

Factor R_i para la fase líquida controlante en sistemas de intercambio iónico basado en el Modelo de Capa Límite

Angel Larreal, Idelfonso Arrieta y César García
Escuela de Ingeniería Química,
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo-Venezuela

RESUMEN

La transferencia de masa en sistemas de intercambio iónico binario controlado por la fase líquida es analizado por el Modelo de Capa Límite y su comparación con el Modelo de Película. La transferencia de iones originado por el gradiente de concentración induce el efecto de migración iónica que resulta expresado por el Factor R_i -relación entre el flujo mixto (Fick y Nernst Planck) y el flujo purmanente difusional de Fick, se presentan resultados para sistemas catiónicos binarios para geometría planar de transferencia computarizado por el Método de Colocación Ortogonal. Se obtuvieron los siguientes valores extremos de R_i para los sistemas $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$ ($R_{\text{Na}^+} = 1.75$; $R_{\text{H}^+} = 0.25$), $\text{Cu}^{++} - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$ ($R_{\text{Cu}^{++}} = 1.54$, $R_{\text{Na}^+} = 0.70$), $\text{Na}^+ - \text{Cs}^+ - \text{Cl}^-$ ($R_{\text{Na}^+} = 1.217$, $R_{\text{Cs}^+} = 0.79$) y $\text{Cu}^{++} - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{--}$ ($R_{\text{Cu}^{++}} = 1.855$, $R_{\text{H}^+} = 0.233$).

ABSTRACT

The mass transfer rate for the case of the liquid-phase controlled binary ion-exchange system is analyzed by the Boundary Layer Model and its comparison with the Film Model is given. The mass transfer of ions initiated from concentration differences induce the ionic migration gradient which couples the fluxes of the exchanging ions. The effects of Self-induced electric field on the mass transfer rate are expressed by the R_i -factors as the relationship between the mixed flux (Fick plus Nernst-Planck) and the purely diffusional flux of Fick. The results are presented for cationic binary ion-exchange systems including concentration profiles and convective effects, after solving the simultaneous differential equation by the Orthogonal Collocation Method. The limiting values computed of R_i -factores for the following systems are: $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$ ($R_{\text{Na}^+} = 1.75$; $R_{\text{H}^+} = 0.25$), $\text{Cu}^{++} - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$ ($R_{\text{Cu}^{++}} = 1.54$; $R_{\text{Na}^+} = 0.70$), $\text{Na}^+ - \text{Cs}^+ - \text{Cl}^-$ ($R_{\text{Na}^+} = 1.217$; $R_{\text{Cs}^+} = 0.79$) y $\text{Cu}^{++} - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{--}$ ($R_{\text{Cu}^{++}} = 1.85$; $R_{\text{H}^+} = 0.23$).

INTRODUCCION

La incorporación del efecto de migración sobre

la transferencia de masa en sistemas de intercambio binario y sistemas multicomponentes de intercambio iónico ha sido analizada por García (1,2) e interpretada por el Modelo de Película propuesto por Nernst, sin embargo los resultados aparecen como máximos efectos derivados de la migración iónica, adaptables a patrones de intercambio tipo batch sin mayor agitación o turbulencia para la solución acuosa en contacto con las partículas del intercambiador.

Chapman y Tunison (3) estudiaron el efecto de migración iónica sobre la cinética de intercambio iónico líquido-líquido basada en el Modelo de Transferencia de Masa de Penetración. La magnitud de este efecto es estimada para el intercambio $\text{M}^{+2} + 2 \text{HR} \rightleftharpoons \text{MR}_2 + 2\text{H}^+$ de acuerdo a dicho modelo de transferencia y señalan que las interacciones electrostáticas entre los iones intercambiantes en contra difusión genera un campo eléctrico que distorsiona los perfiles de concentraciones y modifica los flujos a la interfase referido al Modelo de Fick. La diferencia entre el flujo del ion metálico según Nernst-Planck y el flujo puramente difusional según Fick resultaba menor al 10%, esto según la teoría de Van Brocklin (4) equivale a factores R_M mayores a 1.90 para las condiciones extremas de transferencia.

Para intercambio iónico en lechos fijos, el Modelo de Capa Límite parece ser el más apropiado para su real interpretación. Van Brocklin (4) determinó los factores R_i para los sistemas $\text{Cu}^{++} - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$ y $\text{Na}^+ - \text{Cs}^+ - \text{Cl}^-$ como valores asimptóticos en régimen laminar y altos Números de Schmidt, integrando el modelo diferencial por computación analógica.

Igualmente Van Brocklin (4) presenta las siguientes relaciones asimptóticas para los factores R_i entre los iones intercambiantes en función de las difusividades a dilución infinita,

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^n$$

donde $n=1$ para Modelo de Transferencia de Masa de Película, $n = 1/2$ para Modelo de Penetración y $n=$

2/3 para Modelo de Capa Límite.

El objetivo de esta investigación es estudiar la cinética de intercambio binario para los sistemas $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$, $\text{Cu}^{++} - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$, $\text{Na}^+ - \text{Cs}^+ - \text{Cl}^-$ y $\text{Cu}^{++} - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{--}$, como un proceso difusional controlado por la fase líquida e interpretada según los factores R_i para el Modelo de Transferencia de Masa de Capa Límite. Usando como método numérico de integración digital, el Método de Colocación Ortogonal en combinación con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Se analiza un amplio rango de variables para los sistemas iónicos: relación de valencias, relación de autodifusividades, efectos del ion común, saturación y regeneración; igualmente se analizan los parámetros del método de colocación ortogonal sobre los factores R_i : factores de convergencia $W(X) = 1.0$ y $W(X) = 1 - X^2$, número de puntos de colocación y tiempo de computación. Se comparan los factores electrostáticos entre los Modelos de Capa Límite y de Película para el mismo gradiente de concentración, todo en conjunto al efecto convectivo de la fase líquida expresada por el perfil dado de velocidades para los sistemas acusos de comportamiento newtoniano. Finalmente se comparan resultados entre los datos de Van Brocklin (4) por integración analógica y los obtenidos por integración digital.

FUNDAMENTOS TEORICOS

Para la transferencia de masa de soluciones diluidas consistentes en un solvente no ionizado y electrolitos ionizados, las ecuaciones fundamentales son (5):

- i) El flujo de cada una de las especies disueltas:

$$\bar{J}_i = \bar{U} C_i - D_i \nabla C_i - Z_i D_i C_i \nabla \phi \quad (1)$$

los tres términos del lado derecho de la ecuación representan tres mecanismos de transferencia de masa: convección debido al movimiento del medio, difusión molecular debido a un gradiente de concentración y movimiento de la especie cargada en el campo eléctrico.

- ii) La ecuación de continuidad asumiendo que no hay reacción química en el volumen de solución:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J}_i = 0 \quad (2)$$

- iii) La densidad de corriente en la solución

$$\bar{I} = F \sum_{i=1}^3 Z_i \bar{J}_i = 0 \quad (3)$$

donde $\bar{I} = 1, 2$ (iones intercambiantes) y 3 (ion común).

- iv) La solución electrolítica es electricamente neutra

$$\sum_{i=1}^3 Z_i C_i = 0 \quad (4)$$

Para el modelo bidimensional y estacionario de Capa Límite en flujo laminar, las ecuaciones básicas de transferencia de momentum para fluido incomprensible y newtoniano son:

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

las ecuaciones (5) y (6) agrupadas de manera integral así

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} U_x (U_x - U_\infty) dy = -v \frac{\partial U_x}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (7)$$

permite desarrollar para el perfil de velocidades expresiones en series de potencia $U_x = k_0(x) + k_1(x)y + k_2(x)y^2 + \dots$, donde $\delta(x) = (\beta v x / U_\infty)^{0.50}$ espesor de la capa límite de velocidad.

Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene el balance diferencial para la concentración de la especie i asociado al perfil de velocidades según la Ec. (7):

$$U_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + U_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = D_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C_i}{\partial y} + Z_i C_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (3) se obtiene la expresión diferencial del gradiente electrostático en función de las concentraciones, así:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\sum_{i=1}^3 Z_i D_i \frac{\partial C_i}{\partial y}}{\sum_{i=1}^3 Z_i^2 D_i C_i} \quad (9)$$

El factor R_i definido como la razón entre el flujo de transferencia de masa con migración iónica a un conjunto dado de condiciones y el flujo de transferencia de masa en el mismo conjunto de condiciones sin migración iónica, así a la interfase :

$$R_i = \frac{- \left[D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} + Z_i C_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0}}{- D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \Big|_{y=0}} \quad (10)$$

El factor R_i puede interpretarse como el cociente entre el coeficiente efectivo de transferencia de masa (incluye efectos acoplados de difusión más migración iónica dado por el Flujo de Nernst-Planck) y el coeficiente de transferencia de masa basado en el ión entrante (dado por el flujo puramente difusional de Fick),

$$R_i = \frac{k_f^e}{k_f} = \frac{\text{Flujo según Nernst-Planck}}{\text{Flujo según Fick}} \Big|_{\text{interfase}} \quad (11)$$

Conviene destacar que en la Ec. (10), la evaluación del factor R_i es sobre el flujo normal a la interfase como función de la posición horizontal o longitud del intercambiador; igualmente no aparece el término de convección ya que los componentes de velocidad son cero en la interfase.

Introduciendo las fracciones iónicas equivalentes $X_i = -Z_i C_i / Z_3 C_3^0$ con $X_1 = \lambda$, $X_2 = \alpha$ y las variables adimensionadas $v_x = U_x / U_\omega$, $v_y = (U_x / U_\omega)(x / \delta)$, $Y = y / \delta$, y $X = X / L_0$, la Ec. (8) con la sustitución del gradiente electrostático Ec. (9) puede escribirse de la siguiente manera para los iones intercambiantes :

i) Perfil de concentración para el ion entrante a la resina

$$XBS_{c_1} (v_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v_y \frac{\partial \lambda}{\partial y}) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Y^2} - Z_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} \frac{B_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} + B_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y}}{A_1 \lambda + A_2 \alpha} \\ & - Z_1 \lambda \frac{(B_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2}) (A_1 \lambda + A_2 \alpha)}{(A_1 \lambda + A_2 \alpha)^2} \\ & + Z_1 \lambda \frac{B_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} + B_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} (A_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y}) (A_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} + A_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y})}{(A_1 \lambda + A_2 \alpha)} \quad (12) \end{aligned}$$

ii) Perfil de concentración para el ion entrante a la solución

$$XBS_{c_2} (v_x \frac{\partial \alpha}{\partial X} + v_y \frac{\partial \alpha}{\partial Y}) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} -$$

$$\begin{aligned} & Z_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \frac{B_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} + B_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y}}{A_1 \lambda + A_2 \alpha} \\ & - Z_2 \alpha \frac{(B_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial Y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2}) (A_1 \lambda + A_2 \alpha)}{(A_1 \lambda + A_2 \alpha)^2} \\ & + Z_2 \alpha \frac{(B_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} + B_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y}) (A_1 \frac{\partial \lambda}{\partial Y} + A_2 \frac{\partial \alpha}{\partial Y})}{(A_1 \lambda + A_2 \alpha)^2} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\text{donde } A_1 = (D_1 / D_3) Z_1 + Z_3, \quad A_2 =$$

$$(D_2 / D_3) Z_2 + Z_3, \quad B_1 = (D_1 / D_3) + 1 \quad y$$

$$B_2 = (D_2 / D_3) + 1$$

Aplicando colocación ortogonal en geometría planar con los factores presentes $W(X) = 1.0$ y $W(X) = 1 - X^2$ y con distribución generalizada, las Ecuaciones 12 y 13 se transforman así :

i) Perfil de concentración para el ion entrante

te a la resina,

$$BS_{c_1} X \left(V_{XJ} \frac{d\lambda_J}{dX} + V_{YJ} \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \lambda_i \right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N+2} B_{Ji} \lambda_i - Z_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \lambda_i \right) X$$

$$\left(\frac{B_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \alpha_i}{A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J} \right)$$

$$\frac{-Z_1 \lambda_J \left(B_1 \sum_{i=1}^{N+2} B_{Ji} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} B_{Ji} \alpha_i \right) (A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J)}{(A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J)^2} + \left(Z_1 \lambda_J \right)$$

$$\left(\frac{B_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \alpha_i}{(A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J)^2} \right)$$

con $J = 2, \dots, N + 1$ (Ec. 14)

ii) Perfil de concentración por el ion entrante a la solución

$$BS_{c_2} X \left(V_{XJ} \frac{d\alpha_J}{dX} + V_{YJ} \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \alpha_i \right) =$$

$$\frac{B_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \alpha_i}{A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J}$$

$$= \sum_{i=1}^{N+2} B_{Ji} \alpha_i - Z_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \alpha_i$$

$$\frac{-Z_2 \alpha_J \left(B_1 \sum_{i=1}^{N+2} B_{Ji} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} B_{Ji} \alpha_i \right) (A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J)}{(A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J)^2}$$

$$+ Z_2 \alpha_J$$

$$\left(\frac{B_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{Ji} \alpha_i}{(A_1 \lambda_J + A_2 \alpha_J)^2} \right)$$

$$J = 2, \dots, N + 1 \quad (\text{Ec. 15})$$

donde $X_1 = \lambda_j$ significa la fracción iónica equivalente del J ion entrante a la resina a la posición X y al punto de colocación ortogonal Y_j ; $X_2 = \alpha_j$ expresa la fracción iónica equivalente del ion entrante a la solución; y X_3 representa al ion común dado por la condición de neutralidad $X_3 = \lambda_j + \alpha_j$. Las matrices A_{ji} y B_{ji} son resultantes de la metodología de cálculo bien definida en la literatura (5, 6).

El factor R_i de transferencia de masa dado por la Ec. (10) previa sustitución del gradiente electrostático (Ec. 9), puede expresarse por colocación ortogonal de la siguiente manera para los iones intercambiables:

i) Factor R_1 para el ion entrante a la resina

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \lambda_i - \left(\frac{B_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \alpha_i}{A_1 \lambda_1 + A_2 \alpha_1} \right) Z_1 \lambda_1}{\sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \lambda_i} \quad (16)$$

ii) Factor R_2 para el ion entrante a la solución

$$R_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \alpha_i - \left(\frac{B_1 \sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \lambda_i + B_2 \sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \alpha_i}{A_1 \lambda_1 + A_2 \alpha_1} \right) Z_2 \alpha_1}{\sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \alpha_i} \quad (17)$$

Las condiciones de borde pueden expresarse así :

i) A la interfase, $y=0$, el flujo del ion común es cero , así en notación de colocación ortogonal para la Ec. (1) :

$$y = 0, \quad J_3 = 0$$

$$a \quad Y_1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \lambda_i + \left(\frac{\lambda_1 (A_1 - Z_3 B_2) + \alpha_1 (A_2 - Z_3 B_2)}{\lambda_1 (A_1 - Z_3 B_1) + \alpha_1 (A_2 - Z_3 B_1)} \right) X$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N+2} A_{1i} \alpha_i \right) = 0$$

La ecuación anterior relaciona las composiciones de los iones intercambiables a la interfase. $\alpha_1 = f(\lambda_1)$, bastaría fijar la composición del ion entrante a la resina en el rango $0 < \lambda_1 < 1$ para el análisis del proceso de transferencia de masa de cada sistema iónico.

ii) En el seno de la solución para $y \geq \delta(x)$, la composición iónica de la solución permanece constante a cualquier posición $x > 0$, esto es a $y > \delta(x)$, $\alpha^0 + \lambda^0 = x_3^0$, en notación por colocación ortogonal, a $Y_{N+2} = 1.0$, $\alpha_{N+2}^0 + \lambda_{N+2}^0 = x_{N+2}^0$ (19)

El sistema de ecuaciones diferenciales (resultantes al transformar las ecuaciones en derivadas parciales por colocación ortogonal) en conjunto con las condiciones de borde se resuelven mediante el método de Runge-Kutta en un programa de computación (7) para determinar las fracciones iónicas equivalentes del sistema de intercambio en los puntos de colocación ortogonal y sus variaciones con la dirección de flujo, igualmente los resultados son expresados de manera puntual y global para los factores electrostáticos R_1 y R_2 según las Ecuaciones 16 y 17.

