Rev.Téc.Ing., Univ.Zulia
Vol.3 , N°2 , 1980

UN PROBLEMA DE CONDUCCION PARA UN MEDIO INHOMOGENEO

A. Battig
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
Tucumán, Argentina

S.L. Kalla
División de Postgrado, Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

RESUMEN

Consideramos el problema de la distribución térmica en un cuerpo de extensión infinita en la dirección radial y que tiene un hueco cilíndrico de radio a $(a \leqslant r < \infty)$. Supondremos que el cuerpo tenga espesor finito , cuyo rango de variación es $0 \leqslant z \leqslant 1$, y que la conductividad térmica depende de la coordenada z en la forma $k_z = \beta(1 - z^2)$, donde $\beta = \rho c$, siendo ρ la densidad del medio y c es su calor específico. Las transformadas de Weber y de Legendre han sido utilizadas para conseguir la solución.

ABSTRACT

We consider a problem of heat distribution in an infinite body $(a \leqslant r < \infty)$ with a cylindrical cavity of radius a at the center. Sup-

pose that the body is of finite thickness $0 \leqslant z \leqslant 1$, and the thermic conductivity depends on the z-coordinate as $k_z = \beta(1 - z^2)$, where $\beta = \rho c$; ρ is the density of the medium and c is the specific heat. The Weber and Legendre transforms have been used to obtain the solution.

1. INTRODUCCION

Problemas de distribución térmica en cuerpos de forma cilíndrica se presentan con gran frecuencia en la Física y la Ingeniería. El intervalo de variación de las variables que definen la geometría del cuerpo es muy distinto y depende de la naturaleza del problema. Es así como los intervalos pueden ser $(-\infty,+\infty)$; $(0,\infty)$; $(0,h)$; $(-1,1)$; $(0,1)$; etc. De acuerdo al tipo de intervalo que define el problema, se emplea la transformada integral adecuada para la solución de la ecuación diferencial que corresponda. Las transformadas integrales más usuales son la de Laplace, Fourier, Hankel y Legendre. Cuando el intervalo de variación de una de las variables del problema está comprendido entre un valor finito a y el infinito, entonces un método para la solución de la ecuación diferencial consiste en emplear la transformada de Laplace; pero el cálculo de la inversión de la transformada es en general muy tedioso y complicado; así lo hace por ej. Carslaw and Jaeger [1].

Vamos a tratar el problema de la distribución térmica en un cuerpo de extensión infinita en la dirección radial y que tiene un hueco cilíndrico de radio a; siendo por lo tanto el rango de variación de la variable r; $a \leqslant r < \infty$. Supondremos que el cuerpo tenga espesor finito, cuyo rango de variación es $0 \leqslant z \leqslant 1$, y que la conductividad térmica depende de la coordenada z, en la forma

$$k_z = \beta(1 - z^2)$$

donde $\beta = \rho c$; siendo ρ la densidad del medio y c es su calor específico.

En nuestro problema vamos a usar la llamada transformada de Weber para la variable r en lugar de emplear el método de Laplace usado en [1], y la transformada de Legendre para la variable z.

2. TRANSFORMADAS INTEGRALES Y SUS PROPIEDADES

La transformada de Weber [2] de una función $f(r)$, se define como

$$W_\nu[f(r)] = \bar{f}(n) = \int_a^\infty r\, f(r)\, Z_\nu(nr)\, dr \qquad (1)$$

donde

$$Z_\nu(nr) = J_\nu(nr)\, Y_\nu(na) - Y_\nu(nr)\, J_\nu(na) \qquad (2)$$

siendo J_ν y Y_ν funciones de Bessel de primera y segunda clase respectivamente.

