Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 10, No.1, Edición Especial, 1987

SOBRE LA FUNCION DE EXTON (DI-BESSEL)

J. Sarabia
Instituto Universitario Politécnico
Apartado 352
Barquisimeto 3001
Estado Lara, Venezuela

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia la función de Di-Bessel o Exton :

$$A_\nu = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{(-1)^r}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2 (r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r}$$

. Se establecen propiedades de recurrencia y se da una representación integral de esta función. Así mismo se demuestra que $A_\nu(x)$ tiene infinito número de ceros reales simples en $[d,\infty)$ $(d>o)$. Finalmente se calculan algunas integrales conteniendo $A_\nu(x)$.

ABSTRACT

In the present paper the Di-Bessel function $A_\nu(x)$ is studied. Some recurrence properties are established and the integral representation of this function is given. Further, we prove that $A_\nu(x)$ has infinite number of simple real zeros in $[d,\infty)$; $d<o$. Finally some integrals involving $A_\nu(x)$ are evaluated.

1. INTRODUCCION

Exton en [2, p. 856] define la función :

$$A_\nu(x) = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{(-1)^r}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2 \, (r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r} \tag{1.1}$$

La cual denominaremos función de Di-Bessel o de Exton. Utilizando la función hipergeométrica generalizada (1.1) se puede escribir así :

$$A_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{[\Gamma(\nu+1)]^2} \cdot {}_0F_3\left(-;\nu+1,\nu+1,1;-\frac{x^2}{4}\right) \tag{1.2}$$

Absolutamente convergente y analítica en

$$C - \{(x,o) : x \leq o\}$$

2. FUNCION GENERADORA DE A_ν (z), $(\nu\epsilon z)$

En [2, p.856] se halla el desarrollo de Laurent en $o < |t| < \infty$, de $\omega(x,t) = I_o\left[(2xt)^{1/2}\right] J_o\left[(2xt^{-1})^{1/2}\right]$ (2.1), donde J_o es la función de Bessel de orden cero e I_o la de Bessel modificada.

Siendo este desarrollo :

$$\omega(x,t) = \sum_{n\in Z} A_n(x)\, t^n \tag{2.2}$$

Donde $A_n(x)$ es la función de Exton de orden n.

Como $A_{-n}(x) = (-1)^n A_n(x)$, para $n \in N$ podemos escribir :

$$\omega(x,t) = A_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\left[t^n + (-1)^n t^{-n}\right] \tag{2.3}$$

En (2.1) haciendo : $\psi(u) = I_o\left[(2u)^{1/2}\right]$ con $u = xt$ y $\phi(v) = J_o\left[(2v)^{1/2}\right]$ con $v = xt^{-1}$,

$$x\omega_x + t\,\omega_t = 2u\,\psi'(u)\,\phi(v) \tag{2.4}$$

Luego :

$$x\omega_x + t\omega_t = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{u^{r+1}}{2^r (r+1)!\ r!} \sum_{j=o}^{\infty} \frac{(-1)^j\ v^j}{2^j\ (j!)^2}$$

$$x\omega_x + t\omega_t =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=o}^{\infty} \frac{(-1)^j\ x^{n+2j}}{2^{n+2j-1} (n+j)!\ (n+j-1)!(j!)^2} \right] t^n \qquad (2.5)$$

De acuerdo a (2.2) tenemos :

$$x\omega_x + t\omega_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x\ A_n'(x) + n\ A_n(x)]\ t^n \qquad (2.6)$$

De (2.5) y (2.6) resulta :

$$x\ A_n'(x) + n\ A_n(x) = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{(-1)^j\ x^{n+2j}}{2^{n+2j-1} (n+j)!(n+j-1)!(j!)^2}$$

O sea : $(n \in N)$

$$x\ A_n'(x) + n\ A_n(x) = \frac{2}{n!(n-1)!} (\frac{x}{2})^n\ .$$

$$\cdot\ {}_oF_3(\text{—};n+1,n,1;-\frac{x^2}{4}) \qquad (2.7)$$

De manera similar tenemos :

$$x\ A_n'(x) - n\ A_n(x) = -\frac{2}{[(n+1)!]^2} (\frac{x}{2})^{n+2}\ .$$

$$\cdot\ {}_oF_3(\text{—};n+2,n+2;-\frac{x^2}{4}) \qquad (2.8)$$

En particular para $n = o$

$$A_o'(x) = -\frac{x}{2} \cdot {}_oF_3(\text{—};2,2,2;-\frac{x^2}{4}) \qquad (2.9)$$

