Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 10, No. 2, 1987

Francisco Montes de Oca
Universidad Centro Occidental
"Lisandro Alvarado"
Barquisimeto, Venezuela

SOLUCIONES MULTIPLES PERIODICAS NO CONSTANTES DE UNA ECUACION DIFERENCIAL NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN

Este proyecto fue financiado parcialmente por el Consejo Asesor de Investigación y Servicios (C.A.D.I.S.), U.C.L.A.

ABSTRACT

Let $G : R^n \dashrightarrow R$ be of class C^2 and satisfy $\nabla G(0) = 0$. Sufficient conditions for the existence of multiple periodic solutions of the second order differential system $X''(t) + \nabla G(X(t)) = 0$ are given.

RESUMEN

Sea $G : R^n \dashrightarrow R$ de clase C^2 y satisface $\nabla G(0) = 0$. Se dan condiciones suficientes para la existencia de condiciones periódicas múltiples del sistema diferencial de segundo orden $X''(t) + \nabla G(x(t)) = 0$.

I. INTRODUCCION

Este trabajo está motivado por los resultados presentados en [1] y [2]. En estas publicaciones, Shair Ahmad y el autor, investigamos la existencia de soluciones periódicas, con período fijo 2π, de un sistema autónomo de segundo orden de ecuaciones diferenciales de la forma :

$$X''(t) + g(X(t)) = 0 , \qquad [1]$$

donde $g : R^n \dashrightarrow R^n$ y $g(0) = 0$

Para describir los resultados de [2], se introducen algunas notaciones : Si C es una matriz real nxn y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ son los distintos valores propios de C, con $\lambda_k > 0$ para $k = 1,2,\ldots,m$, entonces, consideremos al entero no negativo ι_k tal que $\iota_k^2 < \lambda_k < (\iota_k + 1)^2$ y definamos el índice, i(C), de una matriz como

$$i(C) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} (\iota_k + 1) \text{ multiplicidad}(\lambda_k) \\ 0, \text{ si C no tiene valores propios positivos} \end{cases}$$

Supongamos que g es de clase C^1 y que existe una matriz B tal que

$$|g(x) - Bx| \,/\, |x| \dashrightarrow 0, \text{ conforme } |x| \dashrightarrow +\infty$$

Sea $A = Dg(0)$ la matriz jacobiana de g evaluada en cero. Los resultados de [2] demuestran que si ni A ni B tienen valores propios de la forma m^2, $m = 0,1,2,\ldots$, y $g(x) \neq 0$, $x \neq 0$, y si $i[A] - i[B]$ es un entero impar entonces existe una solución par no constante, 2π-periódica de (1).

El propósito de este trabajo es dar algunas condiciones que garanticen la exitencia de más de una solución 2π - periódica no constante de (1).

II. ALGUNOS RESULTADOS PRELIMINARES

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$X''(t) + \nabla G(X(t)) = 0, \qquad (2)$$

donde $G : R^n \dashrightarrow R$ es de clase C^2.

Sea H el espacio real de Hilbert de todas las funciones $u : R \dashrightarrow R^n$ tal que u es 2π - periódica, las componentes de u son absolutamente contínuas, $u(-t) = u(t)$ y las componentes de $u' = du/dt$ pertenecen a $L^2[0,2\pi]$, con producto interior, $\langle\langle .,. \rangle\rangle$, dado por

$$\langle\langle u,v \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \{\langle u(t),v(t)\rangle + \langle u'(t),v'(t)\rangle\}dt, \qquad (3)$$

donde $\langle .,. \rangle$ es el producto interior usual en R^n y $|.|$ la norma inducida por éste.

Investigaremos la existencia de soluciones 2π - periódicas no constantes de (2) que son pares. Dada $u \in H$, u es solución de (2) si y sólo si

$$0 = \int_0^{2\pi} [\langle u', \Psi' \rangle - \langle \nabla G(u), \Psi \rangle] dt, \qquad (4)$$

para toda $\Psi \in H$. En efecto, por argumentos clásicos del cálculo de variaciones, si $u \in H$ entonces $u \in C^2$ y es una solución de (2) si y sólo si

$$0 = \int_0^{2\pi} [\langle u', v' \rangle - \langle \nabla G(u), v \rangle] dt, \qquad (5)$$

para todas las funciones absolutamente contínuas 2π-periódicas $v: R \rightarrow R^n$ con $|v'| \in L^2[0,2\pi]$ (ver por ejemplo, [4,p. 154]). Cada v puede escribirse de manera única en la forma $v = \Psi + \phi$, donde $\psi \in H$ y ϕ es impar. Obviamente, $u \in H$ implica que

$$0 = \int_0^{2\pi} [\langle u', \phi' \rangle - \langle \nabla G(u), \phi \rangle]\, dt,$$

puesto que el integrando es una función 2π - periódica impar. Por lo tanto, (5) se verifica para cada v de la clase antes mencionada si y sólo si (4) se verifica para cada $\Psi \in H$. Esto nos dice que soluciones débiles de (2) coinciden con soluciones suaves de (2).

