Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 5, Nº 2, 1982

SUAVIZACION DE PRODUCCION USANDO PROGRAMACION LINEAL. UN ALGORITMO

Felipe E. Araujo
Facultad de Ingeniería
Escuela de Mecánica
Universidad del Zulia
Maracaibo - Venezuela

RESUMEN

Los problemas de suavización de producción donde la demanda es determinística (conocida), pueden ser resueltos como un problema de programación lineal usando el método simplex. La 'Tableau" que se forma con el planteamiento del problema, posee características especiales. Este trabajo basado en estas características especiales propone una modificación al algoritmo simplex, lo cual permite una reducción considerable en los tiempos de computación y en la cantidad de almacenamiento requerido en el computador, cuando es comparado con el método simplex convencional.

ABSTRACT

The production smoothing problem with a deterministic demand can be solved as a linear programming problem using the simplex method. The resulting tableau for this problem has special characteristics. Based on these special characteristics this paper propose a modification to the simplex algorithm which allows an important reduction in the computer process time and memory requirements when compared with the conventional simplex algorithm.

1- INTRODUCCION

El estudio de los problemas de suavización de producción está asociado a funciones objetivo, las cuales contienen funciones paso y/o funciones de valor absoluto, lo que dificulta su solución.

Estas funciones paso aparecen debido a la existencia de costos diferentes cuando un aumento o disminución del nivel de la producción es necesario.

La no-linealidad en la función objetivo puede ser eliminada por medio del uso de una transformación estudiada por Charnes, Cooper y Ferguson (6), Wagner (14), Araujo (2) entre otros, la cual la convierte a un problema de programación lineal, tópico el cual ha sido ampliamente discutido y desarrollado.

Este trabajo está asociado a problemas de suavización de producción donde la demanda es determinística (conocida). La "Tableau" que se forma con el planteamiento del problema, posee características especiales que permiten a través de una modificación al algoritmo "Simplex" de programación lineal, una reducción considerable en los tiempos de computación y en la cantidad de almacenamiento requerido.

El algoritmo propuesto reduce los tiempos de computación hasta en un 70% y en un 30% los requerimientos de almacenamiento, en problemas donde el número de períodos a estudiar es grande.

El trabajo está dividido en 4 capítulos adicionales: el siguiente posee una descripción histórica del problema de suavización de producción, a continuación, en el capítulo 3 una descripción analítica del problema, su formulación y estudio como un problema de programación lineal. En el capítulo 4 las características generales del algoritmo propuesto y en el último capítulo los resultados y conclusiones.

2- HISTORIA

Uno de los primeros trabajos en problemas de suavización de producción para el caso cuando la demanda es determinística fue presentado por Hoffman y Jacobs (7) en 1954. Ellos presentan una solución explícita para cuando la demanda aumenta monotónicamente y sólo consideran el costo asociado con el aumento de la producción. Antosiewicz y Hoffman (1) muestran que la misma solución puede ser extendida para cuando la demanda aumenta monotónicamente hasta cierto nivel y posteriormente decrece monotónicamente.

Bellman (5) extendió el modelo para el caso de costo de producción estocástico y usó programación dinámica para su solución.

Karush y Vazsonyi (9) aislan las características del problema de suavización de producción, considerando la producción como un servicio (elementos no-almacenables). Programación matemática fue usada para resolver este problema.

Hu y Prager (8) proponen una solución a este tipo de problema por medio de teoría de redes para el caso cuando los costos de aumentar o disminuir la producción son iguales (costos simétricos).

Kleim (13) propone una solución de planificación sobre períodos de tiempo ("planning horizon") para resolver el problema de Modigliani-Hohn de planificación de producción, e incluye suavización de producción considerando funciones de costo de producción estrictamente convexas y no-decrecientes.

Zangwill (15) presenta el caso de suavización de producción para funciones de costo de producción cóncavas, funciones de costo de inventario también cóncavas y los costos de cambiar el nivel de producción son funciones seccionalmente cóncavas.

