Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 5, Nº 2, 1982

SOBRE UNA NUEVA TRANSFORMADA INTEGRAL II

S. L. Kalla y Alfredo Villalobos
División de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo - Venezuela

RESUMEN

En el presente trabajo se utiliza una nueva transformación integral de tipo Sturm-Liouville para resolver problemas de valores de contorno. La definición y propiedades de la transformada son dados con detalle en un trabajo anterior. Los problemas tratados se refieren a conducción de calor en cilindros huecos, infinitos y semiinfinitos, en los cuales es conocida la temperatura en la superficie interior y en la exterior existe convección. Se obtienen las soluciones para los casos generales y luego se dan casos particulares. En uno de los problemas se hace la verificación de las condiciones de contorno.

1. LA TRANSFORMADA INTEGRAL

Consideremos la ecuación diferencial de Bessel (3)

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (1)$$

con las condiciones

$$y(a) = 0 \quad , \quad y(b) + hy'(b) = 0 \qquad (2)$$

Se demuestra en un trabajo previo (1) que las funciones

$$C\nu(\lambda ix) = \{Y\nu(\lambda ia)+B\nu(\lambda ib)\}J\nu(\lambda ix) -$$

$$- \{J\nu(\lambda ia) + A\nu(\lambda ib)\}Y\nu(\lambda ix) \qquad (3)$$

son soluciones de la ec. (1) con las condiciones (2) si $\lambda i(i = 1,2,...)$ son las raíces positivas de la ecuación transcendente

$$J\nu(\lambda a)\ B\nu(\lambda b) - Y\nu(\lambda a)A\nu(\lambda b) = 0 \qquad (4)$$

donde se han introducido las notaciones

$$A\nu(\lambda x) = J\nu(\lambda x) + h\lambda J\nu'(\lambda x)$$

$$B\nu(\lambda x) = Y\nu(\lambda x) + h\lambda Y\nu'(\lambda x)$$

siendo $J\nu(x)$ y $Y\nu(x)$ las funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente. En base a lo anterior se define la transformación integral (1)

$$T\{f(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} = \bar{f}\nu(\lambda i) =$$

$$= \int_a^b xf(x)C\nu(\lambda ix)dx \qquad (5)$$

para la cual la fórmula de inversión resulta

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{f}\nu(\lambda i)}{||C\nu(\lambda ix)||^2} C\nu(\lambda ix)$$

donde

$$||C\nu(\lambda ix)||^2 = \int_a^b x\ C\nu^2(\lambda ix)dx \qquad (6)$$

y la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ec. (4)

Algunas propiedades de la transformada definida en (5) son:

$$T\{\alpha f(x) + \beta g(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} =$$

$$= \alpha T\{f(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} + \beta T\{g(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} \qquad (7)$$

$$T\{f(\alpha x),\ a,b,\nu;\lambda i\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\ T\{f(x),\ a\alpha,\ b\alpha,\ \nu;\ \frac{\lambda i}{\alpha}\} \qquad (8)$$

Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 5, Nº 2, 1982

SOBRE UNA NUEVA TRANSFORMADA INTEGRAL II

S. L. Kalla y Alfredo Villalobos
División de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo - Venezuela

RESUMEN

En el presente trabajo se utiliza una nueva transformación integral de tipo Sturm-Liouville para resolver problemas de valores de contorno. La definición y propiedades de la transformada son dados con detalle en un trabajo anterior. Los problemas tratados se refieren a conducción de calor en cilindros huecos, infinitos y semiinfinitos, en los cuales es conocida la temperatura en la superficie interior y en la exterior existe convección. Se obtienen las soluciones para los casos generales y luego se dan casos particulares. En uno de los problemas se hace la verificación de las condiciones de contorno.