La fórmula de inversión para la transformada (1), es

$$f(r) = \int_0^\infty \bar{f}(n)\, \frac{Z_\nu(nr)}{J_\nu^2(na) + Y_\nu^2(na)}\, n\, dn \qquad (3)$$

Si se tienen las funciones

$$g(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}$$

y

$$h(r) = K \quad \text{(constante)}$$

se demuestra [3] que

$$\bar{g}(\eta) = -\eta^2 \bar{f}(\eta) - \frac{2}{\pi} f(a) \tag{4}$$

y

$$\bar{h}(\eta) = -\frac{2K}{\pi \eta^2} \tag{5}$$

Por cuanto el rango de variación de la variable z, es $(0,1)$; entonces la transformada apropiada que vamos a usar es la impar de Legendre, que se define según [4] por

$$f_L(2n+1) = \int_0^1 f(z)\, P_{2n+1}(z)\, dz \tag{6}$$

siendo la fórmula de inversión

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3)\, f_L(2n+1)\, P_{2n+1}(z) \tag{7}$$

También usaremos la siguiente propiedad [4]

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-z^2)\frac{\partial u}{\partial t}\right] P_{2n+1}(z)\, dz = (2n+1)\, P_{2n}(0)\, u(r,0,t) \; -$$

$$- (2n+1)(2n+2)\, u_L(r, 2n+1, t) \tag{8}$$

donde

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3.\ldots(2n-1)}{2.4.\ldots 2n}$$

3. SOLUCION DEL PROBLEMA

Consideremos el cuerpo inhomogéneo con simetría alrededor del eje z y de conductividad $k_z = \beta(1 - z^2)$. El hueco cilíndrico tiene radio a. La distribución de la temperatura $u(r,z,t)$ en coordenadas cilíndricas, satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} = k_r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{9}$$

$$a \leqslant r < \infty \ , \ 0 \leqslant z \leqslant 1 \ , \ t > 0$$

la conductividad k_r en la dirección radial la consideramos constante.

Las condiciones inicial y de borde que usamos son las siguientes.

$$\text{I)}\begin{cases} u(r,z,0) = f(r,z) \quad ; \quad t = 0 \ ; \ z > 0 \\ u(a,z,t) = g(z,t) \quad ; \quad t > 0 \ ; \ z > 0 \ ; \ r = a \\ u(r,0,t) = h(r,t) \quad ; \quad t > 0 \ ; \ z = 0 \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Weber dada por (1) con $\nu = 0$, a la ecuación diferencial (9), teniendo presente (4) y las condiciones I), se obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = k\left[-\eta^2\, \bar{u}(\eta,z,t) - \frac{2}{\pi}\, g(z,t)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-z^2)\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right] \tag{10}$$

donde $k = k_r/\beta$ es la difusividad.

Multiplicando la ecuación (10) por $P_{2n+1}(z)$, integrando entre los límites $(0,1)$, de acuerdo a las expresiones (6) y (8), se obtiene

$$\frac{d\,\bar{u}_L(\eta,\, 2n+1,\, t)}{dt} = k\left[-\eta^2\, \bar{u}_L(\eta,\, 2n+1,\, t) - \frac{2}{\pi}\, g_L(2n+1,\, t)\right] +$$

$$+\ (2n+1)\ P_{2n}(0)\ \bar{h}(\eta,t) - (2n+2)(2n+1)\ \bar{u}_L(\eta,\, 2n+1,\, t) \tag{11}$$

Poniendo

$$Q(\eta,\, 2n+1,\, t) = -\frac{2}{\pi}\, k\, g_L(2n+1,\, t) + (2n+1)\ P_{2n}(0)\ \bar{h}(\eta,t)$$

la ecuación diferencial (11) tiene por solución a

$$\bar{u}_L(\eta,\, 2n+1,\, t) = \bar{\delta}_L(\eta,\, 2n+1)\ e^{-[k\eta^2 + (2n+1)(2n+2)]t}\ +$$

$$+ \int_0^t Q(\eta, 2n+1, \tau)\, e^{-[k\eta^2 + (2n+1)(2n+2)][T-\tau]}\, dT$$

De acuerdo a los teoremas de inversión (3) y (7), la solución formal de la ecuación diferencial (1), es

$$u(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{Z_0(\eta r)}{J_0^2(\eta a) + Y_0^2(\eta a)} (4n+3)\, \overline{u}_L(\eta, 2n+1, t) \times$$

$$\times P_{2n+1}(z)\eta\, d\eta \qquad (12)$$

4. CASOS ESPECIALES

Vamos a considerar un ejemplo de aplicación del resultado general (12). Supongamos que la temperatura inicial sea T_0 y que la temperatura en la superficie $r = a$ sea una constante T_1; además la temperatura en $z = 0$ es nula; o sea que

