Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 7, Nº 1, 1984

Shyam L. Kalla, Alfredo Villalobos
División de Postgrado
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ingeniería - Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

A. Battig
Instituto de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
Tucumán, Argentina

SOBRE UNA NUEVA TRANSFORMADA INTEGRAL III

RESUMEN

La teoría de Sturm-Liouville permite definir transformadas integrales adecuadas para resolver determinados problemas de valores de contorno.

En el presente trabajo se obtiene la solución de un problema de valores de contorno, utilizando una transformada de tipo Sturm-Liouville definida por los autores [Jñānabha, 9-10 (1980), p.149-154]. Una vez obtenida la solución, se hace la verificación de las condiciones de contorno. El resultado obtenido por Kalla y Villalobos [Rev.Téc.Ing. Univ. Zulia., 5(ii) (1982), p.40-44] sale como caso particular del resultado general de este trabajo.

ABSTRACT

Integral transforms can be defined by means of the Sturm-Liouville theory, to solve boundary value problems. This paper deals with the solution of a boundary value problem of heat conduction by means of an integral transform of Sturm-Liouville type defined earlier by the authors [Jñānabha , 9 - 10 (1980), p. 149-154]. The result obtained earlier by Kalla and Villalobos [Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. , 5(ii) (1982), p. 40-44] follows as a particular case of the general results of this paper. Boundary conditions are verified.

1. LA TRANSFORMADA INTEGRAL

Si una función $f(x)$ y su primera derivada son seccionalmente contínuas en un intervalo $[a,b]$, se define la transformada [1]

$$T\left[f(x),a,b,\nu;\lambda_i\right] = \overline{f}_\nu(\lambda_i) = \int_a^b x f(x) C_\nu(\lambda_i x)\, dx \quad (1)$$

donde

$$C_\nu(\lambda_i x) = \left[Y_\nu(\lambda_i a) + B_\nu(\lambda_i b)\right] J_\nu(\lambda_i x) - \left[J_\nu(\lambda_i a) + A_\nu(\lambda_i b)\right] Y_\nu(\lambda_i x) \quad (2)$$

siendo

$$A_\nu(\lambda_i x) = J_\nu(\lambda_i x) + h\lambda_i J'_\nu(\lambda_i x) \quad \text{y}$$

$$B_\nu(\lambda_i x) = Y_\nu(\lambda_i x) + h\lambda_i Y'_\nu(\lambda_i x)$$

y λ_i $(i = 1,2, \ldots)$ son las raíces positivas de de la ecuación

$$J_\nu(\lambda a)\, B_\nu(\lambda b) - Y_\nu(\lambda a)\, A_\nu(\lambda b) = 0 \quad (3)$$

La fórmula de inversión para la transformada (1), viene dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{f}_\nu(\lambda_i)}{||C_\nu(\lambda_i x)||^2} C_\nu(\lambda_i x) \quad (4)$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ec. (3) .

Algunas propiedades de la transformada son :

i) $T[\alpha f(x)+\beta g(x),a,b,\nu;\lambda_i] = \alpha T[f(x),a,b,\nu;\lambda_i] + \beta T[g(x),a,b,\nu;\lambda_i]$ (5)

ii) $T[f(\alpha x),a,b,\nu;\lambda_i] = \frac{1}{\alpha^2} T\left[f(x),a\alpha,b\alpha,\nu;\frac{\lambda_i}{\alpha}\right]$

(6)

iii) Si $g(x) = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2} f(x)$, entonces

$$\bar{g}_\nu(\lambda_i) = \frac{b}{h} C_\nu(\lambda_i b) \left[f+h\frac{df}{dx}\right]_{x=b}$$

$$+ a\lambda_i C'_\nu(\lambda_i a) f(a) - \lambda_i^2 \bar{f}_\nu(\lambda_i) \qquad (7)$$

La transformada de x^ν viene dada por

$$T[x^\nu,a,b,\nu;\lambda_i] = \frac{b^{\nu+1}}{\lambda_i^2}\left(\frac{\nu}{b}+\frac{1}{h}\right) C_\nu(\lambda_i b) + \frac{a^{\nu+1}}{\lambda_i} C'_\nu(\lambda_i a)$$