1. LA TRANSFORMADA INTEGRAL

Consideremos la ecuación diferencial de Bessel {3}

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (1)$$

con las condiciones

$$y(a) = 0 \quad , \quad y(b) + hy'(b) = 0 \qquad (2)$$

Se demuestra en un trabajo previo {1} que las funciones

$$C\nu(\lambda ix) = \{Y\nu(\lambda ia)+B\nu(\lambda ib)\}J\nu(\lambda ix) - $$
$$- \{J\nu(\lambda ia) + A\nu(\lambda ib)\}Y\nu(\lambda ix) \qquad (3)$$

son soluciones de la ec. (1) con las condiciones (2) si $\lambda i (i = 1,2,...)$ son las raíces positivas de la ecuación transcendente

$$J\nu(\lambda a)\ B\nu(\lambda b) - Y\nu(\lambda a)A\nu(\lambda b) = 0 \qquad (4)$$

donde se han introducido las notaciones

$$A\nu(\lambda x) = J\nu(\lambda x) + h\lambda J\nu'(\lambda x)$$

$$B\nu(\lambda x) = Y\nu(\lambda x) + h\lambda Y\nu'(\lambda x)$$

siendo $J\nu(x)$ y $Y\nu(x)$ las funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente. En base a lo anterior se define la transformación integral {1}

$$T\{f(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} = \bar{f}\nu(\lambda i) =$$
$$= \int_a^b xf(x)C\nu(\lambda ix)dx \qquad (5)$$

para la cual la fórmula de inversión resulta

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{f}\nu(\lambda i)}{||C\nu(\lambda ix)||^2}\, C\nu(\lambda ix)$$

donde

$$||C\nu(\lambda ix)||^2 = \int_a^b x\ C\nu^2(\lambda ix)dx \qquad (6)$$

y la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ec. (4)

Algunas propiedades de la transformada definida en (5) son:

$$T\{\alpha f(x) + \beta g(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} =$$
$$= \alpha T\{f(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} + \beta T\{g(x),\ a,b,\nu;\lambda i\} \qquad (7)$$

$$T\{f(\alpha x),\ a,b,\nu;\lambda i\} =$$
$$= \frac{1}{\alpha^2}\ T\{f(x),\ a\alpha,\ b\alpha,\ \nu;\ \frac{\lambda i}{\alpha}\} \qquad (8)$$

Si $g(x) = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2} f$,

se tiene que

$$\bar{g}\nu(\lambda i) = \frac{b}{h} C\nu(\lambda ib)\ \{f + h \frac{df}{dx}\}_{x=b}$$

$$+ \lambda ia\ C\nu'(\lambda ia)\ f(a) - \lambda i^2\ \bar{f}\nu(\lambda i) \qquad (9)$$

$$T\{X^{\nu},a,b,\nu;\lambda i\} =$$

$$= \frac{b^{\nu+1}}{\lambda i^2}\left(\frac{\nu}{b} + \frac{1}{h}\right) C\nu(\lambda ib) + \frac{a^{\nu+1}}{\lambda i} C\nu'(\lambda ia) \qquad (10)$$

Tomando ν=o en (10) obtenemos la transformada de orden cero de una constante α, resultando

$$T\{\alpha,a,b,o;\lambda i\} =$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda i^2}\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib) + a\lambda i\ Co'(\lambda ia)\} \qquad (11)$$

2. CONDUCCION DE CALOR EN UN CILINDRO INFINITO

Consideremos un largo cilindro hueco de radio interior a y radio exterior b, con temperatura conocida en su superficie interior y convección en su superficie exterior.
La distribución inicial de temperaturas en el cilindro es también dada.
La ecuación diferencial del fenómeno es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \quad (a<r<b,\quad t>o) \qquad (12)$$

donde U(r,t) es la temperatura a cualquier posición r (a<r<b) en cualquier instante t (t>o) y k es una constante que depende del material del cilindro.