3. UNA FORMULA PARA $A'_\nu(x)$

De (1.1) tenemos :

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx}(x^\nu A_\nu)\right] =$$

$$2\ x^\nu \sum_{r=o}^{\infty} \frac{(-1)^r}{[\Gamma(\nu+r)]^2\ (r!)^2} (\frac{x}{2})^{\nu-1+2r}$$

Luego :

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx}(x^\nu A_\nu)\right] = 2\ x^\nu\ A_{\nu-1} \qquad (3.1)$$

Desarrollando el primer miembro, obtenemos al simplificar :

$$\nu^2\ A_\nu + (2\nu+1)\ x\ A_\nu' + x^2\ A_\nu'' = 2\ x\ A_{\nu-1} \qquad (3.2)$$

Similarmente resulta :

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx}(x^{-\nu} A_\nu)\right] =$$

$$\sum_{r=o}^{\infty} \frac{2(-1)^{r+1}\ x^{2r+1}}{[\Gamma(\nu+r+2)]^2\ (r!)^2\ 2^{\nu+2r+1}} = -2x^{-\nu} A_{\nu+1} \qquad (3.3)$$

Desarrollando el primer miembro y simplificando, tenemos

$$\nu^2 A_\nu + (-2\nu+1)\, x A'_\nu + x^2 A''_\nu = -2x A_{\nu+1} \qquad (3.4)$$

De (3.4) y (3.2) se obtiene :

$$2\nu A'_\nu = A_{\nu-1} + A_{\nu+1} \qquad (x \neq o) \qquad (3.5)$$

Derivando (3.5), y volviendo a usar éste, obtenemos :

$$8\nu(\nu-1)(\nu+1)\, A''_\nu = 2(\nu-1)\, A_{\nu+2} + 4\nu A_\nu + 2(\nu-1)\, A_{\nu-2} \qquad (3.6)$$

Reemplazando (3.6) y (3.5) en (3.3), resulta finalmente :

$$(\nu-1)x^2 A_{\nu+2} + 2(\nu-1)(\nu+1)(2\nu+1)x A_{\nu+1}$$

$$+\ 2\nu\left[2\nu^2(\nu-1)(\nu+1)+x^2\right] . A_\nu$$

$$+\ 2(\nu-1)(\nu+1)(1-2\nu)x\, A_{\nu-1} + (\nu+1)\, x^2\, A_{\nu-2} = 0 \qquad (3.7)$$

4. UNA REPRESENTACION INTEGRAL DE A_ν

En [2, p.857] se obtiene una representación integral para $n \in Z$, a partir del desarrollo (2.2). Siendo ésta :

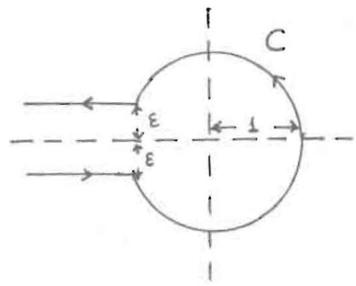
$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma t^{-n-1}\, \omega(x,t)\, dt \qquad (4.1)$$

Donde Γ es un contorno simple cerrado conteniendo en su interior al origen.

En este trabajo encontramos una representación integral para $\nu > -1$.

De acuerdo a 5.10.5 en [5, p. 115] :

$$\frac{1}{\Gamma(r+\nu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C e^s\, s^{-(r+\nu+1)}\, ds \qquad (4.2)$$



Donde C es el contorno señalado en la figura.

De (4.2) en (1.1), tenemos :

$$A_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2\pi i\, \Gamma(\nu+1) 2^\nu} \int_C e^s\, s^{-(\nu+1)} \times$$

$$\left[\sum_{r=o}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)_r (r!)^2} \left(-\frac{x^2}{4s}\right)^r\right] . ds$$

$$(\nu > -1)$$

Donde el intercambio de la integración y la suma de la serie está justificado con criterios de convergencia absoluta.

