

RESOLUCION DE LA ECUACION INTEGRAL DE FREDHOLM DE SEGUNDA CLASE MEDIANTE COMPUTADOR

Salvador Conde P.
División de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

RESUMEN

En el presente trabajo se da un programa de computación para la resolución numérica de la ecuación integral de Fredholm de segunda clase. Se resuelven algunos ejemplos de fácil verificación con su solución analítica.

ABSTRACT

In the present paper, a program for the numerical solution of the Fredholm's integral equation of second kind is given. Some simple examples, which can be easily verified by the analytic solution, are resolved.

1. INTRODUCCION

Muchos problemas matemáticos, particularmente en matemáticas aplicadas, física e ingeniería, pueden ser formulados de dos maneras distintas aunque estrechamente relacionadas: como ecuaciones diferenciales o como ecuaciones integrales. En el caso de las ecuaciones integrales las condiciones de contorno ya vienen incluidas y por lo tanto no necesitan ser especificadas; entonces, su uso ofrece ventajas indudables sobre las ecuaciones diferenciales.

La ecuación integral [3,4]

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \psi(s) ds = f(x) \quad (1.1)$$

es conocida como ecuación integral de Fredholm de segunda clase. $\psi(x)$ es la función incógnita, $f(x)$ es el llamado término libre y $K(x,s)$ es el núcleo. Los límites de integración a y b son finitos y el valor λ se denomina parámetro de la ecuación.

Sobre el núcleo se impone la restricción de

ser continuo en el cuadrado $\Omega\{a < x < b, a < s < b\}$ o por lo menos, que sus discontinuidades sean de tal naturaleza que la integral doble

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds \quad \text{sea finita} \quad (1.2)$$

La ecuación integral (1.1) incluye las ecuaciones integrales de Volterra como casos especiales. Basta hacer el núcleo $K(x,s) = 0$ para $s > x$, lo que provoca que el límite superior de integración sea x en lugar de b .

En muchos problemas encontramos diferentes tipos de ecuaciones integrales, tales como las de Volterra o Fredholm de primera o segunda clase. Otras veces, encontramos ecuaciones integrales duales, o incluso triples, si se asignan diferentes condiciones a regiones diferentes de un mismo contorno. (Ver, por ejemplo, [1,2,5]). En general, para darles una solución analítica adecuada, tales problemas se reducen a resolver una ecuación integral de tipo Fredholm de segunda clase [6].

En la presente nota se presenta un programa de computación para obtener soluciones numéricas de tales ecuaciones y se ilustran ejemplos de fácil verificación con su solución analítica.

2. METODO DE RESOLUCION USANDO LOS DETERMINANTES DE FREDHOLM

La solución general de la (1.1) está dada por la fórmula [3]

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s) ds \quad (2.1)$$

donde

$$R(x,s;\lambda) = \frac{D(x,s;\lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.2)$$

es denominada resolvente de Fredholm.

$D(\lambda)$ se conoce como determinante de Fredholm y debe ser diferente de cero para que exista solución única de la (1.1). Los valores de λ que anulan $D(\lambda)$ se denominan valores propios del núcleo $K(x,s)$ y los valores $\psi(x)$ correspondientes que verifican la (1.1) se llaman a su vez funciones propias o características.

$D(\lambda)$ se determina por la relación

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n \quad (2.3)$$

$$\text{con } C_0 = 1 \quad (2.4)$$

y

$$C_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) & \dots & K(s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_n, s_1) & K(s_n, s_2) & \dots & K(s_n, s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n$$

La función $D(x,s;\lambda)$ se llama menor de Fredholm y se determina por la fórmula

$$D(x,s;\lambda) = K(x,s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,s) \lambda^n \quad (2.6)$$

$$\text{con } B_0(x,s) = K(x,s) \quad (2.7)$$

y

$$B_n(x,s) =$$

$$\int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,s_1) & \dots & K(x,s_n) \\ K(s_1,s) & K(s_1,s_1) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s) & K(s_2,s_1) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_n,s) & K(s_n,s_1) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n \quad (2.8)$$

Adicionalmente, los coeficientes C_n y $B_n(x,s)$ verifican las fórmulas de recurrencia siguientes:

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s) ds \quad (2.9)$$

y

$$B_n(x,s) = C_n K(x,s) - n \int_a^b K(x,t) B_{n-1}(t,s) dt \quad (2.10)$$

3. SOLUCION DEL PROBLEMA MEDIANTE COMPUTADOR

Las fórmulas (2.5) y (2.8) no son especialmente adecuadas para la resolución de la Ecuación integral de Fredholm usando computador.