(8)

de donde, haciendo $\nu=0$, se obtiene que

$$T[1,a,b,0;\lambda_i] = \frac{1}{\lambda_i^2}\left[\frac{b}{h} C_0(\lambda_i b) + a\lambda_i C'_0(\lambda_i a)\right] \qquad (9)$$

La transformada definida en (1) fue utilizada [2] para hallar la distribución de temperaturas en un cilindro hueco de radio interior a y radio exterior b , con temperatura conocida en su superficie interior y convección en su superficie exterior.

En el caso de un cilindro infinito, el modelo matemático es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \quad (a<r<b\ ,\ t>0)$$

$$U(a,t) = f(t)\ ,\quad t>0$$

$$\left(U+h\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = g(t)\ ,\quad t>0 \qquad (10)$$

$$U(r,0) = \ell(r)\ ,\quad a<r<b$$

El problema (10) fue resuelto aplicando la transformada definida en (1) con $\nu=0$, respecto a la variable r, esto es ,

$$\bar{U}(\lambda_i,t) = \int_a^b r\,U(r,t)\,C_0(\lambda_i r)\,dr$$

obteniéndose la solución

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ k \int_0^t e^{k\lambda_i^2(x-t)} \left[\frac{b}{h} C_0(\lambda_i b)\, g(x) + a\lambda_i C'_0(\lambda_i a)\, f(x)\right] dx + \bar{\ell}(\lambda_i)\, e^{-k\lambda_i^2 t} \right\} \frac{C_0(\lambda_i r)}{||C_0(\lambda_i r)||^2}$$

(11)

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\lambda a)\, B_0(\lambda b) - Y_0(\lambda a)\, A_0(\lambda b) = 0$$

2. SOLUCION DEL PROBLEMA

Consideremos el problema de valores de contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} U = \frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}$$

$$U(a,t) = f(t)\ ,\quad t>0$$

$$\left(U + h\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = g(t)\ ,\quad t>0 \qquad (12)$$

$$U(r,0) = \ell(r)\ ,\quad a<r<b$$

Aplicando la transformada (1), respecto a la variable r , esto es

$$\bar{U}_\nu(\lambda_i,t) = \int_a^b rU(r,t)\, C_\nu(\lambda_i r)\, dr$$

en (12) , se obtiene

$$\frac{d\bar{U}_\nu}{dt} = k\left[\frac{b}{h} C_\nu(\lambda_i b)\, g(t) + a\lambda_i C'_\nu(\lambda_i a)\, f(t) - \lambda_i^2 \bar{U}_\nu\right]$$

La solución general de esta ecuación es

$$\bar{U}_\nu(\lambda_i,t) = k\int_0^t e^{k\lambda_i^2(x-t)}\left[\frac{b}{h} C_\nu(\lambda_i b) g(x) +\right.$$

$$a\lambda_i C'_\nu(\lambda_i a) f(x)\Big] dx + Ce^{-k\lambda_i^2 t}$$

De la condición inicial $U(r,0) = \ell(r)$, se tiene $\overline{U}_\nu(\lambda_i , 0) = \overline{\ell}_\nu(\lambda_i)$ y, en consecuencia, nos queda que $C = \overline{\ell}_\nu(\lambda_i)$. Luego,

$$\overline{U}_\nu(\lambda_i,t) = k \int_0^t e^{k\lambda_i^2(x-t)}\Big[\frac{b}{h} C_\nu(\lambda_i b) g(x) +$$

$$a\lambda_i C'_\nu(\lambda_i a) f(x)\Big] dx + \overline{\ell}_\nu(\lambda_i) e^{-k\lambda_i^2 t} \qquad (13)$$

Usando la fórmula de inversión (4) , tenemos que

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{U}_\nu(\lambda_i,t)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} C_\nu(\lambda_i r)$$