Luego :

$$A_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2\pi i\, \Gamma(\nu+1) 2^\nu} \int_C e^s\, s^{-(\nu+1)} .$$

$${}_0F_2\left(\text{—}; \nu+1, 1; -\frac{x^2}{4s}\right) ds$$

Haciendo $\varepsilon \to o^+$ y $s = \frac{xt}{2}$, resulta :

$$A_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i\, \Gamma(\nu+1)} \int_{C_1} e^{\frac{xt}{2}}\, t^{-(\nu+1)}$$

$$ {}_0F_2(—;\nu+1,1;-\frac{x}{2t})\,dt $$

Donde C_{1+} es el contorno obtenido de C al hacer $\varepsilon \longrightarrow o^+$

Haciendo $t = \rho e^{i\theta}$ (en la parte circular de C_1, $\rho=1$ queda :

$A_\nu(x) = I_1 + I_2 + I_3$, donde :

$$ I_1 = \frac{1}{2\pi\Gamma(\nu+1)} \int_{-\pi}^{\infty} e^{\frac{x}{2}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)} e^{-\nu\theta i} . $$

$$.\ {}_0F_2(—;\nu+1,1;-\frac{xe^{-i\theta}}{2})\,d\theta $$

$$ I_2 = -\frac{1}{2\pi i\,\Gamma(\nu+1)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x\rho}{2}} \rho^{-(\nu+1)} e^{-(\nu+1)\pi i} $$

$$.\ {}_0F_2(—;\nu+1,1;\frac{x}{2\rho})\,d\rho $$

$$ I_3 = \frac{1}{2\pi i\,\Gamma(\nu+1)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x\rho}{2}} \rho^{-(\nu+1)} e^{(\nu+1)\pi i} $$

$$.\ {}_0F_2(—;\nu+1,1;\frac{x}{2\rho})\,d\rho \qquad (4.3) $$

Luego :

$$ A_\nu(x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(\nu+1)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{x}{2}\cos\theta} . $$

$$ [\cos(\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\theta - \nu\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\theta - \nu\theta)] . \times $$

$$.\ {}_0F_2(—;\nu+1,1;-\frac{xe^{-i\theta}}{2})\,d\theta $$

$$ -\frac{\mathrm{sen}(\nu\pi)}{\pi\,\Gamma(\nu+1)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x\rho}{2}} \rho^{-(\nu+1)} . {}_0F_2(—;\nu+1,1;\frac{x}{2\rho})\,d\rho \qquad (4.4) $$

Llamando :

$u(\nu,x;\theta) = R_e\,[{}_0F_2(—;\nu+1,1;-\frac{xe^{-i\theta}}{2})]$ y

$v(\nu,x;\theta) = I_m\,[{}_0F_2(—;\nu+1,1;-\frac{xe^{-i\theta}}{2})]$, tenemos :

$$ u(\nu,x;\theta) = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\cos(r\theta)}{(\nu+1)_r\,(r!)^2} (-\frac{x}{2})^r \quad \text{y} $$

$$ v(\nu,x;\theta) = -\sum_{r=o}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(r\theta)}{(\nu+1)_r\,(r!)^2} (-\frac{x}{2})^r $$

$$ v(\nu,x;\theta) = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(r\theta)}{(\nu+1)_r\,(r!)^2} (-\frac{x}{2})^r $$

De (4.4) resulta :

$$ A_\nu(x) = \frac{1}{2\pi\Gamma(\nu+1)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{x}{2}\cos\theta} \times $$

$$ [u\cos(\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\theta - \nu\theta) - v\,\mathrm{sen}\,(\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\theta - \nu\theta)]\,d\theta $$

$$ -\frac{\mathrm{sen}(\nu\pi)}{\pi\Gamma(\nu+1)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x\rho}{2}} \rho^{-(\nu+1)} \times $$

$$.\ {}_0F_2(—;\nu+1,1;\frac{x}{2\rho})\,d\rho \qquad (4.5) $$

Cuando $\nu = n \in N$, tenemos :

$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{x}{2}\cos\theta} \times$$

$$\left[u \cos(\tfrac{x}{2} \operatorname{sen}\theta - n\theta) - v \operatorname{sen}(\tfrac{x}{2} \operatorname{sen}\theta - n\theta)\right] d\theta \qquad (4.6)$$

5. OSCILACION DE $A_\nu(x)$ EN $[o,\infty)$

Exton en [2,p.860] conjetura la existencia de una sucesión de ceros reales simples en $[o,\infty)$ con la excepción de origen, para $A_\nu(x)$. En este trabajo demostraremos que dicha conjetura es cierta para $\nu \in R$, para ello utilizaremos criterios de oscilación y las relaciones (3.1) y (3.3).