En su lugar, es preferible partir de las (2.4) y (2.7) y usando las relaciones de recurrencia (2.9) y (2.10) en forma alternada, calcular tantos C_n y $B_n(x,s)$ como sean necesarios. A continuación por aplicación de los (2.3), (2.6) y (2.2) se determina la resolvente y usando la (2.1) se llega a la solución deseada.

En nuestro caso, se aplicó el método de integración numérica de Simpson para resolver las integrales que figuran en la (2.9), (2.10) y (2.1), para un número variable de puntos que se lee como dato. Igualmente se le suministran al computador los valores de λ , a , b , y el número máximo de sumandos que se debe usar en la (2.3) y (2.6) si antes no se anula algún valor de C_n que detenga el proceso.

De la misma forma modificando en el programa dos instrucciones que permiten calcular el núcleo $K(x,s)$ y el término libre $f(x)$, se puede determinar cualquier ecuación integral de Fredholm de segunda clase, de manera que el método es bastante general.

4. EJEMPLOS RESUELTOS

Como ilustración se resolvieron con este programa las Ecuaciones Integrales siguientes, todas con resultados satisfactorios:

$$a) \psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos^2(\frac{x+s}{2})} \psi(s) ds = 25 \cos^2 x + 9 \sin^2 x$$

$$\text{con } \epsilon = 0.8 \quad \text{y} \quad \lambda = -\frac{3\pi}{100}$$

$$b) \psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s \psi(s) ds = \cos 2x$$

$$\text{para } \lambda = 1$$

$$c) \psi(x) - \lambda \int_0^1 (4xs - x^2) \psi(s) ds = x$$

para $\lambda = 10$ y $\lambda = 100$

$$d) \psi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-s} \psi(s) ds = e^x$$

Este ejemplo merece un comentario especial :

$$\text{Su resolvente es } R(x,s;\lambda) = \frac{e^{x-s}}{1-\lambda}$$

$$\text{y su solución es } \psi(x) = \frac{e^x}{1-\lambda}$$

de manera que, obviamente, $\lambda = 1$ es un valor propio.

Se resolvió esta ecuación para $\lambda = 3$ sin ningún problema y los resultados obtenidos concuerdan con la solución analítica,

Para $\lambda = 1$ los resultados numéricos son del orden de 10^{16} a 10^{17} , lo que muestra obviamente, la presencia de una irregularidad.

Para valores cercanos al valor propio, $\lambda = 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001$, los resultados son igualmente correctos pero se observa perfectamente la cercanía del punto singular.

REFERENCIAS

- 1) KALLA, S.L. : "Dual integral equations". Math. Japon. 12 (1968), 133-140.
- 2) KALLA, S.L. : "Solution of a pair of dual integral equation". Proc. Nat. Acad. Sci. 38A(1968), 209-212.
- 3) KANWAL, R.P. : "Linear Integral Equations". Academic Press, New York, (1971).
- 4) MOISEWITSCH, B.L. : "Integral Equations". Longman, London, (1977).
- 5) TRANTER, C.J. : "Integral Transforms in Mathematical Physics". Chapman and Hall Ltd. (1971).
- 6) TRANTER, C.J. : "The reduction of boundary value problems to Fredholm integral equation of the second kind". Jour. Appl. Math. and Phy. 13(1962), 133-152.