Kunreuther y Morton (11) usaron análisis marginal para desarrollar planificación y predicción en períodos de tiempo para funciones de costo lineales. En 1974 el modelo fue extendido de manera que incluyera: sobretiempo, tiempo ocioso, pérdida de ventas y reposición posterior de la demanda (12).

Korgoonker (10) mejoró el modelo de Zangwill para el caso de restricciones de capacidad ("capacity constrained"). El demuestra que encontrar la ruta más corta a través de un plan de producción es una red acíclica de puntos extremos.

3- SUAVIZACION DE PRODUCCION

Los procesos de producción tienen asociados alteraciones en los niveles de producción o servicio de tiempo en tiempo. Además de los costos directos de producción hay costos asociados con el cambio en los niveles de producción y ellos son asimétricos. Estos costos pueden incluir costos de contratación o despido de personal, activación o desactivación de maquinaria, etc. La asimetría de estos casos aparece debido a que los costos asociados con el aumento de producción son diferentes a aquellos asociados con la disminución de producción.

La selección de una política de producción es el resultado de un problema de optimización. Sin embargo la función objetivo contiene funciones paso correspondiente al caso de costos asimétricos. Esta dificultad analítica tradicional puede ser el motivo de la ausencia de costos asimétricos en la mayoría de la literatura de suavización de producción. La transformación presentada en (14) permite algunas soluciones a este problema.

A. Formulación

Un problema típico de suavización de producción aparece cuando se desea seleccionar los niveles de producción para un producto dado, en los siguientes n períodos.

Se asume un costo unitario fijo para este producto y el cambio en los niveles de producción genera costos de a y b para el caso de aumentar o disminuir respectivamente los niveles de producción.

Se está interesado en la cantidad a ser producida en cada uno de los n períodos, tal que, el costo asociado con la producción sea un mínimo (o la ganancia máxima).

La nomenclatura a utilizar es:

r_i = demanda para el período i (i = 1,...,n)

x_i = cantidad a ser producida en el período i

x_0 = nivel inicial de producción

p = precio de venta por elemento (Bs./ c/u)

c = costo de producción por elemento (Bs./ c/u)

a = costo unitario por aumentar la producción

b = costo unitario por disminuir la producción

Para formular el problema las siguientes suposiciones deben ser hechas.

a. La demanda r_i es determinística (conocida).

b. La demanda o parte de ella debe ser satisfecha en el mismo período en el cual ocurre y nunca posteriormente.

c. Los costos de escasez del producto son despreciables.

Los costos y/o beneficios asociados con este problema son:

a.- Venta. La ganancia está relacionada con la demanda. Si la demanda para un período dado es mayor que o igual a la producción, todos los elementos son vendidos; de no ser así, los elementos no vendidos se pierden. Matemáticamente es expresado como:

Si $r_i \geq x_i$ el ingreso es $p\,x_i$

Si $r_i < x_i$ el ingreso es $p\,r_i$

ó

$$p\,x_i\,\mathcal{U}(r_i - x_i) + p\,r_i\,\mathcal{U}(x_i - r_i) =$$

$$p\,x_i\,\mathcal{U}(r_i - x_i) + p\,r_i\,\{1 - \mathcal{U}(r_i - x_i)\} =$$

$$p\,\{r_i - (r_i - x_i)\,\mathcal{U}(r_i - x_i)\}$$

$$\text{donde } \mathcal{U}\{f(x)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) < 0 \\ 1 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

es definida como la función paso y f(x) es una función real y arbitraria de x.

b.- Costos de Producción. Estos costos de producción son divididos en dos componentes:

i. Costos básicos de producción. Estos se consideran directamente proporcional a la cantidad producida y matemáticamente está expresado como:

$$c\, x_i$$

ii. Costos debido a los cambios en los niveles de producción. Estos se consideran proporcionales a la diferencia en los cambios en estos niveles lo cual es expresado matemáticamente como:

$$g\,(x_i\,,\,x_{i-1}) = \begin{cases} a\,(x_i - x_{i-1})^{m_1} & \text{si } x_i \geq x_{i-1} \\ b\,(x_{i-1} - x_i)^{m_2} & \text{si } x_i < x_{i-1} \end{cases}$$