Sabemos que ${}_0F_3$ $(-;\nu+1,\nu+1,1;x)$ satisface la ecuación diferencial :

$$(x^{\nu+3}\, y'')'' + (\nu+1)(x^{\nu+1}\, y')' - x^{\nu} y = o \qquad (5.1)$$

Haciendo el cambio : $x = e^{-t}$, (5.1) se transforma en :

$$(e^{-\nu t}\, y'')'' + e^{(1-\nu)t}\, y = o \qquad (5.2)$$

Lema 1

Sea $a(t) \in C^2(R)$ y $c(t) \in C(R)$, con $a(t)>o$ y $c(t) > o$ en R, entonces las soluciones no triviales de :

$$[a(t)\, y'']'' + c(t) y = o \qquad (5.3)$$

toman a lo más un cero doble en R.

Demostración :

Sea $y(t)$ una solución no trivial de (5.3), definiendo $\phi(t) = a(t)\, y'(t)\, y''(t) - y(t)\, [a(t)\, y''(t)]'$, tenemos que : $\phi'(t) = a(t)\, [y''(t)]^2 + c(t)\, [y(t)]^2$, si existe un intervalo $[\alpha,\beta]$ donde $y''(t) \equiv o$, entonces $y(t) \equiv o$ en R, por unicidad. Luego : $\phi(t_2)-\phi(t_1) =$

$$\int_{t_2}^{t_1} \{a(t)\, [y''(t)]^2 + c(t)\, [y(t)]^2\}\, dt > o \quad \text{para}$$

$t_1 < t_2$, o sea $\phi(t)$ es estrictamente creciente en R, luego : $\phi'(t) > o$, para todo $t \in R$. Pero si $y(t)$ tiene por lo menos dos ceros dobles s_1 y s_2, entonces $\phi'(\tau) = o$ para algún $\tau \in (s_1,s_2)$. Luego $y(t)$ tiene a lo más un cero doble en R.

Definición

Una solución de (5.3) es oscilatoria en $[o,\infty)$ si tiene un número infinito de ceros en dicho intervalo.

Si todas las soluciones de (5.3) son oscilatorias, diremos que la ecuación diferencial es oscilatoria.

Los lemas 2, 3 y 4 se encuentran demostrados en [6].

Lema 2

Las soluciones de (5.3) son todas oscilatorias o todas no oscilatorias en (o,∞).

Lema 3

Sean $a(t)$ y $A(t)$ funciones en $C^2(R)$, $c(t)$ y $C(t)$ en $C(R)$, tales que : $o < c(t) \le C(t)$ y $o < A(t) \le a(t)$

Si (5.3) es oscilatoria lo serán :

$$[a(t)\, u'']'' + C(t)\, u = o \qquad (5.4)$$

$$[A(t) u'']'' + c(t) u = o \qquad (5.5)$$

Lema 4

Si existe $\rho \in R$ tal que : $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-2-\rho} a(t) < 1$ y

$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{2-\rho} c(t) > \frac{\rho^2}{4}$, entonces (5.3) es oscilatoria.

En particular si $\underline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^4 c(t) > 1$, entonces : $y^{(4)} + c(t) y = o$ es oscilatoria. (5.6)

Lema 5

Sea $\nu \in (-\infty,1]$, entonces : $y^{(4)}(t) + e^{(1-\nu)t}\ y(t) = o$ (5.7) es oscilatoria

Demostración

Como $\lim_{t \to +\infty} t^4 e^{(1-\nu)t} = +\infty$, por el lema 4, tenemos que (5.7) es oscilatoria.

Lema 6

Para $\nu \in [o.1]$, (5.2) es oscilatoria

Demostración :

Tomando $a(t) = 1$, $A(t) = e^{-\nu t}$, $c(t) = e^{(1-\nu)t}$ y $C(t) = e^t$, por el lema 3 tenemos que (5.2) es oscilatoria.