DISCUSION DE RESULTADOS

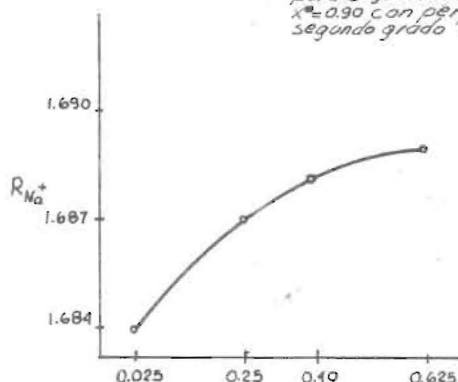
El Modelo de Transferencia de Masa de Capa Límite integrado por el método de colocación ortogonal reporta valores de acuerdo a la dirección de flujo (x) y según la dirección de transferencia de masa (Y_j - puntos de colocación ortogonal) para las

fracciones iónicas equivalentes (ion entrante, ion saliente e ion común) como función de los parámetros difusionales y perfil de velocidades para la solución asumida newtoniana. Los sistemas de intercambio estudiados son : $\text{Cu}^{++} - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{--}$, $\text{Cu}^{++} - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$, $\text{Na}^+ - \text{Cs}^+ - \text{Cl}^-$, $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$, $\text{H}^+ - \text{Cu}^{++} - \text{SO}_4^{--}$, $\text{H}^+ - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$, $\text{Na}^+ - \text{Cu}^{++} - \text{Cl}^-$, $\text{Cs}^+ - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$ y $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{--}$. El gradiente de concentración que simula la mayoría de las situaciones prácticas de saturación, considera 100% del ion entrante en la solución (en notación de colocación $X = 1$ a $Y_{N+2} = 1.0$) y variaciones a la interfase líquido-sólido desde $X = 0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.50, 0.70, 0.90$ y 0.99 a $Y = 0$; el factor R_i se expresa para los mismos niveles del gradiente de concentraciones. Para los Números de Schmidt de los diferentes sistemas iónicos mayores a la unidad, puede considerarse que el perfil de velocidades se desarrolla primero que el perfil de concentraciones, tal cual resulta para el intercambio isotópico donde a partir de la posición $X = 1.10^{-5}$ cm aparece el desarrollo de la capa límite de velocidades mientras a la posición $X = 1.10^{-3}$ aparece el desarrollo de la capa límite de concentración. De manera genérica se analiza el sistema $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$ y para los restantes sistemas iónicos y variables se presentan los resultados globales en términos de los factores R_i .

En la práctica el sistema $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$ se corresponde a la solución acuosa de NaCl en contacto con el intercambiador en la forma iónica de Hidrógeno, así el ion entrante es el Sodio Na^+ , el ion saliente el Hidrógeno H^+ y el ion común el Cloruro Cl^- , la reacción de intercambio es $\text{Na}^+ + \text{R} - \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{R} - \text{Na}$, el ion Na^+ es el más lento respecto al ion saliente H^+ .

Bajo la aproximación numérica aximétrica planar con 5 puntos de colocación ortogonal y factor pesante $W(X^2) = 1 - X^2$, los valores locales del factor R_{Na^+} varían según la dirección del flujo (X) aproximándose a un valor asintótico definido por la condición de perfil completamente desarrollado, así en la Figura No. 1 se muestra la variación de R_{Na^+} para el gradiente de concentración $X^0 = 1.0$, $X^* = 0.90$ para perfil de segundo grado de velocidad.

Fig. N° 1. Factor R_{Na^+} vs posición horizontal para el gradiente $x^0 = 1.0$, $x^* = 0.90$ con perfil de segundo grado (veloc.)



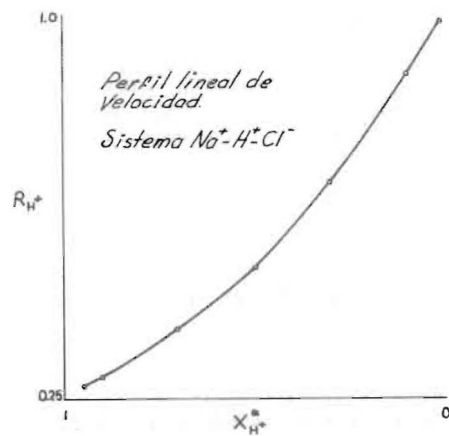
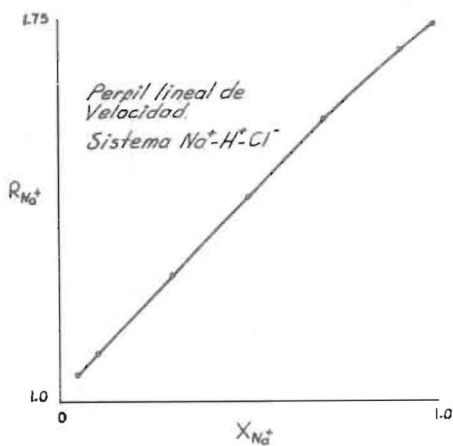
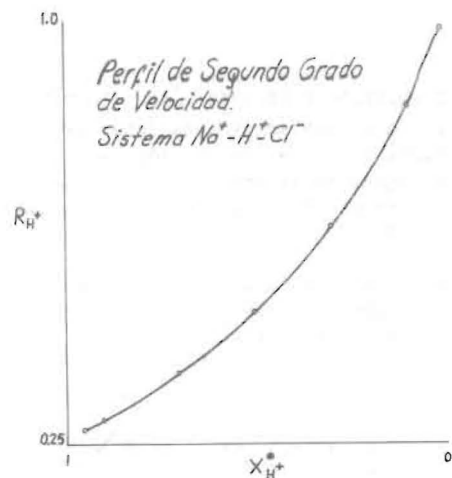
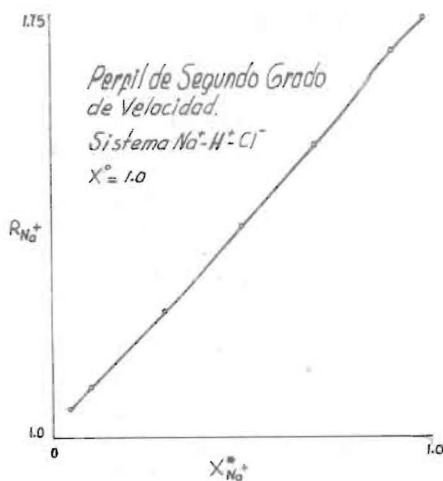
De esta manera se presenta en la Figura No. 2 el factor R_{Na^+} para el ion entrante a la resina, Sodio intercambiando Hidrógeno, para los perfiles de velocidad lineal y de segundo grado. El factor R_{Na^+} incrementa con la concentración a la interfase desde valores próximos a la unidad para la región diluída $X^* \rightarrow 0$ hasta aproximadamente 1.75 para los niveles de saturación $X^* \rightarrow 1.0$, observándose que el ion entrante es más lento que el ion saliente de la resina, esto es la relación de difusividades $D_{Na^+}/D_{H^+} < 1$ y el factor R_{Na^+} resulta mayor a la unidad, la mayor movilidad del ion hidrógeno genera acumulación de carga en la fase del sodio induciendo un potencial electrostático en la zona de capa límite retardando el flujo iónico del hidrógeno y acelerando así la movilidad del ion sodio, de esta manera debe resultar el factor R_{H^+} menor a la unidad,

tal como se aprecia en la Figura No. 3. El factor R_{Na^+} definido como el cociente entre el coeficiente de transferencia efectivo (efectos acoplados de difusión más migración iónica) y el coeficiente de transferencia de masa basado en el ion entrante (calculado por correlaciones para no-electrolitos), a la luz de estos resultados, se demuestra la variación con las condiciones puntuales de la fuerza pulsora y con el valor extremo de 1.75, obviamente no podrían desprejiciarse los efectos de migración iónica en la cinética o diseño de sistemas de intercambio iónico; para el ion saliente el factor R_{H^+} alcanza valores entre 0.25 hasta 1.0 para las mismas condiciones de intercambio.