Definamos la funcional $f : H \rightarrow R$ como

$$f(u) = \int_0^{2\pi} \{\tfrac{1}{2} |u'|^2 - G(u(t))\}\, dt \qquad (6)$$

La condición $G \in C^2$ implica que $f \in C^2$. Además, si $v \in H$

$$f'(u)(v) = \frac{d}{dx} f(u + xv)_{x = 0}$$

$$= \int_0^{2\pi} \{\langle u', v' \rangle - \langle \nabla G(u), v \rangle\} dt.$$

Por lo tanto,

$$\langle\langle \nabla f(u), v \rangle\rangle = f'(u)(v) = \int_0^{2\pi} \{\langle u', v' \rangle - \langle \nabla G(u), v \rangle\} dt. \qquad (7)$$

De aquí observamos que los puntos críticos de f coinciden con las soluciones de (2). Luego, investigar el número de soluciones de (2) es equivalente a investigar el número de puntos críticos de f.

De (3) y (7) se sigue que :

$$\langle\langle \nabla f(u), v \rangle\rangle = \langle\langle (I-F)u, v \rangle\rangle, \qquad (8)$$

donde $F : H \rightarrow H$ está definido explícitamente por :

$$\langle\langle Fu, v \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \langle \nabla G(u(t)) + u(t),\ v(t) \rangle\, dt, \qquad (9)$$

$\forall\, v \in H$. Como la inmersión de H en el conjunto de todas las funciones 2π-periódicas de R en R^n, con la norma $\|\cdot\|_\infty = \max\{|u(t)| : t \in [0,2\pi]\}$ es compacta (ver [4,p.p.155-156]), entonces F es contínua y compacta.

Si u, v y w están en H, entonces

$$\langle\langle D^2 f(u)v, w \rangle\rangle = \frac{d}{dx} \langle\langle \nabla f(u + xv), w \rangle\rangle\Big|_{x=0}$$

$$= \int_0^{2\pi} \{\langle v', w' \rangle - \langle D^2 G(u)v, w \rangle\}\, dt, \qquad (10)$$

$$f''(u)(v)(w) = \int_0^{2\pi} \{\langle v', w' \rangle - \langle D^2 G(u)v, w \rangle\} dt, \qquad (11)$$

$$\langle\langle F'(u)(w), v \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \langle (D^2 G(u) + I)\, w, v \rangle\, dt, \qquad (12)$$

$$f''(0)(v)(v) = \int_0^{2\pi} \{\langle v', w' \rangle - \langle D^2 G(0)v, w \rangle\} dt, \qquad (13)$$

$$\langle\langle F'(0)(w), v \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \langle (D^2 G(0) + I)\, w, v \rangle\, dt. \qquad (14)$$

III. PROPIEDADES ESPECTRALES DE UN CIERTO OPERADOR LINEAL COMPACTO

Para investigar los puntos críticos de f, los cuales corresponden a soluciones pares 2π- periódicas de (2), investigaremos algunas propiedades espectrales del operador lineal definido implícitamente (por el teorema de representación de Riesz)como sigue :

$$\langle\langle Mu,v\rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \{\langle Cu,v\rangle + \langle u,v\rangle\} \, dt, \tag{15}$$

para toda $v \in H$ y toda $u \in H$, donde C es una matriz real de orden nxn, la compacidad de M se deduce de la desigualdad $||Mu|| \leq k\, ||u||_\infty$, donde k es una constante, $||u||_\infty = \max\{|u(t)| : t\in[0,2\pi]\}$ y $||.||$ es la norma en H inducida por el producto interior $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, y del hecho de que la inmersión de H en el espacio de las funciones contínuas, 2π -periódicas, con valores en R^n con la norma $||.||_\infty$ es compacta (ver [4,p.p. 155-156]). Observe que F'(0) tiene esa forma.