$$f(r,z) = T_0 \quad , \quad t = 0$$

$$g(z,t) = T_1 \quad ; \quad t > 0 \; ; \; r = a$$

$$h(r,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \; ; \; z = 0$$

En virtud de [5, p.276] y [3], se tiene

$$\bar{f}_L(\eta, 2n+1, t) = -\frac{T_0}{\pi\eta^2}\,\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+n)} \qquad (13)$$

$$g_L(2n+1, t) = T_1\,\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+n)} \qquad (14)$$

$$\bar{h}(\eta, t) = 0$$

Llamando

$$\Lambda(n) = \frac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2+n)} \qquad (15)$$

$$(2n+1)(2n+2) = \lambda^2 \qquad (16)$$

y poniendo

$$\eta a = u\ ,\ R = \frac{r}{a}\ ,\ \frac{kt}{a^2} = \tau\ ,\ \gamma^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{k}$$

y aplicando el resultado [5, p.353 (19)], la solución (12) toma la forma

$$u(r,z,t) = \frac{T_1}{2} \sum_n (4n+3)\, P_{2n+1}(z)\, \Lambda(n)\, \frac{H_0^{(2)}(R\gamma)}{H_0^{(2)}(\gamma)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_n (4n+3)\, P_{2n+1}(z)\, \Lambda(n)\, e^{-\gamma^2 \tau} \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty e^{-\tau u^2} \frac{J_0(uR)\, Y_0(u) - Y_0(uR)\, J_0(u)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \left\{ \frac{T_1 u}{u^2+\gamma^2} - \frac{T_0}{u} \right\} du \right] \tag{17}$$

5. VERIFICACION DE LA SOLUCION

Para $\tau = 0$ $(t = 0)$ el resultado (17) , de acuerdo a [5, p.353], reduce a

$$u(r,z,0) = \frac{T_0}{2} \sum_n (4n+3)\, P_{2n+1}(z)\, \Lambda(n)$$

Pero, en virtud de la definición (7), se tiene

$$\frac{1}{2} \sum_n (4n+3)\, P_{2n+1}(z)\, \Lambda(n) = 1 \tag{18}$$

por lo que

$$u(r,z,0) = T_0$$

que es la condición inicial impuesta.

Para la condición de borde $r \to a$; $R \to 1$; entonces el segundo sumando se anula ; mientras que el primer sumando , por la propiedad (18), se reduce a:

$$u(a,z,t) = T_1$$

que es la condición de borde impuesta.

Consideremos que el medio material sea de extensión infinita en la dirección z, lo que significa que en la ecuación diferencial (9), no interviene el sumando $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; con lo que $\gamma = 0$. En estas condiciones, la solución (12) toma la forma

$$u(r,z,t) = T_1 + \frac{2}{\pi}\left[T_1 - T_0\right] \int_0^{\infty} e^{-\tau u^2} \frac{J_0(uR)\, Y_0(u) - Y_0(uR)\, J_0(u)}{u\left[J_0^2(u) + Y_0^2(u)\right]}\, du$$

Esta integral ha sido tabulada por Jaeger [6] , para diferentes rangos de τ y R.

Si $T_0 = 0$; entonces esta solución se reduce a la dada en [1].

REFERENCIAS

[1] CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C. *"Conduction of Heat in Solids"*. Oxford, 1947.

[2] DAVIES, B. *"Integral Transforms and Their Applications"*. Springer Verlag, New York, 1978.

[3] VILLALOBOS, A.M. *"Sobre Algunas Transformadas Integrales que Involucran Funciones de Bessel"*. Universidad del Zulia; Facultad de Ingeniería; marzo, 1979.

[4] SNEDDON, I.N. *"The Use of Integral Transforms"*. Mc Graw-Hill; New York, 1972.

[5] ERDELYI, A. et al. *"Tables of Integral Transforms"*, Vol.II; Mc Graw-Hill, New York, 1954.

[6] JAEGER, J.C. J. of. Math. and Physics; Vol.34, p.316; 1955.