$$(i=1,\ldots,n)$$

con $m_1\,,\,m_2 > 0$

Esta expresión puede ser escrita usando la función paso, quedando $g\;(x_i\,,\,x_{i-1})$ representada de la siguiente manera

$$g\,(x_i,\,x_{i-1}) = a\,(x_i - x_{i-1})^{m_1}\;\emptyset\,(x_i - x_{i-1}) +$$

$$b\,(x_{i-1} - x_i)^{m_2}\;\emptyset\,(x_{i-1} - x_i)$$

Considerando todas estas cantidades (costos y beneficios) la función de beneficio (S_i) para el período i es expresado como:

$$S_i = p\,\{r_i - (r_i - x_i)\;\emptyset\,(r_i - x_i)\} - cx_i -$$

$$g\,(x_i\,,\,x_{i-1})$$

y la suma de S_i en los n períodos representa la función de ganancia (Z) para el problema planteado y matemáticamente es escrito como:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ p\{r_i - (r_i - x_i)\emptyset(r_i - x_i)\}$$

$$- cx_i - g(x_i,\,x_{i-1}) \Big\} \qquad \ldots(3\text{-}1)$$

donde los valores de los niveles de producción x_i para cada período son requeridos, tal que, maximice la función de ganancia Z (3-1).

Este problema no puede ser convenientemente resuelto usando la mayoría de las técnicas de optimización, debido a las discontinuidades en la función objetivo. A continuación se propone un método para resolver este tipo de problema y se muestran algunos resultados obtenidos.

B. Método de Solución

La función de beneficio (3-1) de este problema es discontínua y esta discontinuidad puede ser eliminada por el uso de las siguientes transformaciones

$$r_i - x_i = u_i - v_i \quad \text{con} \begin{cases} u_i = 0 \quad \text{Si} \quad r_i \leq x_i \\ v_i = 0 \quad \text{Si} \quad r_i > x_i \end{cases}$$

y $\ldots(3\text{-}2)$

$$x_i - x_{i-1} = w_i - z_i \quad \text{con} \begin{cases} w_i = 0 \;\text{Si}\; x_i \leq x_{i-1} \\ z_i = 0 \;\text{Si}\; x_i > x_{i-1} \end{cases}$$

por lo que el problema es llevado a la siguiente forma:

max:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \{p(r_i - u_i) - cx_i - aw_i^{m_1} - bz_i^{m_2}\}$$

$$\ldots(3\text{-}3)$$

sujeto a:

$$u_i - v_i + x_i = r_i$$

$$x_i - x_{i-1} - w_i + z_i = 0$$

$$u_i,\, v_i,\, w_i,\, z_i,\, x_i \geq 0 \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Este es un problema de programación no-lineal y puede ser resuelto usando programación separable.

Cuando la función costo de cambios en los niveles de producción se consideran de primer orden ($m_1 = m_2 = 1$), la ecuación (3-3) viene a ser,

max:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \{p(r_i - u_i) - cx_i - aw_i - bz_i\}$$

$$\ldots(3\text{-}4)$$

sujeto al mismo conjunto de restricciones que (3-3). Este es un problema de programación lineal.

Este modelo es similar al estudiado por Karush y Vaysonyi (9) donde las características de suavización de producción son aisladas, pero problemas más generales de suavización de producción con inventario pueden ser estudiados usando este tipo de transformación.

C. Ejemplo

Una planta de producción debe satisfacer la siguiente demanda (r_i) para los siguientes 5 períodos de tiempo ($i = 1,\ldots,5$)

i	1	2	3	4	5
r_i	10	4	6	8	7

Supongamos que p = 7 Bs./elemento, C = 5 Bs./elemento, x_o = 3, a = 1 Bs./elemento y b (Bs./ elemento) toma los diferentes valores: b = 0, 0.5, 1, 2, 5. Ver ejemplo B. Capítulo 5.

Usando TEMPO (16), un programa de optimización de la compañía Burroughs, los resultados obtenidos son mostrados en la tabla 3-1.

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
0	10	4	6	8	7	59.
0.5	10	4	6	8	7	55.5
1.	4	4	6	7	7	52.
2.	4	4	6	7	7	52.
5.	4	4	6	7	7	52.