Los lemas siguientes se establecieron en [2] en una forma más general. Incluímos sus demostraciones por cuestiones de completitud.

LEMA 3.1. Sean M y C como en (15). Sea $\lambda \neq 0$ un número real. Entonces existe $w\in H$, $w \neq 0$ tal que

$$(M - \lambda I)w = 0$$

si y sólo si w tiene derivadas de todos los ordenes y

$$(\lambda D^2 + C + I_n)w = 0,$$

donde $D^2 v = dv/dt$. Aquí I_n es la identidad sobre R^n e I es la identidad sobre H.

DEMOSTRACION. Si $(M - \lambda I)\, w = 0$ entonces para toda v en H tenemos

$$0 = \int_0^{2\pi} \{\langle\lambda w',v'\rangle - \langle (C + (1-\lambda)I_n)w,v\rangle\} dt.$$

Por los mismos resultados del cálculo variacional ya mencionados, se sigue que $w \in C^2$ y

$$0 = \lambda w'' + Cw + (1-\lambda)I_n w = [\lambda D^2 + C + (1-\lambda)I_n]\, w.$$

Como w es una solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, w tiene derivadas de todos los órdenes :

Recíprocamente, si $[\lambda D^2+C+(1-\lambda)I_n]\, w = 0$, entonces

$$\langle[\lambda D^2 + C + (1-\lambda)I_n]\, w,v\rangle = 0,$$

para todo v en H. Integrando desde 0 hasta 2π se tiene que para toda $v \in H$

$$\int_0^{2\pi} \{\langle\lambda w'',v\rangle + \langle Cw,v\rangle + \langle(1-\lambda)I_n w,v\rangle\} dt = 0.$$

Integrando por partes en la primera integral tenemos que

$$0 = \langle\lambda w',v'\rangle\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \langle\lambda w',v'\rangle dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \{\langle Cw,v\rangle + \langle(1-\lambda)I_n w,v\rangle\} dt.$$

Por la periodicidad de w y v tenemos que $\langle\lambda w',v'\rangle\Big|_0^{2\pi} = 0$ y en consecuencia,

$$\int_0^{2\pi} \{\langle\lambda w',v'\rangle - \langle(C + (1-\lambda)I_n)w,v\rangle\} dt = 0.$$

Y esto es equivalente a $(M - \lambda I)w = 0$. Esto demuestra el lema.

LEMA 3.2. Sean M y C como en (15) y $\lambda \neq 0$ un número real. Entonces λ es un valor propio de M si y sólo si $\lambda = (1+\mu)/(1+m^2)$, donde μ es un valor propio de C y $m \geq 0$ es un entero. En particular, $I-M : H \longrightarrow H$ es una biyección si y sólo si C no tiene valores propios de la forma m^2, donde $m \geq 0$ es un entero.

DEMOSTRACION. Supongamos que λ es un valor propio de M. Entonces existe una función $w\in H$, $w\neq 0$ tal que $(M - \lambda I)w = 0$.

Por el lema anterior se tiene que w tiene derivadas de todos los órdenes y que

$$\lambda w''(t) - \lambda w(t) + (C + I_n)w(t) = 0 \qquad (16)$$

Como $w \in H$, se sigue de la definición de H que podemos escribir

$$w(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(mt), \qquad (17)$$

donde $a_m \in R^n$ y $a_m \neq 0$ para algún $m \geq 0$. Como la serie puede ser derivada término a término cualquier número de veces, se deduce de (16) y (17) que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(C + I_n)a_m - \lambda(m^2 + 1)a_m\}\cos(mt) = 0,$$

para todo t. Por lo tanto, $(C + I_n)a_m = \lambda(m^2+1)a_m$, para todo $m \geq 0$. Como $a_m \neq 0$ para algún $m \geq 0$, tenemos que $\lambda(m^2+1)$ es un valor propio de $C + I_n$. Ahora bien, como los valores propios de $C + I_n$ son de la forma $\mu + 1$, donde μ es un valor propio de C, se sigue que

$$\lambda = (\mu+1)/(m^2+1).$$

Recíprocamente si $\lambda = (\mu+1)/(m^2+1)$, donde μ es un valor propio de C y $m \geq 0$ es un entero, entonces existe un vector $a_m \neq 0$ en R^n tal que

$$(C + I_n)a_m = \lambda(m^2 + 1)a_m. \qquad (18)$$

Definamos la función $w(t) = a_m \cos(mt)$. (18) implica que la función w satisface la ecuación (16) y en consecuencia λ es un valor propio de **M**.