Las condiciones iniciales y de borde son

$$U(a,t) = f(t) \quad , \quad t>o \qquad (13)$$

$$\left(U + h\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = g(t) \quad , \quad t>o \qquad (14)$$

$$U(r,o) = 1(r) \quad , \quad a<r<b \qquad (15)$$

Definamos la transformada integral

$$\bar{U}(\lambda i,t) = \int_a^b r\ U(r,t)\ Co\ (\lambda ir)\ dr \qquad (16)$$

Tomando la transformada (16) en la ec. (12) nos queda

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \kappa\ \{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)(U+h \frac{\partial U}{\partial r})_{r=b} +$$

$$+ a\lambda i\ Co'(\lambda ia)\ U(a,t) - \lambda i^2\bar{U}\}$$

Según las condiciones (13) y (14) tenemos

$$\frac{d\bar{U}}{dt} + \kappa\lambda i^2\ \bar{U} = \kappa\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib) g(t) +$$

$$+ a\lambda i\ Co'(\lambda ia)\ f(t)\} \qquad (17)$$

cuya solución está dada por

$$\bar{U}(\lambda i,t) =$$

$$= e^{-\kappa\lambda i^2 t}\{\kappa \int_o^t e^{\kappa\lambda i^2 x}\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)\ g(x) +$$

$$+ a\lambda iCo'(\lambda ia)\ f(x)\}dx + c\} \qquad (18)$$

De la condición (15) vemos que

$$\bar{U}(\lambda i,o) = \bar{I}(\lambda i)$$

Luego, de (18) se deduce que $c = \bar{I}(\lambda i)$ y entonces

$$\bar{U}(\lambda i,t) =$$

$$= e^{-\kappa\lambda i^2 t}\{\kappa \int_o^t e^{\kappa\lambda i^2 x}\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)\ g(x) +$$

$$+ a\lambda iCo'(\lambda ia)\ f(x)\}dx + \bar{I}(\lambda i)\} \qquad (19)$$

Aplicando la fórmula de inversión resulta

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{U}(\lambda i,t)}{||Co(\lambda ir)||^2} Co(\lambda ir) \qquad (20)$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ecuación

$$Jo(\lambda a)Bo(\lambda b) - Yo(\lambda a)Ao(\lambda b) = 0 \qquad (21)$$

CASO ESPECIAL

Consideremos el problema anterior con las siguientes condiciones iniciales y de borde:

$$U(a,t) = Uo \quad (\text{constante}) \quad , \quad t>o$$

$$\left(U+h \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=b} = 0 \quad , \quad t>o$$

$$U(r,o) = 0 \quad , \quad a<r<b$$

Con estas condiciones, la ec. (19) nos queda

$$\bar{U}(\lambda i,t) = e^{-\kappa\lambda i^2 t} \{ \kappa \int_0^t e^{\kappa\lambda i^2 x} \{a\lambda i Co'(\lambda ia) Uo\} dx \}$$

$$\bar{U}(\lambda i,t) = \frac{aUo}{\lambda i} Co'(\lambda ia) \{1 - e^{-\kappa\lambda i^2 t}\}$$

Luego, según (20), la solución es

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aUo}{\lambda i} \frac{Co'(\lambda ia)}{||Co(\lambda ir)||^2} \cdot$$

$$\cdot \{1 - e^{-\kappa\lambda i^2 t}\} Co(\lambda ir) \tag{22}$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ec. (21).

Antes de verificar que la solución (22) satisface las condiciones iniciales y de borde, veamos que, aplicando la fórmula de inversión (6) con $\nu=o$ y $f(x)=\alpha$ (constante), nos queda

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\lambda i^2} \{\frac{b}{h} Co(\lambda ib) + a\lambda i\, Co'(\lambda ia)\} \frac{Co(\lambda ix)}{||Co(\lambda ix)||^2}$$

de donde se deduce que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda i^2} \{\frac{b}{h} Co(\lambda ib) + a\lambda i Co'(\lambda ia)\} \cdot$$

$$\cdot \frac{Co(\lambda ix)}{||Co(\lambda ix)||^2} = 1 \quad , \quad a<x<b \tag{23}$$

Es inmediato ver que la solución (22) satisface la condición $U(r,o)=0$.