Table 3-1

De donde, por ejemplo, para el conjunto de datos considerados y con b = 1 (caso de costos simétricos) el valor de la función de ganancia es Z= 52 para el programa de producción.

$$x_1 = x_2 = 4 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = x_5 = 7$$

Cuando el número de períodos a estudiar es muy grande este problema de programación lineal puede requerir de mucho almacenamiento y ocupar un tiempo considerable del computador. El capítulo siguiente propone un algoritmo con el cual se reduce considerablemente los recursos requeridos del computador.

4- ALGORITMO PROPUESTO

En este capítulo se detallarán las características generales del algoritmo propuesto para el problema de suavización de producción y la justificación para el ahorro de los recursos del computador. Cabe mencionar que éste está basado en una modificación del método simplex regular.

A. Características

1. El problema ya transformado posee una solución básica inicial explícita; esto simplifica el código del programa y ahorra espacio en el computador.

2. El problema posee n-1 restricciones iguales a cero lo que nos permite predecir el comportamiento de las primeras n-1 iteraciones del método simplex. Esto es debido también, a las características especiales de las restricciones y de la función objetivo. Esto implica que el algoritmo propuesto genere la n-sima "tableau" ahorrándose los cálculos asociados con las primeras n-1 iteraciones ("tableau").

De la ecuación (3-4) y para un problema de n períodos, se puede notar que se está relacionando con una matriz de tamaño 2n x 5n, con 2n restricciones y 5n variables.

La experiencia de cálculo demuestra que se requieren del orden de 2n iteraciones para encontrar la solución de este problema. Si la n-sima "tableau" puede ser predicho, entonces el ahorro de tiempo estará asociado con el tiempo de ejecución de las n-1 primeras iteraciones, que serán el 50% aproximadamente de las iteraciones requeridas.

3. Si se toma en cuenta que las variables que intervienen en el modelo (5n) son x_i, u_i, v_i, w_i y z_i(i = 1,..,n) y que a través del uso de la transformación expresada en (3-2) se puede notar que los vectores coeficientes asociados con u_i y v_i y los asociados con w_i y z_i son linealmente dependientes, entonces el coeficiente de uno de ellos se puede determinar por medio del otro, con la sola multiplicación por - 1 del último.

De lo anterior se puede deducir que sólo 3/5 partes de la "tableau" puede ser almacenada y las otras 2/5 partes (o parte de ellas) podrá ser determinada cuando fuese necesario. Esto ahorra un espacio considerable en el computador.

Los cálculos asociados con las 2/5 partes de la "tableau" no almacenadas, no son realizados. Esto disminuye el tiempo de cálculo del algoritmo.

Estas características hacen que el algoritmo propuesto dé un mejor desempeño tanto en lo que se refiere a tiempo de ejecución en el computador como en cuanto al espacio de memoria requerido, comparado con el método de programación lineal convencional cuando es aplicado a problemas de suavización de producción.

A continuación se ilustrará con más detalle y para el caso de n=3 períodos estas características, usando como base el ejemplo de esta misma página.

B. Ejemplo

De la ecuación (3-4) y para n = 3 se tiene,

Maximizar:

$$Z^1 = Z - p \sum_{i=1}^{3} r_i = - p\, u_1 - p\, u_2 - p\, u_3 - c\, x_1$$

$$- c\,x_2 - c\,x_3 - a\,w_1 - a\,w_2 - a\,w_3 - b\,z_1 - b\,z_2 - b\,z_3$$

sujeto a:

$$u_1 - v_1 + x_1 = r_1$$

$$u_2 - v_2 + x_2 = r_2$$

$$u_3 - v_3 + x_3 = r_3$$

$$x_1 - w_1 + z_1 = x_o$$

$$x_2 - x_1 - w_2 + z_2 = 0$$

$$x_3 - x_2 - w_3 + z_3 = 0$$

$$u_i,\ v_i,\ w_i,\ z_i,\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

En la tabla 4-1a se muestran las características generales de la "tableau" inicial para $p = 7$, $c = 5$, $a = 1$, $b = 2$, $x_o = 3$, $r_1 = 10$, $r_2 = 4$ y $r_3 = 6$. De esta "tableau" inicial se puede notar que este problema posee una solución básica inicial dada por las variables u_1, u_2, u_3, z_1, z_2, z_3. De la misma manera y con sólo hacer los ajustes correspondientes a la función objetivo, esto puede ser aplicado al caso de n períodos.