La segunda parte del lema es una consecuencia de la teoría de Reisz-Schauder de operadores de Fredholm. En efecto, como I-M : H---> H es inyectiva si y sólo si C no tiene valores propios de la forma m^2, m = 0,1,2,..., se deduce que I-M es una biyección si y sólo si la misma condición se verifica.

Ahora enunciaremos un resultado de Amann [3], en el cual se basa la demostración de los resultados principales de este trabajo.

TEOREMA DE AMANN. Sea $f : H \to R$ una funcional con $f \in C^1(H,R)$ y suponga que $\nabla f = I - F$, donde $F \in C(H,H)$ es compacto. Supongamos que $f(x) \to +\infty$, conforme $|x| \to +\infty$. Además, supongamos que x_1 es un punto crítico de f, el cual no es un mínimo global. Si F es diferenciable en x_1 y 1 no es un valor propio de la derivada, entonces f tiene al menos tres puntos críticos.

IV. APLICACIONES A PROBLEMAS NO LINEALES

En esta sección estableceremos los resultados principales relacionados con la ecuación (2).

TEOREMA 4.1. Consideremos la ecuación diferencial dada por (2). Si se satisfacen las siguientes condiciones :

(i) $D^2G(0)$ no tiene valores propios de la forma m^2, m=0,1,2,..., y tiene al menos un valor propio positivo;

(ii) $\nabla G(0) = 0$, $\nabla G(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$;

(iii) $G(x) \leq -\frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \beta$ para todo x en R^n, donde α y β son números reales positivos.

Entonces, existen al menos dos soluciones pares 2π - periódicas, no constantes, de (2).

DEMOSTRACION. Veamos que las hipótesis del Teorema de Amann se verifican. Por los resultados preliminares tenemos que f es de clase C^2 y $\nabla f = I - F$, donde F es un operador completamente continuo, es decir F es compacto y continuo. Demostremos que $f(x) \to +\infty$, conforme $|x| \to \infty$.
En efecto,

$$f(u) = \int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - G(u(t))\}\, dt$$

$$\geq \int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\alpha|u(t)|^2 - \beta\}dt, \text{por(iii)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\alpha|u(t)|^2\}dt - 2\pi\beta$$

$$\geq \delta\, ||u||^2 - 2\pi\beta, \quad \text{donde } \delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\alpha\}$$

En consecuencia $f(x) \to +\infty$, conforme $||x|| \to \infty$.

La condición $\nabla G(0)=0$ implica que 0 es un punto crítico de f. El cual no es un mínimo global, porque $D^2G(0)$ tiene al menos un valor propio positivo. En efecto, sea λ un valor propio positivo de $D^2G(0)$ y v un vector propio asociado a λ. Entonces la función constante $v(t)=v$ está en H, $v(t)\neq 0$ y

$$f''(0)(v)(v) = \int_0^{2\pi} -< D^2G(0)v,v > dt = -2\pi\lambda||v||^2<0,$$

y esto nos dice que en 0 no hay un mínimo global.

Por otra parte F es diferenciable en x=0 y

$$<<F'(0)w,v>> = \int_0^{2\pi} <\{D^2G(0) + I\} w,v > dt$$

Por el lema 2 se deduce que 1 no es un valor propio de F'(0). Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del teorema de Amann. Entonces f tiene al menos tres puntos críticos. La condición $\nabla G(x)\neq 0$, si $x\neq 0$ implica que por lo menos dos puntos críticos no son funciones constantes y en consecuencia existen al menos dos soluciones pares, 2π- periódicas no constantes de (2). Esto demuestra el teorema.

TEOREMA 4.2. Consideremos la ecuación dada por (2). Si se satisfacen las siguientes condiciones :

(i) $D^2G(0)$ no tiene valores propios de la forma m^2, $m=0,1,2,\ldots$, y tiene al menos un valor propio positivo;

(ii) $\nabla G(0) = 0$, $\nabla G(x)\neq 0$, si $x\neq 0$ y $G(0) = 0$;

(iii) Existe una matriz $B\in M_{nxn}(R)$ tal que

$$\lim_{|x|\to\infty}\{|\nabla G(x)-Bx|/|x|\} = 0,$$

y todos los valores propios de B son negativos.

Entonces existen al menos dos soluciones pares 2π-periódicas, no constantes de (2).