Recibido el 16 de Julio de 1985

Apéndice A: Programas.

```

C   CALCULO GENERAL DE LA ECUACION INTEGRAL DE FREDHOLM
IMPLICIT REAL*8 (A-H,G-Z)
REAL*8 INTEG,T(21),LB,D1(21,21),F1(21),PV(21,21),RN(21,21),K,Z(10)
*,W(10)
C   INTERCALAR A CONTINUACION EL NUCLEO K(X,S) DE LA ECUACION INTEGRAL
K(X,S)=DEXP(X-S)
C   INTERCALAR A CONTINUACION EL TERMINO LIBRE DE LA ECUACION INTEGRAL
F(X)=DEXP(X)
PI=4D0*DATAN(1D0)
EP2=.64D0
C   LECTURA DE LAMPA A B M A N
M = NUMERO DE SUMANDOS EN LAS SUMATORIAS (LIMITE DE CM Y RM(X,S) )
C   N = NUMERO DE ESPACIOS PARA DIVIDIR INTERVALO (A,B)
1 READ (5,20,END=100) LB,A,B,M,N
20 FORMAT (F15.8,2F7.4,2I2)
C   LECTURA DE DOS TARJETAS CON NUCLEO Y TERMINO LIBRE PARA IMPRESION
READ (5,22) Z,W
22 FORMAT (10A8)
C   ESCRITURA DE ENCABEZAMIENTOS
WRITE (6,23)
23 FORMAT (1H1,26X'CALCULO DE LA ECUACION INTEGRAL DE FREDHOLM'/)
WRITE (6,24) Z
WRITE (6,24) W
24 FORMAT (1H ,8X10A8/)
25 WRITE (6,25) A,B,LB
FORMAT (1H ,14X'A',4X'B',4X'LB',4X'LAMBDA=
*,F13.8//)
WRITE (6,26)
26 FORMAT (1H ,26X'I',4X'X',14X'F',17X'FT'/)
C   CALCULOS PRELIMINARES
H=(B-A)/N
D=1D0
N1=N+1
C   CALCULO DE VALORES INICIALES DE BV Y D1
X=A
DO 2 I=1,N1
S=A
DO 3 J=1,N1
BV(I,J)=K(X,S)
D1(I,J)=BV(I,J)
S=S+H
X=X+H
C   DETERMINACION DE LA RESOLVENTE
IK=1
DO 4 NK=1,M
C   PREPARACION INTEGRANDO DE C
DO 5 I=1,N1
T(I)=BV(I,I)
C   CALCULO DE C
C=INTEG(T,A,B,N)
C   CALCULO DE D
IKE=-IK
FAC=IK*LB**NK/DGAMMA(DFLOAT(NK+1))
D=D+FAC*C
C   CALCULO DE BN Y D1
IND=0
X=A
DO 6 I=1,N1
S=A
DO 7 J=1,N1
U=A
DO 8 L=1,N1
T(L)=K(X,U)*BV(L,J)
8 U=U+H
RN(I,J)=C*K(X,S)-NK*INTEG(T,A,B,N)
IF (ABS(PN(I,J)).GE.1D-10) IND=1
D1(I,J)=D1(I,J)+FAC*BN(I,J)
7 S=S+H
6 X=X+H
IF (IND.EQ.0) GO TO 30
DO 9 I=1,N1
DO 9 J=1,N1
9 BV(I,J)=BN(I,J)
4 CONTINUE
C   CALCULO DE VALORES DE FT
30 X=A
DO 10 I=1,N1
S=A

```

```

DO 11 J=1,N1
T(J)=D1(I,J)*F(S)/D
11 S=S+H
FX=F(X)
F1(I)=FX+LB*INTEG(T,A,B,N)
WRITE (6,21) I,Y,FX,F1(I)
21 FORMAT (1H ,25X)2,3XF5,2,6XG16,10,2YG16,10)
10 X=X+H
GO TO 1
100 STOP
END

```

```

FUNCTION INTEG(T,A,B,N)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 INTEG,T(P1)
H=(B-A)/N
NI=N/2
NP=NI-1
F1=T(1)+T(N+1)
F2=0D0
F3=0D0
H2=H+H
DO 1 I=1,NI
1 F2=F2+T(2*I)
DO 2 I=1,NP
2 F3=F3+T(2*I+1)
INTEG=H*(F1+4D0*F2+2D0*F3)/3D0
RETURN
END

```

Apéndice B: Ejemplos.

CALCULO DE LA ECUACION INTEGRAL DE FREDHOLM

a) NUCLEO $K(X,S) = 1/(1-EP S**2 * COS((X+S)/2)**2)$

TERMINO LIBRE $F(X) = 25 * COS(X)**2 + 9 * SEN(X)**2$

PARA VALORES DE A= 0,0 B= 6,2832 LAMBDA= -0,09549297

I	X	F	FI
1	0,0	25,00000000	16,04101402
2	0,5	21,00000000	12,25874374
3	1,0	13,00000000	4,731912174
4	1,5	9,000000000	0,790539347
5	2,0	13,00000000	4,731912174
6	2,5	21,00000000	12,25874374
7	3,0	25,00000000	16,04101402
8	3,5	21,00000000	12,25874374
9	4,0	13,00000000	4,731912174
10	4,5	9,000000000	0,790539347
11	5,0	13,00000000	4,731912174
12	5,5	21,00000000	12,25874374
13	6,0	25,00000000	16,04101402

b) NUCLEO $K(X,S) = SEN(X) * COS(S)$

TERMINO LIBRE $F(X) = COS(2X)$

PARA VALORES DE A= 0,0 B= 6,2832 LAMBDA= 1,00000000

I	X	F	FI
1	0,0	1,000000000	1,000000000
2	0,5	0,000000000	0,000000000
3	1,0	0,000000000	0,000000000
4	1,5	0,000000000	0,000000000
5	2,0	0,000000000	0,000000000
6	2,5	0,000000000	0,000000000
7	3,0	0,000000000	0,000000000
8	3,5	0,000000000	0,000000000
9	4,0	0,000000000	0,000000000
10	4,5	0,000000000	0,000000000
11	5,0	0,000000000	0,000000000
12	5,5	0,000000000	0,000000000
13	6,0	0,000000000	0,000000000

c) NUCLEO $K(X,S) = 4 * X * S - X**2$

TERMINO LIBRE $F(X) = X$

PARA VALORES DE A= 0,0 B= 1,0000 LAMBDA= 10,00000000

I	X	F	FI
1	0,0	0	0
2	0,10	0,1000000000	0,1112903226
3	0,20	0,2000000000	0,14483871
4	0,30	0,3000000000	0,207741935
5	0,40	0,4000000000	0,2967419
6	0,50	0,5000000000	0,40323
7	0,60	0,6000000000	0,5280645
8	0,70	0,7000000000	0,6693548387
9	0,80	0,8000000000	0,8219354840=01
10	0,90	0,9000000000	0,988387100=01
11	1,00	1,0000000000	1,165483871

