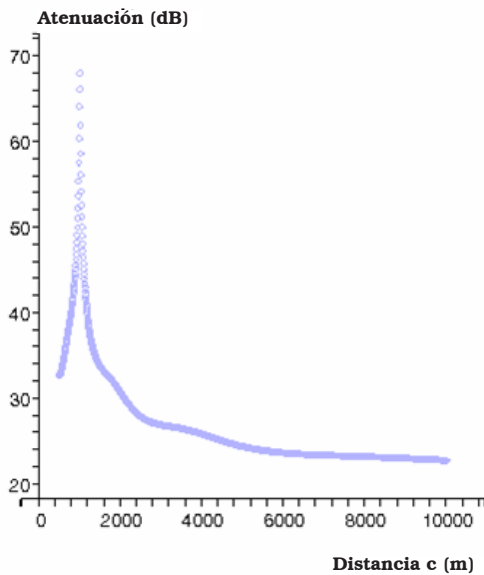


Figura 5. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo con reflexión desde tierra variando la distancia  $c$ , que separa al último obstáculo del receptor, el cual está en movimiento. La distancia  $c$ , que separa el segundo obstáculo del receptor, varía desde  $500\text{ m}$  hasta  $10000\text{ m}$ , con  $a = 1000\text{ m}$  y  $b = 1000\text{ m}$ .  $\lambda = 0.333\text{ m}$  con  $R_{F1} = R_{F2} = R_{F3} = 1$ .

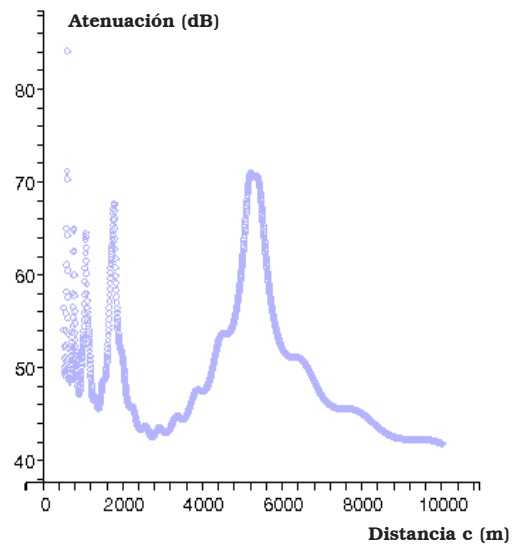


Figura 6. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo con reflexión desde tierra variando la distancia  $c$ , que separa al último obstáculo del receptor, el cual está en movimiento. La distancia  $c$ , que separa el segundo obstáculo del receptor, varía desde  $500\text{ m}$  hasta  $10000\text{ m}$ , con  $a = 1000\text{ m}$  y  $b = 1000\text{ m}$ .  $\lambda = 0.6\text{ m}$  con  $R_{F1} = R_{F2} = R_{F3} = 1$ .

Figuras 6a y 6b, de su trabajo [1], y coincidencias en los ejes de las abscisas, para obtener estas curvas, se utilizaron los ocho campos, con polarización vertical, es decir,  $R_{F1} = R_{F2} = R_{F3} = 1$ .

En las Figuras 7 y 8 se observan coincidencias con las curvas obtenidas por Y. Xu, Q. Tan, Giusepped D`Elia, Umberto G. Crovella, D. Erricolo y P. Uslenghi, en sus trabajos [7-10], haciendo la salvedad de que estos investigadores toman en consideración el ancho de los obstáculos, y con las curvas obtenidas por Komijani, Mirkamali y Nateghi usando el método de imágenes [11]. Para obtener cada curva se utilizaron los ocho campos.

En todos los casos existe un desplazamiento vertical de pocos decibelios, en los ejes de las ordenadas, de las curvas obtenidas en relación con las curvas que han servido como referencias, originadas posiblemente por el método matemático, ya que cada método ofrece una aproximación que puede ser por exceso o por defecto.

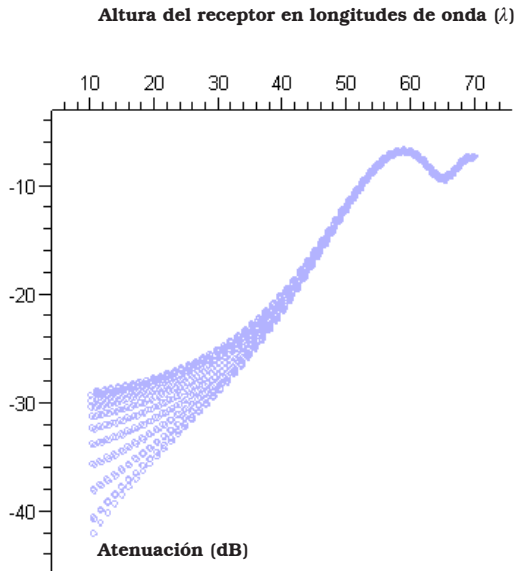


Figura 7. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo, con reflexión desde tierra, variando la altura del receptor. La frecuencia de operación es de 25 GHz,  $H_T = 39.17\lambda$ ,  $H_1 = H_2 = 16.91\lambda$ ,  $a = 96.08\lambda$ ,  $b = 16.9\lambda$ ,  $c = 96.08\lambda$ ,  $R_{F1} = R_{F2} = R_{F3} = 1$ .