De (22), vemos que

$$U + h \frac{\partial U}{\partial r} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aUo\ Co'(\lambda ia)}{||Co(\lambda ir)||^2} \{1 - e^{-\kappa\lambda i^2 t}\} \cdot$$

$$\cdot \{ \frac{Co(\lambda ir)}{\lambda i} + hCo'(\lambda ir)\}$$

Luego, para $r=b$ tenemos

$$\left(U+h \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=b} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aUo\ Co'(\lambda ia)}{||Co(\lambda ir)||^2} \{1-e^{-\kappa\lambda i^2 t}\} \cdot$$

$$\cdot \{\frac{Co(\lambda ib)}{\lambda i} + hCo'(\lambda ib)\}$$

Puede probarse que

$$\frac{Co'(\lambda ib)}{Co(\lambda ib)} = - \frac{1}{h\lambda i}$$

y, en consecuencia, $\left(U + h \frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = 0$

Para verificar la otra condición expresemos (22) en la forma

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aUo}{\lambda i} \frac{Co'(\lambda ia)}{||Co(\lambda ir)||^2} Co(\lambda ir) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aUo}{\lambda i} \frac{Co'(\lambda ia)}{||Co(\lambda ir)||^2} e^{-\kappa\lambda^2 it} Co(\lambda ir)$$

Aplicando (23) nos queda

$$U(r,t) = Uo\{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b}{h\lambda i^2} \frac{Co(\lambda ib)}{||Co(\lambda ir)||^2} Co(\lambda ir)\}$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aUo}{\lambda i} \frac{Co'(\lambda ia)}{||Co(\lambda ir)||^2} e^{-\kappa\lambda i^2 t} Co(\lambda ir)$$

en donde puede verse que $U(a,t) = Uo$

3. CONDUCCION DE CALOR EN UN CILINDRO SEMI-INFINITO

Consideremos el problema de hallar la distribución de temperaturas $U(r,z,t)$ en un cilindro semi-infinito de radio interior a y radio exterior b, con condiciones iniciales y de borde dadas.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \quad (a<r<b, \quad z>o, \quad t>o) \tag{24}$$

$$U(a,z,t) = f(z,t) \quad , \quad z>o, \quad t>o \tag{25}$$

$$\left(U+h \frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = g(z,t) \quad , \quad z>o, \quad t>o \tag{26}$$

$$U(r,o,t) = l(r,t) \quad , \quad a<r<b, \quad t>o \tag{27}$$

$$U(r,z,o) = m(r,z) \quad , \quad a<r<b, \quad z>o \tag{28}$$

$$U(r,z,t) \to 0 \quad \text{cuando} \quad z \to \infty \tag{29}$$

Definamos la transformada integral

$$\bar{U}(\lambda i, z,t) = \int_a^b rU(r,z,t)\, Co(\lambda ir)dr \tag{30}$$

y la transformada seno de Fourier {2}

$$\bar{U}s(\lambda i,p,t) = \int_o^\infty \bar{U}(\lambda i,z,t)\, \text{sen} pz dz \tag{31}$$

Tomando la transformada (30) en la ec. (24) tenemos

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \kappa \left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)g(z,t) + a\lambda i\, Co'(\lambda ia)f(z,t) - \lambda i^2 \bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2}\right\} \tag{32}$$

Ahora, si aplicamos a la ec. (32) la transformada (31), obtenemos

$$\frac{d\bar{U}s}{dt} = \kappa\left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)gs(p,t) + a\lambda i\, Co'(\lambda ia)fs(p,t) - \lambda i^2\bar{U}s - p^2\bar{U}s + p\bar{l}(\lambda i,t)\right\}$$

$$\frac{d\bar{U}s}{dt} + \kappa(\lambda i^2 + p^2)\bar{U}s = \kappa\left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)gs(p,t) + a\lambda i Co'(\lambda ia)fs(p,t) + p\bar{l}(\lambda i,t)\right\} \tag{33}$$