CALCULO DE LA ECUACION INTEGRAL DE FREDHOLM

d)

NUCLEO $K(X,S)=EXP(X-S)$

TERMINO LIBRE $F(X)=EXP(X)$

PARA VALORES DE $A=0,0$ $B=1,0000$ $LAMBDA=3,00000000$

I	X	F	FI
1	0.0	1.000000000	-.500000000
2	0.10	1.105170918	-.552585459
3	0.20	1.221402758	-.610701379
4	0.30	1.349858808	-.674929403
5	0.40	1.491824698	-.745912348
6	0.50	1.648721271	-.824366354
7	0.60	1.822118800	-.911859400
8	0.70	2.01352707	-1.009776354
9	0.80	2.2252707	-1.119801556
10	0.90	2.45883111	-1.242801556
11	1.00	2.718281828	-1.380180155

PARA VALORES DE $A=0,0$ $B=1,0000$ $LAMBDA=1,00000000$

I	X	F	FI
1	0.0	1.000000000	.65506903670+16
2	0.10	1.105170918	.72396324870+16
3	0.20	1.221402758	.80010317820+16
4	0.30	1.349858808	.88425070680+16
5	0.40	1.491824698	.97492816780+16
6	0.50	1.648721271	1.0800262550+17
7	0.60	1.822118800	1.1988132070+17
8	0.70	2.01352707	1.3319820490+17
9	0.80	2.2252707	1.4801822540+17
10	0.90	2.45883111	1.6442622540+17
11	1.00	2.718281828	1.826222540+17

PARA VALORES DE $A=0,0$ $B=1,0000$ $LAMBDA=1,10000000$

I	X	F	FI
1	0.0	1.000000000	-10.000000000
2	0.10	1.105170918	-11.05170918
3	0.20	1.221402758	-12.21402758
4	0.30	1.349858808	-13.49858808
5	0.40	1.491824698	-14.91824698
6	0.50	1.648721271	-16.48721271
7	0.60	1.822118800	-18.22118800
8	0.70	2.01352707	-20.1352707
9	0.80	2.2252707	-22.2252707
10	0.90	2.45883111	-24.45883111
11	1.00	2.718281828	-27.18281828

PARA VALORES DE A= 0,0 B= 1,0000 LAMBDA= 1,01000000

I	X	F	FI
1	0,0	1,0000000000	-100,00000000
2	0,100	1,105170918	-110,5170918
3	0,200	1,221402758	-122,1402758
4	0,300	1,349858808	-134,9858808
5	0,400	1,491824698	-149,1824698
6	0,500	1,648721271	-164,8721271
7	0,600	1,822118800	-182,2118800
8	0,700	2,013752707	-201,3752707
9	0,800	2,225540928	-222,5540928
10	0,900	2,459603111	-245,9603111
11	1,000	2,718281828	-271,8281828

PARA VALORES DE A= 0,0 B= 1,0000 LAMBDA= 1,00100000

I	X	F	FI
1	0,0	1,0000000000	-1000,00000000
2	0,100	1,105170918	-1105,170918
3	0,200	1,221402758	-1221,402758
4	0,300	1,349858808	-1349,858808
5	0,400	1,491824698	-1491,824698
6	0,500	1,648721271	-1648,721271
7	0,600	1,822118800	-1822,118800
8	0,700	2,013752707	-2013,752707
9	0,800	2,225540928	-2225,5540928
10	0,900	2,459603111	-2459,603111
11	1,000	2,718281828	-2718,281828

PARA VALORES DE A= 0,0 B= 1,0000 LAMBDA= 1,00010000

I	X	F	FI
1	0,0	1,0000000000	-10000,000000
2	0,100	1,105170918	-11055,170918
3	0,200	1,221402758	-12214,02758
4	0,300	1,349858808	-13498,58808
5	0,400	1,491824698	-14918,24698
6	0,500	1,648721271	-16487,21271
7	0,600	1,822118800	-18221,18800
8	0,700	2,013752707	-20137,52707
9	0,800	2,225540928	-22255,5540928
10	0,900	2,459603111	-24596,03111
11	1,000	2,718281828	-27182,81828