De la tabla 4-1a se puede observar que (n-1) de las restricciones son iguales a cero. Debido a estas restricciones y usando las características del método simplex regular se puede notar lo siguiente:

1.-La variable que entra a la base es x_3, al observar la relación b/a se deduce que z_3 sale de la base y llevando a cabo los cálculos correspondientes al método simplex dan origen a la tabla 4-1b.

2.-De 4-1b y en forma similar a 1 se deduce que x_2 entra a la base y que z_2 sale de la base, dando origen a la tabla 4-1c.

3.-Si se considera que $x_o \leq r_i\ \forall i$, entonces la siguiente tabla puede ser generada, con x_1 entrando a la base y z_1 saliendo de la base. Esto da origen a la tabla 4-2a.

Cuando la condición de $x_o \leq r_i\ \forall i$ no se cumple, entonces sólo n-1 "tableaus" pueden ser generadas.

De la misma forma que lo realizado en los pasos 1, 2 y 3, esto puede ser generalizado para el caso de n períodos.

De la "tableau" n-sima en adelante la selección de las variables que salen de la base dependerá de los valores de la demanda r_i y éstos no pueden ser predichos sin imponer fuertes restricciones al sistema. Las tablas 4-2b y 4-2c muestran la dirección de la solución del problema planteado partiendo de la tercera "tableau" ó 4-2a.

A estas alturas y después de detallar los vectores coeficientes de u_i y v_i y de w_i y z_i en todas las tablas 4-1 y 4-2, se observa que ellos son linealmente dependientes y que uno puede ser generado partiendo del otro al multiplicarlo por (-1), por lo que en el algoritmo propuesto sólo será almacenado uno de ellos.

La tabla 4-3a muestra la "tableau" inicial en la forma como será almacenada en el computador por el algoritmo propuesto y la tabla 4-3b cuando partiendo de la n-sima "tableau". Esto da una idea del ahorro de espacio en el computador y el ahorro de tiempo asociado con la manipulación de esa información no almacenada. En las tablas anteriormente mostradas los ceros fueron omitidos para dar mayor legibilidad a la información de las "tableaus".

Todos estos conceptos pueden ser aplicados al caso de n períodos de tiempo y en la medida que n crece el ahorro es mayor.

El siguiente capítulo muestra una serie de cálculos obtenidos para diferentes valores de n y los ahorros de tiempo y espacio asociado con ellos.

5- RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A. PROCEDIMIENTO

A fin de comprobar que cada una de las características principales del algoritmo generan un ahorro de tiempo y/o espacio en el computador, se desarrollaron los programas A, B y C. Estos poseen las siguientes características.

1. Programa A: Es una modificación del método simplex regular con sólo los cálculos de la Fase 2 incluída, ya que se dispone de una solución básica inicial. En este caso se partirá de la "tableau" inicial y se usarán todas las variables que participan en el problema. Este programa deberá consumir gran cantidad de recursos del computador.

2. Programa B: Además de las propiedades del programa A, en este se aprovecha la circunstancia de poseer n-1 restricciones iguales a cero, lo que permite predecir la n-simo "tableau", pero manejando todas las variables del problema. En este caso se debe tener un ahorro en el tiempo de ejecución, pero el espacio requerido del computador debe ser prácticamente el mismo, cuando se compara con el programa A.

3. Programa C: En este caso se añaden al programa B las características de dependencia lineal entre los coeficientes de las variables, lo que permite un ahorro de 2/5 partes del almacenamiento y el ahorro de tiempo de ejecución asociado con la manipulación de esa información. Este programa da un ahorro en la utilización de los recursos del

computador en relación a los programas anteriores. El programa C posee todas las características del algoritmo propuesto.

El apéndice muestra el código en lenguaje FORTRAN de los programas A, B y C mencionados.