Teorema 1

$A_\nu(x)$ tiene infinitos ceros reales simples en $[c,\infty)$, para un cierto $c > o$ y $\nu \in [o,1]$

Demostración :

Por el lema 6 y lema 2, $\phi(t) = {}_oF_3(—;\nu+1,\nu+1,1;-e^t)$ es oscilatoria en $[o,\infty)$. Por el lema 1, existe $d > o$ tal que en $[d,\infty)$, $\phi(t)$ tiene infinitos ceros reales simples, siendo el conjunto $\{t_n\}$ de estos ceros, no acotado superiormente, por ser $\phi(t)$ solución no trivial.

Por (1.2), tenemos :

$$\phi(t) = {}_oF_3(—;\nu+1,\nu+1,1;-e^t) =$$

$$[\Gamma(\nu+1)]^2\ e^{-\frac{\nu}{2}t}\ A_\nu(2e^{\frac{t}{2}}) \qquad (5.8)$$

Es claro que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de ceros simples reales de $A_\nu(x)$, en $[c,\infty)$, donde $x_n = 2\,e^{t_n/2}$ y $c = 2\,e^{d/2}$

Teorema 2

$A_\nu(x)$ tiene infinitos ceros simples reales para $\nu \in R$, en $[m,\infty)$, siendo $m > o$

Demostración :

Si $\nu \in [o,1$, por el teorema 1, $A_\nu(x)$ tiene infinito número de ceros simples reales en $[c,\infty)$. Por el teorema de Rolle, tenemos que $[x(x^\nu A_\nu)']'$ tiene infinitos ceros reales en $[c,\infty)$. Luego por (3.1), $A_{\nu-1}(x)$ tiene infinitos ceros reales en $[c,\infty)$ y estos ceros son simples en $[c_i,\infty)$, para $c_i \geq c$. Por inducción, el teorema se cumple para $\nu \in [-(n+1),-n]$; $\forall\, n \in N$. Luego el teorema es válido en $(-\infty,1]$.

Similarmente por (3.3), tenemos que el teorema se cumple en $[1,\infty)$. Por lo tanto $A_\nu(x)$ tiene un número infinito de ceros simples reales en $[m,\infty)$, para un cierto $m > o$ y $\nu \in R$.

6. LA FUNCION A_ν (x) DE ORDEN $\nu = \pm 1/2$

Para $\nu = \frac{-1}{2}$, tenemos :

$$A_{-1/2}\left(\frac{x^2}{8}\right) = \frac{4}{\pi x} \cdot {}_oF_3\left(—;\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;-\frac{x^4}{256}\right) \qquad (6.1)$$

De acuerdo a la fórmula 8.564 en [3, p.984],la función de Kelvin ber(x) viene dada por una serie, que expresada por una función hypergeométrica generalizada es :

$$\mathrm{ber}(x) = {}_oF_3\left(—;\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;-\frac{x^4}{256}\right) \qquad (6.2)$$

Luego :

$$A_{-1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\ .\ \mathrm{ber}\,(2\sqrt{2x}),\ \text{para } x > o \qquad (6.3)$$

Por medio de la representación asintótica de la función ber(x), podemos estimar cuantitativamente los ceros de esta función.

Así de acuerdo a la fórmula 8.566.1 en [3,p. 984], para x suficientemente grande, tenemos :

$$\mathrm{ber}(x) \sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad y$$

$$A_{-1/2}(x) \sim \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\pi^{3/2}(2x)^{3/4}} \cos\left(2\sqrt{x} - \frac{\pi}{8}\right) \tag{6.4}$$

Luego los ceros de $A_{-1/2}$ para x suficientemente grande, se encuentran aproximadamente en $x_k = \frac{\pi^2}{16}(2k + \frac{5}{4})^2$. Para $\nu = \frac{1}{2}$, tenemos que $A_{1/2}$ se puede expresar por medio de la función de Kelvin : bei(x).