El efecto del perfil de velocidades sobre el factor R_{Na^+} no parece muy influyente en los va-

Fig. N° 2. Factor R_{Na^+} como función de la concentración a la interfase para aproximación asimétrica planar. Factor pesante $1-x^2$ y 5 puntos de colocación.

Fig. N° 3. Factor R_{H^+} como función de la concentración a la interfase para aproximación asimétrica planar. Factor pesante $1-x^2$ y 5 puntos de colocación.



lores particulares en el rango de composiciones a la interfase, en el rango diluido $X^* < 0.50$ los valores de R_{Na^+} para perfil lineal de velocidades resultan ligeramente mayores que los R_{Na^+} para perfil de segundo grado de velocidad, mientras en el rango concentrado $X^* > 0.50$ los valores de R_{Na^+} para perfil lineal resultan ligeramente menores, la curva del factor R_{Na^+} como función del valor de interfase X^* presenta ligera convexidad hacia los valores intermedios de X^* .

El perfil de concentración de la fase líquida en contacto con el intercambiador se presenta contra la dirección de transferencia a cada posición de la geometría planar y gradiente de la fuerza pulsora (X^0, X^*). Para el ion sodio, por las condiciones impuestas de transferencia, el perfil de concentración aumenta desde el valor de interfase (X^*) hasta el valor de mezcla en el seno de la fase líquida (X^0), contrariamente por el ion hidrógeno. El perfil lineal de velocidad introduce cierta linearización a los perfiles verticales de concentración mientras el perfil de segundo grado de velocidad causa achatamiento a los perfiles de concentración; el proceso neto de transferencia ocurre principalmente en la región próxima a la interfase (superficie del intercambiador o a $Y \rightarrow 0$), para el perfil de velocidad de segundo grado el área efectiva comprende casi el 50% del área definida por la capa límite de velocidad mientras para el perfil lineal de velocidad el área efectiva para el intercambio iónico alcanza hasta el 90% del área definida por la capa límite de velocidad en relación al mismo gradiente de fuerza pulsora, de manera complementaria el flujo iónico a la interfase es mayor para la solución líquida con perfil de segundo grado de velocidad que para el caso de perfil lineal de velocidad, y la región de capa límite de concentración es más comprimida. Para ilustrar las observaciones anteriores se presentan las Figuras Nos. 4

Fig. N° 4. Perfiles de concentración ionica equivalente para los iones Hidrogeno y Sodio en función de la dirección vertical Y_J .

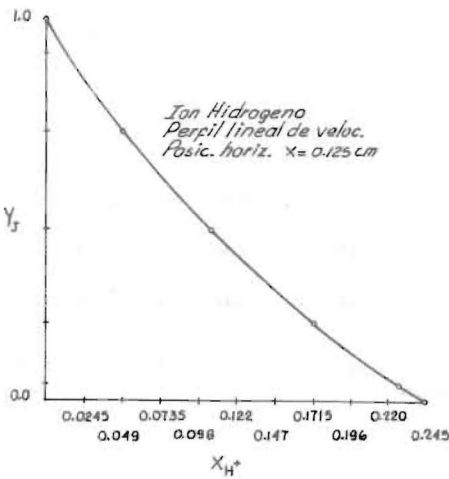
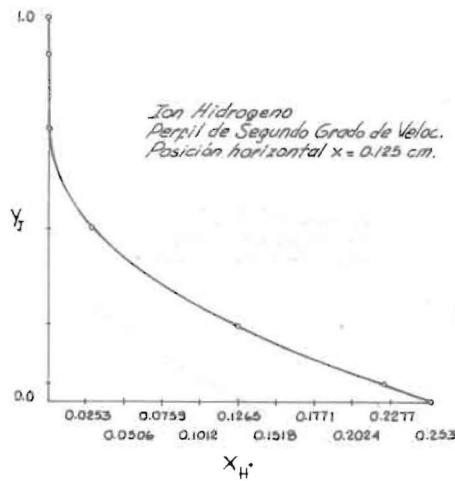
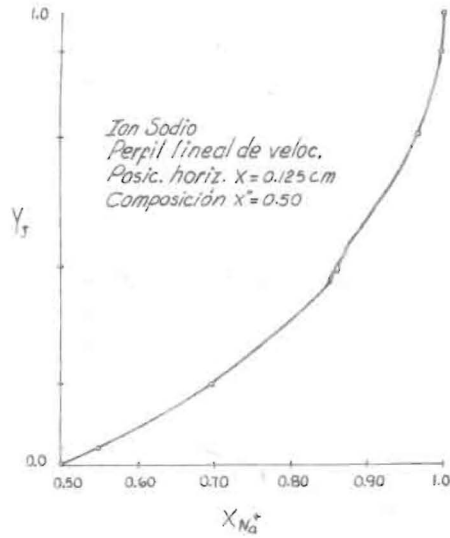


Fig. N° 5. Perfiles de concentración ionica equivalente para los iones Hidrogeno y Sodio en función de la dirección vertical Y_J .



y 5 con los perfiles de concentración para los iones Na^+ e H^+ bajo la fuerza pulsora referida al sodio de $X^0 = 1.0, X^* = 0.50$ a la dirección de flujo $X = 0.125$ cm para los perfiles de velocidad lineal y de segundo grado respectivamente. La Figura No. 6 presenta el perfil de concentración para el ion común Cl^- como función de la dirección vertical Y_J para los perfiles de velocidad de primer y segundo grado; para la condición de solución líquida electricamente neutra a cada posición de la capa límite de concentración $X_{Cl^-} = X_{Na^+} + X_{H^+}$ la tendencia es controlada por el perfil del ion entrante a la resina.



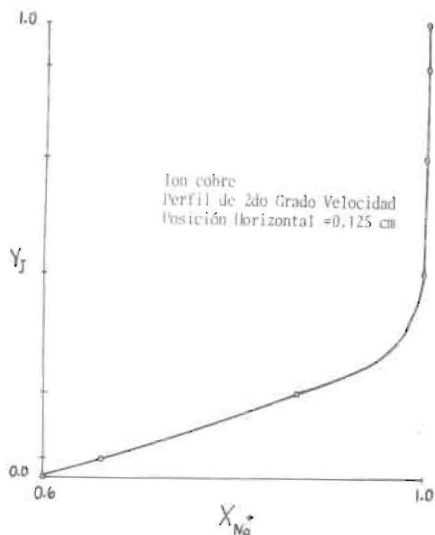
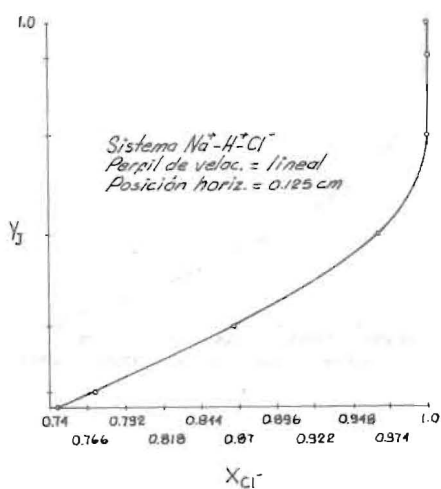
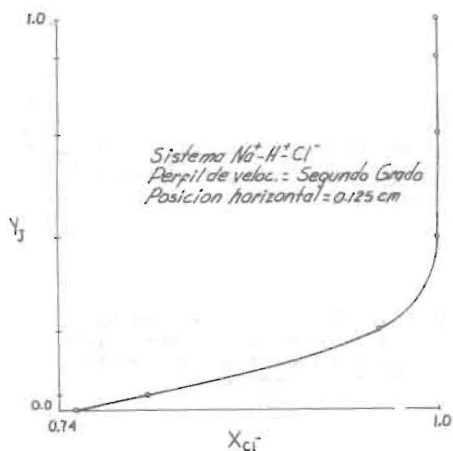


Fig N° 6 Perfil de concentración para el ión común Cloruro como función de la dirección vertical Y_j .