B. RESULTADOS

Con estos tres programas y para varios tamaños de muestra se consideraron los siguientes parámetros: tiempo de ejecución, número de iteraciones requeridas, tamaño de memoria usada y el costo de uso de los recursos del computador.

A fin de comprobar el ahorro en los recursos del computador se tomaron ocho juegos de datos, correspondientes a tamaños de muestra de n = 15, 20, 25 y 30 (2 muestras de cada tamaño) y los resultados obtenidos se incluyeron en la tabla 5-1. Cabe mencionar que los datos correspondientes a n = 3, 4 y 5 fueron usados con el objeto de afinar los programas A, B y C ya mencionados.

De la tabla 5-1 se pueden derivar las conclusiones que se mencionan en el siguiente parágrafo.

C. CONCLUSIONES

1. Al comparar el programa A con el B se nota lo siguiente:

a. El número de iteraciones es n unidades menor con el programa B que con el A. Esto es debido a que el programa B genera la n-sima "tableau" y comienza desde ella.

b. El ahorro de tiempo del programa B con respecto al programa A es hasta de un 50% para las muestras dadas.

c. El ahorro en utilización del espacio del computador es insignificante. En ambos casos se manejan completas las "tableau".

2. Al comparar el programa B con el C se tiene que:

a. El número de iteraciones es prácticamente el mismo. Ambos programas comienzan de la n-sima tableau; esto permite aislar la característica de dependencia entre coeficientes de dos variables.

b. El ahorro en tiempo es del orden de 25% y aumenta a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Este ahorro es el efecto de no manipular 2/5 partes de la tableau.

c. El ahorro en espacio es del orden del 30% cantidad bastante aproximada a lo previsto.

3. Al comparar el programa C con el A se conocen la magnitud de las bondades del algoritmo propuesto, a saber:

a. Ahorro de n iteraciones en la ejecución del programa.

b. Ahorro de hasta un 70% en el tiempo de ejecución del problema.

c. Ahorro de hasta un 30% en el espacio requerido del computador.

4. Pruebas con el método simplex revisado están siendo procesadas y se nota un ahorro considerable en el uso de los recursos del computador.

5. Problemas donde el tipo de transformación mencionado en (3-2) pueda ser usada, permite una mejora en la utilización de los recursos del computador cuando se usan conceptos similares a los tratados a lo largo de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1) ANTOSIEWICZ, H. y HOFFMAN, A. (1954). *"A Remark on the Smoothing Problem"*. Management Science, Vol. 1, pp. 92-95.

2) ARAUJO, FELIPE (1980). *"Ajuste de Curvas con Programación Lineal"*. Universidad del Zulia. Trabajo de Ascenso.

3) BARRODALE, I. y YOUNG, A. (1966). *"Algorithms for Best L_1 and L_∞ Linear Approximation on a Discrete Set"*. Numerische Mathematik. Vol. 8, pp. 295-306.

4) BECKMANN, MARTIN J. (1960).*"Production Smoothing and Inventory Control"*. Operation Research Vol. 9 (4), pp. 456-467.

5) BELLMAN, RICHARD (1957). *"Dynamic Programming and the Smoothing Problem"*. Management Science Vol. 3, pp. 111-113.

6) CHARNES, A., COOPER, W. y FERGUSON, R.O.(1955) *"Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming"*. Management Science Vol. 1, pp. 138-151.

7) HOFFMAN, A.J. y JACOBS, W. (1954). *"Smooth Patterns of Production"*. Management Science Vol. 1, pp. 86-91.

8) HU TE CHIANG y PRAGER, W. (1959). *"Network Analysis of Production Smoothing"*. Naval Research Log. Quart., Vol. 6, pp. 17-23.

9) KARUSH, W. y VAZSONYI (1957). *"Mathematical Programming and Service Scheduling"*. Management Science, Vol. 3, pp. 140-148.

10) KORGOONKER, M.G. (1977). *"Prodaction Smoothing Under Piecewise Concave Costs, Capacity Constrains and Non Decreasing Requirements"*. Management Science, Vol. 24 (3), pp. 302-311.