DEMOSTRACION. Primero demostraremos que las condiciones (ii) y (iii) implican que

$$\lim_{|x|\to\infty}\{|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>|/|x|^2\} = 0 \tag{19}$$

En efecto, G(0)=0 implica que

$$G(x) = \int_0^1 <\nabla G(tx),x > dt.$$

Como

$$\frac{1}{2}<Bx,x> = \int_0^1 t<Bx,x>\, dt = \int_0^1 <Btx,x>\, dt,$$

se sigue que :

$$G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x> = \int_0^1 <\nabla G(tx)-B(tx),x>\, dt.$$

Dado $\varepsilon>0$, escojamos $R>0$, suficientemente grande, de manera que $|x|\geq R$ implique que

$$|\nabla G(x) - Bx|/|x|<\varepsilon .$$

Por lo tanto,

$$|\nabla G(x) - Bx|<\varepsilon|x|,$$

si $|x|\geq R$. Sea $M(R) = \max\{|\nabla G(x)-Bx| : |x|\leq R\}$. Entonces

$$|\nabla G(x)-Bx|<\varepsilon|x| + M(R),$$

para todo $x\in R^n$. De aquí que

$$|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>|\leq \int_0^1 |<\nabla G(tx)-B(tx),x>|\, dt$$

$$\leq \int_0^1 |\nabla G(tx)-B(tx)|\,|x|\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \{\varepsilon|tx|+ M(R)\}|x|dt = \frac{1}{2}\varepsilon|x|^2 + M(R)|x|.$$

En consecuencia :

$$|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>|/|x|^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon + M(R)/|x| .$$

Como $M(R)/|x|\to 0$, conforme $|x|\to\infty$, entonces se tiene que

$$\lim_{|x|\to\infty}|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>|/|x|^2= 0.$$

Esto prueba la afirmación.

Veamos que la condición de que los valores propios de B son negativos y (19) implican que existen constantes positivas α y β tales que

$$G(x) \leq -\frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \beta,$$

para todo $x \in R^n$. En efecto, como los valores propios de B son negativos, entonces B es definida negativa, esto es, $<Bx,x> < 0$ para todo $x \neq 0$. De aquí que existe un $\alpha > 0$ tal que

$$-\frac{1}{2}<Bx,x> \geq \alpha|x|^2,$$

para toda $x \in R^n$. En realidad $\alpha \leq \min\{-\frac{1}{2}<Bx,x> : |x| = 1\}$. De (19) se deduce que existe un número positivo T tal que para todo x con $|x| \geq T$ se tiene que

$$|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>| < \frac{1}{2}\alpha|x|^2.$$

Sea $\alpha(T) = \max\{|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>| : |x| \leq T\}$. Entonces para toda $x \in R^n$ se tiene que

$$|G(x) - \frac{1}{2}<Bx,x>| \leq \frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \alpha(T).$$

En consecuencia,

$$G(x) \leq \frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \alpha(t) + \frac{1}{2}<Bx,x>$$

$$< \frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \alpha(T) - \alpha|x|^2$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \alpha(T).$$

Por lo tanto,

$$G(x) \leq -\frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \beta,$$

para toda $x \in R^n$, donde $\beta = \alpha(T)$. Esto prueba la afirmación. De aquí se deduce que las hipótesis del teorema anterior se verifican y en consecuencia, se tiene que existen al menos dos soluciones pares, 2π-periódicas, no constantes de (2).

La condición $G(0) = 0$ se puede suprimir, ya que la función

$$G_1(x) = G(x) - G(0),$$

satisface las condiciones del Teorema 4.2.

Reconocimiento.

Agradezco al Dr. Shair Ahmad sus valiosas sugerencias y conjeturas que dieron lugar a este trabajo.

V. BIBLIOGRAFIA

[1] AHMAD, S. y MONTES DE OCA, F. : *"Periodic solutions of nonlinear differential equations"*, Vth. International Conference on Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations, Arlington, Texas, U.S.A. (1982).

[2] AHMAD, S. y MONTES DE OCA, F. : *"On the existence of non-constant periodic solutions I"*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 7, Num. 11, pp. 1209-1218. (1983)

[3] AMMAN, H.: *"A note on degree theory for gradient mappings*, Proc. Am. Math. Soc. 85, 591,592. (1982)

[4] BERGER, M. : *"Perspectives in Nonlinearity"*, Benjamin, New York. (1968).

Recibido el 30 de enero de 1987