Basado en el Modelo de Película (1,2,4) la expresión analítica del factor R_{Na^+} para el sistema $Na^+ - H^+ - Cl^-$ es :

$$R_{Na^+} = 2.34 \frac{1 - \left(\frac{1.168 - X^0}{1.168 - X^*} \right)^{1/2}}{X^0 - X^*}$$

Comparando con los valores obtenidos por el Modelo de Capa Límite asociado con perfil de velocidad de segundo grado :

Composición en la solución : $X_{Na^+} = 1.0$

Interfase X^*	0.05	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.99
R_{Na^+} (Película)	1.51	1.57	1.87	2.33	3.13	4.87	6.67
R_{Na^+} (Capa Límite)	1.06	1.09	1.25	1.39	1.54	1.689	1.74

los resultados por película ofrecen efectos máximos las consideraciones de ausencia del campo de velocidades y exclusión de movilidad para el ion común.

Basado en el Modelo de Película de Transferencia de Masa (1,2,4) para el sistema iónico $Cu^{++} - Na^+ - Cl^-$, el factor $R_{Cu^{++}}$ puede expresarse así :

$$R_{Cu^{++}} = - \frac{15}{X^0 - X^*} \left[(4 - X^0) - (4 - X^*) \left[\frac{-5 + X^0}{-5 + X^*} \right]^{1.67} \right]$$

A continuación se establece la comparación entre los resultados por Película, los resultados por computación analógica según la referencia (4) y los resultados por el Modelo de Capa Límite (para perfil lineal de velocidad de la solución acusa y aproximación asimétrica sobre 5 puntos de colocación ortogonal) :

Composición a la Interfase, X^* :	0.05	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.99
Modelo de Película, $R_{Cu^{++}}$	1.268	1.293	1.398	1.515	1.645	1.792	1.863
Modelo de Capa Límite, $R_{Cu^{++}}$ (Computación Digital)	1.028	1.054	1.155	1.248	1.334	1.414	1.448
Modelo de Capa Límite, $R_{Cu^{++}}$ (Computación Analógica)	1.117	1.133	1.200	1.283	1.375	1.475	1.500

Los resultados por el Modelo de Película reflejan valores máximos del efecto de migración iónica adaptables a situaciones de intercambio tipo batch sin mayor agitación o turbulencia, sin embargo los valores del factor $R_{Cu^{++}}$ disminuyen con la dinámica del sistema y la literatura (4) recomienda el Modelo de Capa Límite para lechos fijos. La comparación del Modelo de Capa Límite entre la metodología del cálculo ofrece valores mayores por computación Analógica sobre Computación Digital - Colocación Ortogonal, la diferencia tradicional reside que por computación analógica el modelo es derivativo que suelen propagar errores mientras por computación digital el modelo es íntegro - derivativo que suelen balancear los errores de aproximación; la diferencia disminuye con incremento de la composición a la interfase, para $X^* > 0.50$, además para el Modelo de Capa Límite por Computación Analógica deben considerarse los factores $R_{Cu^{++}}$ como valores asintóticos en régimen laminar y altos Números de Schmidt, mientras por el presente modelo de integración no hay particularizaciones de régimen de flujo ni restricciones sobre valores del No. de Schmidt. Sin embargo, el factor $R_{Cu^{++}}$ para el sistema $Cu^{++} - Na^+ - Cl^-$ ofrece variaciones entre 1 y 1.45 para el rango de interfase X^* (0,1) que demuestra la estricta dependencia con las condiciones de transferencia controlada por la relación de difusividades.

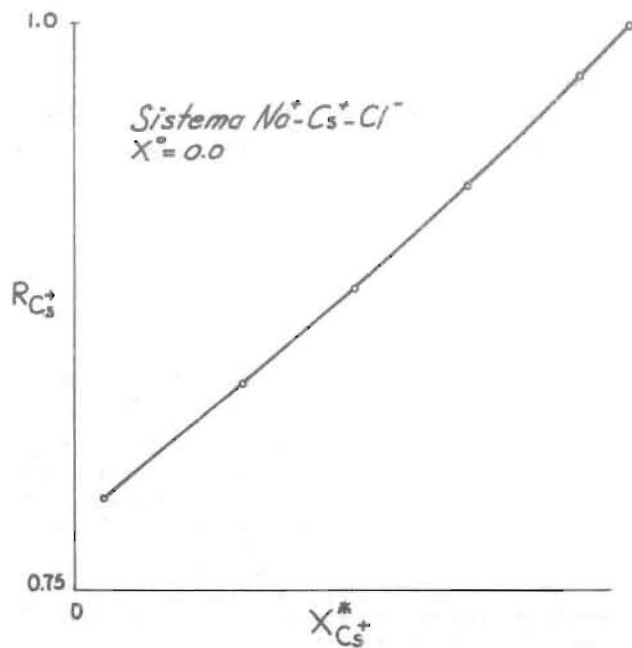
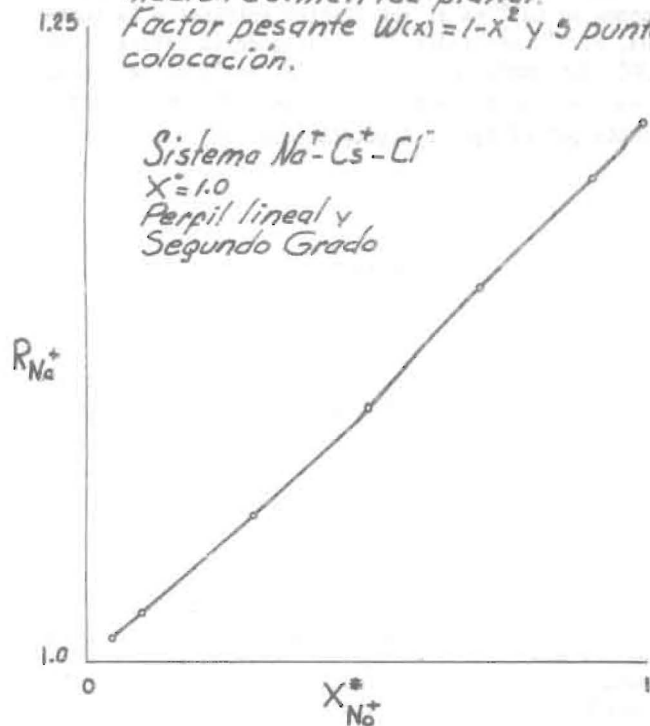
La Figura No. 7 presenta el factor de migración iónica o factor electrostático como función de la composición a la interfase, para el ion entrante Na^+ y para el ion saliente Cs^+ ; la variación es relativamente lineal entre R_{Na^+} y $X_{Na^+}^*$ igual para R_{Cs^+} y $X_{Cs^+}^*$. El factor R_{Na^+} resulta mayor a la unidad según la relación de difusividades $D_{Cs^+}/D_{Na^+} = 1.56 > 1$, varía entre 1 y 1.217 sin efectos notables del campo de velocidades (perfil lineal y perfil de segundo grado), contrariamente para el ion Cs^+ el factor R_{Cs^+} varía entre 0.79 y 1.00 para todo el rango de la interfase. Obviamente, la magnitud e importancia del factor R_i está regida por la relación de autodifusividades.