## Conclusiones

Se obtuvo una solución analítica de la integral doble de Fresnel. Esto se logró mediante el uso de métodos de análisis matemáticos, relacionados con el cálculo de integrales dobles, que se basaron en cambios de variables adecuados a la formulación del problema. Esto permitió, a través del concepto de integral doble definida, transformar dicha integral en integrales de Fresnel unidimensionales, fáciles de evaluar. De esa manera, se consiguió la solución analítica y gráfica de la función integral planteada.

Dada la naturaleza aproximada de los métodos de análisis numérico conocido, se consiguieron diferencias no significativas en los casos abordados en la presente investigación al comparar las soluciones gráficas obtenidas con las soluciones gráficas obtenidas por los investigadores ya mencionados, en sus respectivos trabajos.

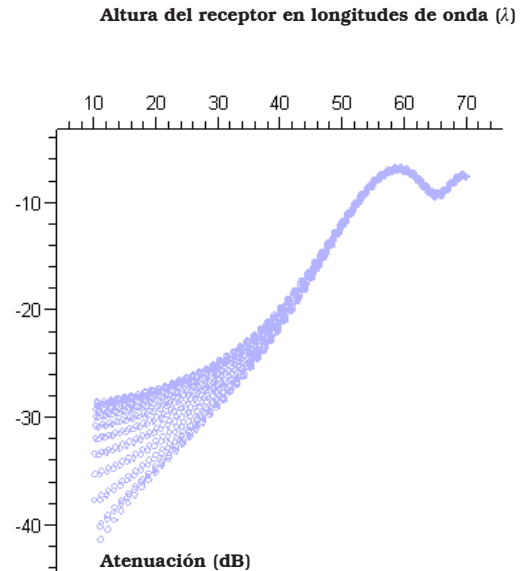


Figura 8. Atenuación relativa al espacio libre para doble filo de cuchillo, con reflexión desde tierra, variando la altura del receptor. La frecuencia de operación es de 25 GHz,  $H_T = 39.17\lambda$ ,  $H_1 = H_2 = 16.91\lambda$ ,  $a = 96.08\lambda$ ,  $b = 16.9\lambda$ ,  $c = 96.08\lambda$ ,  $R_{F1} = R_{F2} = R_{F3} = -1$ .



### Referencias bibliográficas

1. Xiongwen Zhao and Pertti Vainikainen. "Multipath Propagation Study Combining Terrain Diffraction and Reflection". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 49, N° 8 (2001).
2. Kreyszig Erwin, Matemáticas avanzadas para ingeniería. Editorial Limusa, Tercera edición de 1976.
3. Courant R., John F., Introducción al cálculo y al análisis matemático. Editorial Limusa, segunda reimpresión de 1984.
4. Pastor Julio Rey, Calleja Pedro, Trejo Cesar A. Análisis matemático: Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones. Editorial Kapelusz, Vol. II, Séptima edición de 1968. Buenos Aires-Argentina.
5. Lewis Vogler. "An attenuation function for multiple knife-edge diffraction", RadioScience, Vol. 17, N° 6 (1982), 1541-1546.
6. Michael Schneider and Raymond J. Luebbers. "A general, uniform double wedge diffraction coefficient" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 39, N° 1 (1991).
7. Ying Xu, Q Tan, Danilo Erricolo, Piergiorgio L. E. Uslenghi, "Experimental Verification of a 3-D Propagation Model Based on Fresnel-Kirchhoff Integral", IEEE 3653 (2004).
8. Ying Xu, Qiwu Tan, Danilo Erricolo and Piergiorgio L. E. Uslenghi. "Fresnel-Kirchhoff Integral for 2-D and 3-D Path Loss in Outdoor Urban Environments", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 53, N° 11 (2005).
9. Danilo Erricolo, Giuseppe D'Elia, Piergiorgio L. E. Uslenghi. "Measurements on Scaled Models of Urban Environments and Comparisons with Ray-Tracing Propagation Simulation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 50, N° 5 (2002).
10. Danilo Erricolo, Umberto G. Crovella, and Piergiorgio L. E. Uslenghi. "Time-Domain Analysis of Measurements on Scaled Urban Models with comparisons to Ray-Tracing Propagation Simulation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 50, N° 5 (2002).
11. Javad Komijani, Ali Mirkamali, Jafar Nateghi. "Combining Multiple Knife-Edge Diffraction and Ground Reflections for Terrain Path Loss Calculation", Fourth Conference on Antennas and Propagation (EuCAP2010), Barcelona, Spain, April 2010.

Recibido el 18 de Enero de 2014

En forma revisada el 19 de Enero de 2015