La solución de (33) es

$$\bar{U}s(\lambda i,p,t) = e^{-\kappa(\lambda i^2+p^2)t}\left(\kappa \int_o^t e^{\kappa(\lambda i^2+p^2)x} \left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)gs(p,x) + a\lambda i Co'(\lambda ia)fs(p,x) + p\bar{l}(\lambda i,x)\right\} dx + C\right) \tag{34}$$

De la condición (28) vemos que

$$\bar{U}s(\lambda i,p,t) = \bar{m}s(\lambda i,p)$$

Luego, en (34) tenemos $C = \bar{m}s(\lambda i,p)$ y, entonces

$$\bar{U}s(\lambda i,p,t) = e^{-\kappa(\lambda i^2+p^2)t}\left(\kappa \int_o^t e^{\kappa(\lambda i^2+p^2)x} \left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)gs(p,x) + a\lambda i Co'(\lambda ia)fs(p,x) + p\bar{l}(\lambda i,x)\right\} dx + \bar{m}s(\lambda i,p)\right) \tag{35}$$

Invirtiendo, resulta

$$U(r,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{\frac{2}{\pi} \int_o^\infty \bar{U}s(\lambda i,p,t)\,\text{sen}pzdp\right\} \frac{Co(\lambda ir)}{||Co(\lambda ir)||^2} \tag{36}$$

CASO ESPECIAL

Consideremos el problema anterior con las condiciones

$$U(a,z,t) = 0 \quad , \quad z>o, \quad t>o$$

$$\left(U+h\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = \frac{1}{z}, \quad z>o, \quad t>o$$

$$U(r,o,t) = Uo \ \text{(constante)}, \quad a<r<b, \quad t>o$$

$$U(r,z,o) = 0 \quad , \quad a<r<b, \quad t>o$$

$$U(r,z,t) \to 0 \quad \text{cuando} \quad z \to \infty$$

En estas circunstancias, la ec. (35) nos queda

$$\bar{U}s(\lambda i,p,t) = e^{-\kappa(\lambda i^2+p^2)t}\, \kappa \int_o^t e^{\kappa(\lambda i^2+p^2)x} . \left(\frac{b}{h} Co(\lambda ib)\frac{\pi}{2} + p\frac{Uo}{\lambda i^2}\left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib) + a\lambda i Co'(\lambda ia)\right\}\right) dx$$

$$\bar{U}s(\lambda i,p,t) = \frac{1}{\lambda i^2+p^2}\left\{\frac{b}{h} Co(\lambda ib)\left(\frac{pUo}{\lambda i^2} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{apUo}{\lambda i} Co'(\lambda ia)\right\} . \left\{1 - e^{-\kappa(\lambda i^2+p^2)t}\right\}$$

Luego, según (36), resulta que

$$U(r,z,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Co(\lambda ir)}{||Co(\lambda ir)||^2} \int_o^{\infty} \frac{1}{\lambda i^2+p^2} \cdot$$

$$\{ \frac{b}{h} Co(\lambda ib)\{\frac{pUo}{\lambda i^2} + \frac{\pi}{2}\} + \frac{apUo}{\lambda i} Co'(\lambda ia) \} \cdot$$

$$\{1 - e^{-\kappa(\lambda i^2+p^2)t}\}dp$$

REFERENCIAS:

1) KALLA, S.L. and VILLALOBOS, ALFREDO, "*On a new Integral Transform I*". Jñanabha, Vol. 9-10 (1980), 149-154

2) SNEDDON, I.N., "*The Use of Integral Transforms*", Mc. Graw-Hill, New York, (1973).

3) WATSON, G.N. "*Theory of Bessel Functions*", Cambridge, (1966).

Recibido el 15 de enero de 1982