El factor R_{Na^+} para el sistema $Na^+ - Cs^+ - Cl^-$ basado en el Modelo de Transferencia de Masa de Película puede expresarse así :

$$\frac{R}{Na^+} = \frac{2.776}{X^0 - X^*} \left[2 - 2 \left(\frac{2.776 - X^0}{2.776 - X^*} \right)^{0.50} \right]$$

y su comparación con los valores según Modelo de Capa Límite (Digital-Colocación Ortogonal) y Modelo de Capa Límite (Computación Analógica) soporta los comentarios anteriores.

Fig. N° 7 Factores R_{Na^+} y R_{Cs^+} como función de la concentración a la interfase para aproximación asimétrica planar. Factor pesante $W(x) = 1 - x^2$ y 5 puntos de colocación.



Interfase, X^*	0.05	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.99
Modelo de Película	1.127	1.143	1.214	1.295	1.389	1.500	1.556
Modelo de Capa Límite (Colocación Ortogonal)	1.010	1.021	1.063	1.107	1.151	1.197	1.217
Modelo de Capa Límite (Computación Analógica, Ref.4)	1.046	1.057	1.1035	1.1370	1.218	1.2785	1.314

En la práctica el sistema $\text{Cu}^{++}-\text{H}^+-\text{SO}_4^-$ se corresponde con la solución acuosa de CuSO_4 en contacto con la resina bajo la forma del ion Hidrógeno donde el Cu^{++} es el ion (lento) entrante a la resina, el H^+ ion (rápido) saliente de la resina y el SO_4^- ion común. De acuerdo a la teoría de película, los efectos incorporados de migración iónica expresados por el factor electrostático (4) :

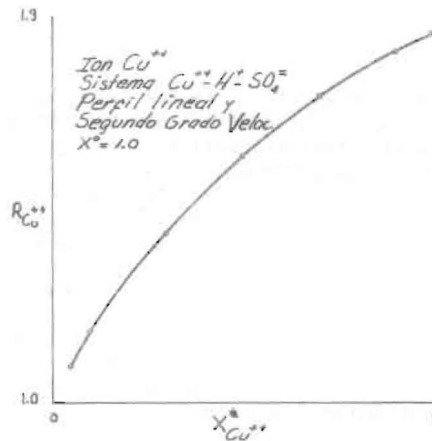
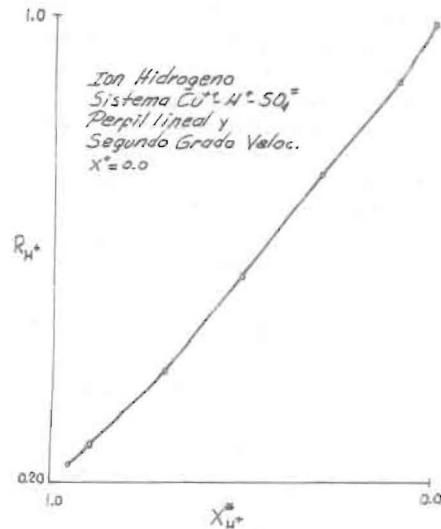
$$R_{\text{Cu}^{++}} = 1.182 \left(\frac{(3-X^0)-(3-X^*) \left[\frac{(1-0.8972 X^0)}{(1-0.8972 X^*)} \right]^{0.685}}{X - X^*} \right)$$

Comparando valores para la condición saturada del ion Cu^{++} en solución con los valores obtenidos por el Modelo de Capa Límite (generalizado y bidimensional, con la aproximación del Método de Colocación Ortogonal), la literatura no ofrece referencia para el sistema $\text{Cu}^{++}-\text{H}^+-\text{SO}_4^-$:

Interfase	0.05	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.99
Película	1.691	1.772	2.736	3.626	5.375	7.4895	12.053
Capa Límite	1.089	1.162	1.395	1.575	1.714	1.817	1.853

La relación de difusividades entre el ion Hidrógeno y el ion Cobre es 12.972 o sea $D_{\text{H}^+}/D_{\text{Cu}^{++}} = (D_{\text{H}^+}/\delta)/(D_{\text{Cu}^{++}}/\delta) = k_1(X_1^0 - X_1^*)/k_2(X_2^* - X_2^0)$, el flujo de iones Hidrógeno desde la interfase al seno de la solución es 12.972 el flujo de iones Cobre desde el seno de la solución a la interfase mientras los efectos convectivos favorecen el flujo de iones Cobre estableciendo la relación a 1.853 ($R_{\text{Cu}^{++}}$, según capa límite para $X^0 = 1.00$ y $X^* = 0.99$); a dilución iónica a trazas del ion Cu^{++} resultan valores extremos para el ion saliente H^+ , $R_{\text{H}^+} \rightarrow 0.233$ como $X^* \rightarrow 1$ y para el ion Cobre $R_{\text{Cu}^{++}} \rightarrow 1$ como $X^* \rightarrow 0$. La Fig. No. 8 presenta los factores electrostático $R_{\text{Cu}^{++}}$ y R_{H^+} como dependiente de la composición a la interfase, sin variación aparente con el campo de velocidades; para el ion entrante el factor $R_{\text{Cu}^{++}}$ aumenta con el grado de saturación de la resina y contrariamente el factor R_{H^+} se desvía de la unidad. El valor de $R_{\text{Cu}^{++}} = 1.853$ puede interpretarse así, el coeficiente efectivo de transferencia de masa en presencia de migración iónica es 1.853 veces el coeficiente de

Fig. N° 8 Factores electrostáticos para los iones Cu^{++} e H^+ como función de la composición a la interfase.

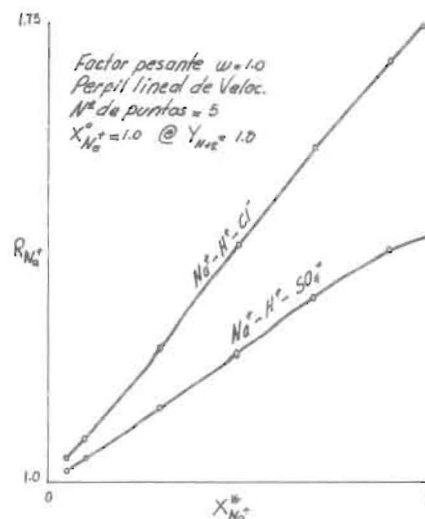


transferencia de masa basado en el ion entrante a la resina, de calcular dicho coeficiente por las correlaciones tradicionales de transferencia de masa se cometería un error del 85% para el gradiente ($X^0 = 1.0$, $X^* = 0.99$) mientras para el gradiente ($X^0 = 1.0$, $X^* = 0.01$) el error sería de 8.9%.

Para el Modelo de Transferencia de Masa de Película, el efecto del Co-ion se reduce a la consideración del efecto de la valencia iónica ya que la difusividad es eliminada en la derivación del factor R_i . Tales efectos son resumidos por García y David (1) : i) El incremento de la valencia del ion común causa disminución sobre los factores R_i ; ii) La importancia del coion sobre los factores R_i aumenta con aumento de la relación de difusividades de los iones intercambiantes y iii) Las mayores diferencias se observan para equilibrio lineal y ligeramente favorable o desfavorable.