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big\{ k \int_0^t e^{k\lambda_i^2(x-t)}\Big[\frac{b}{h} C_\nu(\lambda_i b) g(x) +$$

$$a\lambda_i C'_\nu(\lambda_i a) f(x)\Big]dx + \overline{\ell}_\nu(\lambda_i) e^{-k\lambda_i^2 t} \Big\} \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} . \qquad (14)$$

3. VERIFICACION DE LA SOLUCION

A continuación, veremos que la solución (14) satisface las condiciones iniciales y de borde del problema (12) .

i) Para $t=0$, (14) se reduce a

$$U(r,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{\ell}_\nu(\lambda_i)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} C_\nu(\lambda_i r) = \overline{\ell}(r)$$

ii) Para analizar la condición cuando $r \to a$,escribamos la solución (14) en la forma

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{bC_\nu(\lambda_i b)}{h\lambda_i^2} \Big[g(t) - g(0) e^{-k\lambda_i^2 t} -$$

$$- \int_0^t g'(x) e^{k\lambda_i^2(x-t)} dx\Big] \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{aC'_\nu(\lambda_i a)}{\lambda_i} \Big[f(t) - f(0)e^{-k\lambda_i^2 t} -$$

$$\int_0^t f'(x) e^{k\lambda_i^2(x-t)} dx\Big] \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} e^{-k\lambda_i^2 t}\, \overline{\ell}_\nu(\lambda_i) \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} \qquad (15)$$

la cual se obtiene integrando por partes

De (2) y (3) , se deduce que

$$C_\nu(\lambda_i a) = 0 \qquad (16)$$

Teniendo en cuenta (4) y (8) , vemos que

$$r^\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \Big\{ \frac{b^{\nu+1}}{\lambda_i^2}\Big(\frac{\nu}{b} + \frac{1}{h}\Big) C_\nu(\lambda_i b) - \frac{a^{\nu+1}}{\lambda_i} C'_\nu(\lambda_i a) \Big\} \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{\lambda_i} C'_\nu(\lambda_i a) \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} = \Big(\frac{r}{a}\Big)^\nu -$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b^{\nu+1}}{a^\nu \lambda_i^2} \Big(\frac{\nu}{b} + \frac{1}{h}\Big) C_\nu(\lambda_i b) \frac{C_\nu(\lambda_i r)}{||C_\nu(\lambda_i r)||^2} \qquad (17)$$

Introduciendo (17) en (15) , nos queda que

$$U(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{bC_\nu(\lambda_i b)}{h\lambda_i^2} \Big[g(t) - g(0) e^{-k\lambda_i^2 t} -$$

$$\left.\int_0^t g'(x)e^{k\lambda_i^2(x-t)}dx\right]\frac{C_\nu(\lambda_i r)}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \; +$$

$$+\left[\left(\frac{r}{a}\right)^\nu - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{b^{\nu+1}}{a^\nu\lambda_i^2}\left(\frac{\nu}{b}+\frac{1}{h}\right)C_\nu(\lambda_i b)\right.$$

$$\left.\frac{C_\nu(\lambda_i r)}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2}\right]f(t)-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{aC'_\nu(\lambda_i a)}{\lambda_i}\left[f(0)e^{-k\lambda_i^2 t}\right. \; +$$

$$\left.\int_0^t f'(x)e^{k\lambda_i^2(x-t)}dx\right]\frac{C_\nu(\lambda_i r)}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \; +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-k\lambda_i^2 t}\,\bar{\ell}_\nu(\lambda_i)\,\frac{C_\nu(\lambda_i r)}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \qquad (18)$$

Usando (16), es fácil ver en (18) que

$U(a,t) = f(t)$

iii) Para la función $U(r,t)$ dada por (15), se tiene que

$$U + h\frac{\partial U}{\partial r} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{bC_\nu(\lambda_i b)}{h\lambda_i^2}\left[g(t)-g(0)\,e^{-k\lambda_i^2 t}-\int_0^t g'(x)\cdot\right.$$

$$\left.e^{k\lambda_i^2(x-t)}dx\right]\cdot\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \; +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{aC'_\nu(\lambda_i a)}{\lambda_i}\left[f(t)-f(0)\,e^{-k\lambda_i^2 t}-\int_0^t f'(x)\cdot\right.$$

$$\left.e^{k\lambda_i^2(x-t)}dx\right]\cdot\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \; +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-k\lambda_i^2 t}\,\bar{\ell}_\nu(\lambda_i)\,\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \qquad (19)$$