En efecto : $A_{1/2}\left(\frac{x^2}{8}\right) = \frac{x}{\pi} \cdot {}_0F_3\left(—;\frac{3}{2},\frac{3}{2},1;-\frac{x}{256}\right)$ (6.5)

Y por otra parte bei(x), de acuerdo a la fórmula 8.564.2 en [3,p.984] se puede escribir así :

$$\mathrm{bei}(x) = \frac{x^2}{4} \cdot {}_0F_3\left(—;\frac{3}{2},\frac{3}{2},1;-\frac{x^4}{256}\right)$$

Luego :

$$A_{1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\ \mathrm{bei}(2\sqrt{2x}), \quad x > o \tag{6.6}$$

Finalmente por la fórmula 10.96 en [9, p.166]

$$A_{1/2}(x) \sim \frac{2^{2\sqrt{x}}}{\pi^{3/2}(2x)^{3/4}} \operatorname{sen}\left(2\sqrt{x} - \frac{\pi}{8}\right) \tag{6.7}$$

Entonces para x suficientemente grande, $A_{1/2}(x)$ tiene ceros aproximadamente en

$$x_k = \frac{\pi^2}{4}\left(k + \frac{1}{8}\right)^2 .$$

Estas funciones tienen aplicaciones en la teoría de los efectos de superficie en fenómenos eléctricos de alta frecuencia (Ver [1, p.p. 54-56]).

7. INTEGRALES CONTENIENDO A (x)

En [2, p.p. 858-860] se plantea el desarrollo

$$f(x) = \sum_{r=o}^{\infty} a_r A_\nu(\mu_r x), \text{ para } f(x) \in C^2(R), \text{ lo}$$

cual implica la necesidad de calcular integrales del tipo :

$$\int_o^d x\, f(x)\, A_\nu(bx)\, dx \quad y \quad \int_o^d x\, A_\nu^2\, (bx), \quad \text{para}$$

determinar a_r.

La segunda integral se calculó en [2] aunque con algunos errores, siendo el resultado correcto el siguiente :

$$\int_o^d x\, A_\nu^2\,(\mu_j x)\, dx =$$

$$\frac{-(-\lambda_j)^\nu}{2[\Gamma(\nu+1)]^4} \{(\nu+1)\lambda_j\, c^{\nu+2}\, [y'(\lambda_j c)]^2 +$$

$$\lambda_j^2(\nu+4)\, y'(\lambda_j c)\, y''(\lambda_j c) - \lambda_j^3\, c^{\nu+4}\, [y''(\lambda_j c)]^2 +$$

$$2\lambda_j^3\, c^{\nu+4}\, y'(\lambda_j c)\, y'''(\lambda_j c) \tag{7.1}$$

Donde $\{A_\nu(\mu\,(\mu_j x)\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones ortogonales respecto al producto escalar : $\langle f,g\rangle = \int_o^d u\, f(u) g(u)\, du$; $\{\mu_j\}$ son ceros simples reales positivos de $A_\nu(\mu d) = 0$, con $d > o$, $\nu > o$. Además:

$$c = d^2, \quad \lambda_j = -\frac{\mu_j^2}{4} \quad y$$

$$y^{(r)}(\lambda_j c) = \frac{1}{[(\nu+1)_r]^2 r!} \cdot {}_0F_3(—;\nu+1,\nu+1,r+1;\lambda_j c); \tag{7.2}$$

con r = o, 1,2,3.

Todos los cálculos anteriores se hicieron en base a la fórmula de Green (Ver [4, p.211 y p.237]).

En lo que sigue calcularemos algunas integrales del tipo :

$$\int_0^d x\, f(x)\, A_\nu(bx)\, dx \quad \text{con} \quad d = 1.$$

CALCULO DE $I^{\alpha,\beta}_{\nu,b}$

Denotamos por $I^{\alpha,\beta}_{\nu,b}$ a la integral :

$$I^{\alpha,\beta}_{\nu,b} = \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}\, x^{\beta-1}\, A_\nu(bx)\, dx \qquad (7.3)$$

con $\nu > o$, $Re(\alpha) > o$, $Re(\beta+\nu) > o$, $b > o$

Por convergencia uniforme y ya que

$$\lim_{x \to o^+} \frac{A_\nu(bx)}{x^\nu} = \left(\frac{b}{2}\right)^\nu \frac{1}{[\Gamma(\nu+1)]^2},$$

Tenemos :

$$I^{\alpha,\beta}_{\nu,b} = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{(-1)^r}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2\,(r!)^2} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2r} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}\, x^{\nu+2r+\beta-1}\, dx$$

$$I^{\alpha,\beta}_{\nu,b} = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{(-1)^r\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\nu+\beta+2r)}{[\Gamma(\nu+r+1)]^2 (r!)^2\, \Gamma(\alpha+\nu+\beta+2r)} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2r}$$