Sobre la difusividad del co-ion, Van Brocklin y David (4) realizaron cálculos por computación analógica para el Modelo asintótico de Capa Límite y no observaron efectos significantes sobre los factores R_i . Sin embargo, antes de analizar los efectos combinados de valencia y difusividad sobre los factores R_i , conviene destacar que los iones polivalentes exhiben menor movilidad que los iones divalentes y monovalentes. Así por ejemplo, el co-ion Cl^- de valencia -1 tiene difusividad de $2.03 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{seg}$ a 20°C mientras el co-ion SO_4^{2-} de valencia -2 tiene menor difusividad $1.08 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{seg}$; sobre tales bases, al incrementar de valencia iónica implica afirmar disminución de la movilidad iónica.

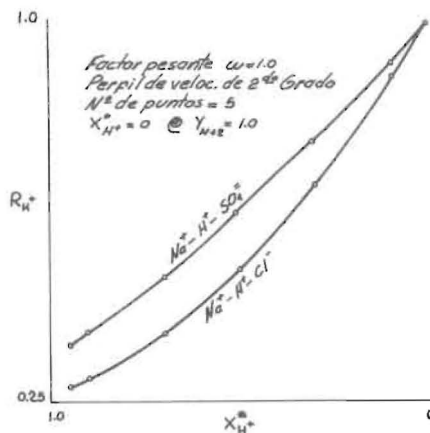
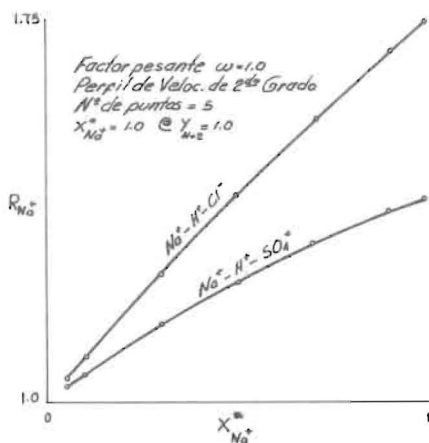
Para el Modelo Generalizado de Capa Límite analizado por Colocación ortogonal se presentan los R_i calculados por los sistemas $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$ y $\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{2-}$ en las Figuras Nos. 9 y 10 para cinco (5) puntos de colocación ortogonal, factor pesantes $W(X) = 1.0$ y campo de velocidades lineal y de segundo grado. De las figuras puede deducirse: i) Para el ion entrante a la resina, el incremento de la valencia iónica y disminución de la movilidad del ion común causa disminución del factor R_i ; ii) Para el ion saliente de la resina, el incremento de la valencia iónica y disminución de la movilidad del co-ion causa aumento del factor R_i ; iii) La diferencia entre los R_i con el ion común aumenta con el grado de concentración de los iones intercambiadores o sea para $X^* \rightarrow 0$ la diferencia es mínima pero para $X^* \rightarrow 1$ la diferencia es extrema; iv) Para el ion saliente de la resina e ion más rápido, la diferencia entre los R_i es me-

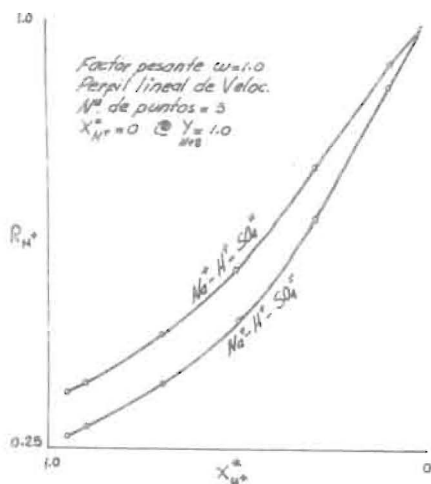


nor comparada a la diferencia observada para el ion entrante. Esto manifiesta que la resistencia del co-ion es mayor para el proceso de transferencia del ion entrante o ion intercambiante de menor movilidad. El ion común se distribuye en la región de capa límite desde el borde hasta la interfase líquido-intercambiador sin ninguna transferencia efectiva con la resina catiónica, aparentemente cuanto menor sea su movilidad iónica menor es la generación del campo electrostático autoinducido y menor el flujo por migración iónica.

Fig. N° 9 Factor R_i para el ion Sodio como función del ion común.

Fig. N° 10 Factor R_i para el ion Hidrogeno como función del ion común.





CONCLUSIONES

Del modelo generalizado de Capa Límite bidimensional para transferencia de masa en sistemas binarios de intercambio iónico controlado por la fase líquida y resuelto por el método de colocación ortogonal se derivan las siguientes conclusiones :

1. Los factores R_i definido como el cociente entre el coeficiente efectivo de transferencia de masa (incluye efectos acoplados de difusión más migración iónica, dado por el flujo de Nerst-Planck), y el coeficiente de transferencia de masa basado en el ion entrante (expresado por el flujo puramente difusional de Fick), muestran estricta variación con el gradiente de concentración del seno de la solución y la composición de la interfase, desde valores próximos a la unidad para la región diluida como $X^* \rightarrow 0$ hasta valores extremos para los niveles de saturación como $X^* \rightarrow 1$.

2. Los factores R_i resultan mayores a la unidad para el ion intercambiante de menor difusividad y menor a la unidad para el ion intercambiante de mayor difusividad independiente. Si el proceso de intercambio iónico es de saturación o regeneración. Los valores extremos como $X^* \rightarrow 1$ para los sistemas iónicos :

Sistema iónico	R_i ion entrante	R_i ion saliente
$\text{Na}^+ - \text{H}^+ - \text{Cl}^-$	1.75	0.25
$\text{Cu}^{++} - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$	1.45	0.70
$\text{Na}^+ - \text{Cs}^+ - \text{Cl}^-$	1.217	0.79
$\text{Cu}^{++} - \text{H}^+ - \text{SO}_4^{--}$	1.853	0.233
$\text{H}^+ - \text{Cu}^{++} - \text{SO}_4^{--}$	0.20	1.855

Sistema iónico	R_i ion entrante	R_i ion saliente
$\text{N}^+ - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$	0.26	1.75
$\text{Na}^+ - \text{Cu}^{++} - \text{Cl}^-$	0.70	1.45
$\text{Cs}^+ - \text{Na}^+ - \text{Cl}^-$	0.782	1.217

3. Los resultados por el Modelo de Transferencia de Masa de Película reflejan valores máximos del efecto de migración iónica adaptables a patrones de intercambio iónico tipo batch sin mayor agitación o turbulencia donde el mecanismo controlante sea difusión y migración iónica. Obviamente los valores de R_i para el Modelo de Película resultan mayores a los obtenidos por Capa Límite, esto significa que los efectos convectivos reducen los efectos de migración iónica, recomendándose su utilización en la predicción de lechos fijos.

4. La comparación del Modelo de Capa Límite entre las metodologías del cálculo ofrece valores mayores por computación analógica sobre computación digital y colocación ortogonal, la diferencia reside que por computación analógica el modelo es derivativo, que suelen propagar errores mientras que por computación digital el modelo es íntegro-derivativo que suelen balancear los errores de aproximación; la diferencia disminuye con incremento de la composición a la interfase para $X^* > 0.50$, además por el Modelo de Capa Límite por computación analógica deben considerarse los factores R_i como valores asintóticos en régimen laminar y altos Números de Schmidt, mientras por el presente modelo no hay particularizaciones de régimen de flujo, ni restricciones sobre valores del Número de Schmidt.

5. El perfil de segundo grado de velocidad tiende a generar un perfil tipo pistón de la concentración iónica en áreas próximas a la superficie del intercambiador sólido, mientras el perfil lineal de velocidad tiende a linearizar el perfil de concentración alcanzando mayor profundidad en la dirección de transferencia. El área efectiva de transferencia de la zona de capa límite de concentración ocurre entre el 50% al 90% del área de la zona de capa límite, de velocidad. a mayor distribución del campo de velocidades se reduce el área efectiva de transferencia de masa sobre la superficie del intercambiador.