Al derivar y multiplicar por h ambos miembros de (17), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ahC'_\nu(\lambda_i a)\frac{C'_\nu(\lambda_i r)}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} = \frac{h\nu r^{\nu-1}}{a^\nu} \; - \; .$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{hb^{\nu+1}}{a^\nu\lambda_i}\left(\frac{\nu}{b}+\frac{1}{h}\right)C_\nu(\lambda_i b)\frac{C'_\nu(\lambda_i r)}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \qquad (20)$$

Sumando (17) y (20) y agrupando términos, nos queda que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b\,C_\nu(\lambda_i b)}{h\lambda_i^2}\,\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} = \left(\frac{r}{b}\right)^{\nu-1}\left(\frac{r+\nu h}{b+\nu h}\right) \; -$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{\nu+1}C'_\nu(\lambda_i a)}{b^{\nu-1}(b+\nu h)\,\lambda_i}\,\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \qquad (21)$$

Introduciendo (21) en (19), nos queda que

$$U+h\frac{\partial U}{\partial r} = \left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\nu-1}\left(\frac{r+\nu h}{b+\nu h}\right) - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{\nu+1}C'_\nu(\lambda_i a)}{b^{\nu-1}(b+\nu h)\lambda_i}\right. \; .$$

$$\left.\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2}\right]g(t) - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{b\,C_\nu(\lambda_i b)}{h\,\lambda_i^2} \; .$$

$$\left[g(0)\,e^{-k\lambda^2 t} - \int_0^t g'(x)\,e^{k\lambda_i^2(x-t)}dx\right] \; .$$

$$\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{aC'_\nu(\lambda_i a)}{\lambda i}\left[f(t)\right. \; -$$

$$\left.f(0)\,e^{-k\lambda_i^2 t} - \int_0^t f'(x)\,e^{k\lambda_i^2(x-t)}dx\right] \; .$$

$$\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-k\lambda_i^2 t}\,\bar{\ell}_\nu(\lambda_i) \; .$$

$$\frac{[C_\nu(\lambda_i r)+h\lambda_i C'_\nu(\lambda_i r)]}{\|C_\nu(\lambda_i r)\|^2} \qquad (22)$$

Puede demostrarse que

$$\frac{C'_{\nu}(\lambda_i b)}{C_{\nu}(\lambda_i b)} = -\frac{1}{h\lambda_i} \qquad (23)$$

Usando (23) , se deduce de (22) que

$$\left(U + \frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = g(t)$$

4. CASOS PARTICULARES

Tomando $\nu=0$ en (12) , el problema se reduce al estudiado en [2] , cuya solución corresponde a la expresión (14) con $\nu=0$.

Si en (12) las condiciones iniciales y de borde son

$$U(a,t) = U_0 \quad , \quad t > 0$$

$$\left(U + \frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=b} = U_1 \quad , \quad t > 0$$

$$U(r,0) = 0$$

la solución (14) se reduce a

$$U(r,t) = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left[\frac{b}{h} U_1 C_{\nu}(\lambda_i b) + aU_0 \lambda_i C'_{\nu}(\lambda_i a) \right] \cdot$$

$$\left[1 - e^{-k\lambda_i^2 t}\right] \frac{C_{\nu}(\lambda_i r)}{\|C_{\nu}(\lambda_i r)\|^2}$$

Este trabajo fue financiado parcialmente por el CONDES , Universidad del Zulia.

REFERENCIAS

1) SHYAM L. KALLA and ALFREDO VILLALOBOS : " *On a new integral transforms I.*" Jñānabha 9-10(1980) p. 149-154.

2) SHYAM L. KALLA y ALFREDO VILLALOBOS : " *Sobre una nueva transformada integral II.*" Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia 5 (ii) (1982), p. 40-44 .

Recibido el 5 de diciembre de 1983