Finalmente por la fórmula de duplicación, resulta

$$I^{\alpha,\beta}_{\nu,b} = \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\nu+\beta)}{[\Gamma(\nu+1)]^2\, \Gamma(\alpha+\nu+\beta)} \left(\frac{b}{2}\right)^\nu \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu+\beta}{2}\right)_r \cdot \left(\frac{\nu+\beta+1}{2}\right)_r \cdot \left(-\frac{b^2}{4}\right)^r}{[(\nu+1)_r]^2 \left(\frac{\alpha+\nu+\beta}{2}\right)_r \left(\frac{\alpha+\nu+\beta+1}{2}\right)_r (r!)^2}$$

O sea :

$$I^{\alpha,\beta}_{\nu,b} = \frac{B(\alpha,\nu+\beta)}{[\Gamma(\nu+1)]^2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^\nu \cdot {}_2F_5\left(\begin{matrix} \frac{\nu+\beta}{2}, \frac{\nu+\beta+1}{2}; \\ \frac{\alpha+\nu+\beta}{2}, \frac{\alpha+\nu+\beta+1}{2}, \nu+1, \nu+1, 1; \end{matrix} -\frac{b^2}{4}\right) \qquad (7.4)$$

En particular para $\beta = 1-\nu$, tenemos :

$$J^{\alpha}_{\nu,b} = I^{\alpha,1-\nu}_{\nu,b} = \frac{1}{\alpha[\Gamma(\nu+1)]^2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^\nu \cdot {}_1F_4\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}; \\ \frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha+2}{2}, \nu+1, \nu+1; \end{matrix} -\frac{b^2}{4}\right) \qquad (7.5)$$

Las fórmulas (7.1) y (7.4) nos permiten hallar el desarrollo de Exton para $f(x) = (1-x)^\delta x^\eta$ con $Re(\delta) > -1$, $Re(\nu+\eta+2) > o$, $\nu > o$.

O sea : $f(x) = \sum_{r=o}^{\infty} a_r A_\nu(\mu_r x)$, en $[o,1]$, donde :

$$a_r = \frac{\int_0^1 x\, f(x)\, A_\nu(\mu_r x)\, dx}{\int_0^1 x\, [A_\nu(\mu_r x)]^2\, dx}$$

El denominador viene dado por (7.1), haciendo d = 1 y el numerador es :

$$I^{\xi+1,\eta+2}_{\nu,\mu_r}$$

Con $A_\nu(sx)$ se pueden definir algunos tipos de transformadas integrales, cuyas propiedades y características serán dadas en un próximo trabajo.

RECONOCIMIENTO : Agradezco las valiosas sugerencias y motivaciones para este trabajo, al Dr. Shyam Kalla de la Universidad del Zulia.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOWMAN, F. : "*Introduction to Bessel Functions*", Dover Publications Inc, New York, 1958.

[2] EXTON, H. : "*Di-Bessel Function*", Indian J. Pure appl. Math., 11(7) : 856-862, (1980).

[3] GRADSHTEYN. I.S. and RYZHIK, I.M. : "*Table of Integral, Series and Products*", Academic Press, New York, 1965.

[4] INCE, E.L. : "*Ordinary Differential Equations*", Green & Co, New York, 1926.

[5] LEBEDEV, N.N. : "*Special Functions and Their Applications*", Dover, New York, 1972.

[6] LEIGHTON, W. and NEHARI, Z. : "*On the oscillations of solutions of selfadjoint linear differential equations of the fourth order*", Trans. Amer. Math. Soc. (1958), 325-377.

[7] MATHAI, A.M., and SAXENA, R.K. : "*G- Function, Springer-Verlag*", New York, 1972.

[8] RAINVILLE, E.D. : "*Special Functions*", The Mac-Millan Co, New York, 1960.

[9] ROTHE, R. : "*Matemática Superior*", Vol. III, Edit. Labor, Barcelona, 1968.

[10] SWANSON, C.A. : "*Comparison and oscillation theory of linear differential equations*," Academic Press, New York, 1968.

Recibido el 30 de enero de 1987