6. Aunque los perfiles de concentración iónica muestran variación con el campo de velocidades, el factor electrostático R_i muestra poca variación; esto puede explicarse por la definición del factor R_i a la interfase ($Y_1 \rightarrow 0$), donde se cancelan los efectos de velocidades, aún cuando los perfiles de concentración son dirigidos por los efectos inerciales y de migración iónica.

7. Los factores pesantes, $W(X) = 1.0$ y $W(X) = 1 - X^2$ no introducen variaciones acentuadas en el orden de magnitud de los valores R_i , para el rango concentrado del ion entrante, no existen diferencias apreciables, pero estos aumentan con disminución de la composición a la interfase. Los valores R_i resultan menores para la aproximación numérica según el factor pesante $W(X) = 1.0$ y perfil lineal de velocidades, al contrario los R_i resultan mayores para $W(X) = 1 - X^2$ y perfil de segundo grado de velocidad. La variación de los R_i con los factores pesantes revela la convergencia de los resultados en el orden de magnitud de sus valores. Los resultados demuestran a través de los factores pesantes que la distribución parabólica del perfil de velocidades favorece la generación del potencial electrostático en la región próxima a la superficie del intercambiador.

8. Sobre la convergencia de la aproximación según el Número de Puntos de Colocación Ortogonal: i) Para $N \leq 3$, el perfil de concentración del ion más lento ofrece menores diferencias referidas a la aproximación para $N = 5$; ii) Para el factor pesante $W(X) = 1.0$ y $N \leq 3$, los factores electrostáticos R_i resultan mayores a los R_i según $N = 5$; iii) Para el factor pesante $W(X) = 1 - X$ y $N \leq 3$, los factores R_i resultan menores a los R_i según $N = 5$; iv) Para el ion más rápido y $N \leq 3$, los factores R_i se aproximan a la solución de \bar{R}_i y $N = 5$ con el perfil lineal de velocidad para la mezcla acuosa; v) Para $N = 1$, los factores electrostáticos resultan mayores que los R_i , para $N > 1$ e independiente de los factores pesantes y campo de velocidades, obviamente la aproximación a un punto de colocación sólo asoma el orden de magnitud de la solución.

9. El tiempo de computación en general se incrementa con el incremento del gradiente de concentración iónica, con variaciones entre 34 y 35 minutos para las comparaciones con el campo de velocidades, se observa ligera disminución del tiempo de computación cuando el ion entrante a la resina es el ion de mayor difusividad. El tiempo se incrementa con el número de puntos de colocación aproximadamente según 2^N por cada gradiente de concentración.

10. El incremento de la valencia iónica y disminución de la movilidad del ion común causa disminución del factor R_i para el ion entrante a la resina y aumento del factor R_i para el ion saliente de la resina. La diferencia entre los R_i con el ion aumenta: i) Con el aumento del grado de concentración de los iones intercambiantes, ii) Con la disminución de la movilidad de los iones intercambiantes.

Entre las recomendaciones sobre el Modelo Generalizado de Capa Límite pueden señalarse:

1. Incluir la resistencia de la fase sólida y estudiar dicho efecto sobre la magnitud del factor electrostático para los iones intercambiantes en la fase líquida.

2. Considerar sistemas multicomponentes de iones intercambiantes, controlado el proceso de transferencia de masa, por la fase líquida.

3. Incorporar el factor electrostático en la evaluación de unidades de intercambio iónico tipos: lecho fijo, lecho móvil y lecho fluidizado.

LISTA DE SIMBOLOS

\bar{A}	: Matriz para primera derivada, adimensional.
A_1	: Parámetro adimensional de difusividades, adimensional.
A_2	: Parámetro adimensional de difusividades, adimensional.
A_{ji}	: Elemento genérico de la matriz para la primera derivada, adimensional.
\bar{B}	: Matriz para segunda derivada, adimensional.
B_1	: Parámetro adimensional de difusividades, adimensional.
B_2	: Parámetro adimensional de difusividades, adimensional.
B_{ji}	: Elemento genérico de la matriz para la segunda derivada, adimensional.
C_0	: Concentración total de la solución, gr-mol/cm ³ .
C_i	: Concentración de cada especie disuelta, gr-mol/cm ³ .
D_i	: Coeficiente de difusividad del ion i , cm ² /seg.
F	: Constante de Faraday, 96,500 Coulomb/g eq.
\bar{I}	: Densidad de Corriente en la solución, Amp/cm ² .
\bar{J}_i	: Flujo de cada una de las especies disueltas, g-mol/cm ² -seg.
K_f	: Coeficiente de transferencia de masa sin inclusión, de migración iónica, cm/seg.
K_f^e	: Coeficiente efectivo de transferencia de masa, cm/seg.
$K_0(X)$: Coeficiente a $y=0$ del desarrollo en serie de la velocidad, cm/seg.
L_0	: Longitud característica, cm.

R	: Factor electrostático del ion entrante en la fase líquida, adimensional.	λ_J	: Fracción iónica equivalente del ion entrante a la resina. adimensional.
R_i	: Factor electrostático, adimensional.	ν	: Viscosidad cinemática de la solución acuosa, μ/ρ , cm^2/seg .
R_1	: Factor electrostático por el ion entrante, adimensional.	μ	: Viscosidad absoluta, $\text{gr}/\text{cm}\text{-seg}$.
R_2	: Factor electrostático por el ion saliente, adimensional.	ρ	: Densidad de la solución, gr/cm^3 .
Sc	: Número de Schmidt, adimensional.	ϕ_J	: Campo electrostático, volt.
U_X	: Componente de la velocidad en la dirección X, cm/seg .		
U	: Velocidad de la solución a la entrada, cm/seg .		
U_Y	: Componente de la velocidad en la dirección Y, cm/seg .		
V_{XJ}	: Componente de la velocidad en la dirección X, adimensional.		
V_{YJ}	: Componente de la velocidad en la dirección Y, adimensional.		
X	: Dirección horizontal, cm.		
X_i^0	: Fracción equivalente en el seno de la solución, adimensional.		
X_i^*	: Fracción iónica equivalente a la interfase, adimensional.		
Y	: Dirección normal, cm.		
W(Y)	: Factor pesante, adimensional.		
Z_i	: Valencia de cada especie iónica, adimensional.		
β	: Coeficiente del espesor de capa límite de velocidad, adimensional.		
δ	: Espesor de capa límite de velocidad, cm.		

LITERATURA CITADA

- 1) GARCIA C. and DAVID M. : "Effects of Self-Induced electric field on the calculations of Moving-Bed Ion-Exchange Units", Revista Técnica, Facultad de Ingeniería, LUZ, Maracaibo, Volumen 3, No. 2, Pág. 125-153, Diciembre 1980.
- 2) GARCIA C. : "Evaluación del Campo Eléctrico Autoinducido en Sistema Multicomponentes de intercambio iónico", Revista Técnica, Facultad de Ingeniería, LUZ, Maracaibo, Vol. 6, Edición Especial, Pág. 32-41, 1983.
- 3) CHAPMAN T.W. and M.E. TUNISON : Ind. Eng. Chem. Fund., 15, 196 (1976).
- 4) VAN BROCKLIN L.P. and M. DAVID : Ind. Eng. Chem. Fund., 11, 91 (1972).
- 5) FINLAYSON, A. BRUCE : "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", Academic Press, New York (1972).
- 6) FINLAYSON, A. BRUCE : "Non-linear analysis in Chemical Engineering", Mc Graw-Hill Book Co. (1980).
- 7) LARREAL A. : "Factor R_i para la fase líquido controlante en sistemas de intercambio iónico basado en el Modelo de Capa Límite", Tesis de Magister en Ingeniería Química, LUZ, Maracaibo, Septiembre (1984).

Recibido el 18 de Septiembre de 1984

pu (91)