

## DISEÑO DE UNA METODOLOGIA PARA EL POST-ANÁLISIS DE REDES DE TRIANGULACION

A. Marcano y M. Lunar  
División de Postgrado  
Facultad de Ingeniería  
Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela

### RESUMEN

En este trabajo se hace un análisis de las diferentes características que presentan algunas metodologías usadas para el Post-Análisis de redes de triangulación. Como consecuencia de ese análisis se detectaron ciertas deficiencias, que se pretenden subsanar mediante el desarrollo de una nueva metodología, que incorpore conceptos de data reciente y ofrezca una nueva estrategia diseñada para realizar ese post-análisis.

Entre los recientes conceptos incorporados en la metodología propuesta en este trabajo están: El uso de los Eigenvalues y Eigenvectors para la determinación de las elipses de error, el de la componente principal como parte esencial para el análisis de redes de triangulación, el de la matriz de coeficientes de correlación de los parámetros incógnitas y el de la norma  $L_1$  o de Laplace para la detección y localización de errores groseros en las observaciones.

Finalmente, para la verificación de la metodología propuesta, se usaron redes de triangulación simuladas, cuyos resultados se analizaron para extraer las conclusiones y recomendaciones en relación al comportamiento de la misma.

### SUMMARY

In this technical paper it is analyzed the different used characteristics that some methodologies present to the post-analysis of triangulation nets. As consequence from such analysis some deficiencies were detected and they pretend to get over by means of the development of a new methodology, that incorporate concepts of recent date and offers a new designed strategy to perform that post-analysis.

Among the recent concepts incorporated in the proposed methodology in this task are: the use of Eigenvalues and Eigenvector to the determination of the ellipses of error, the principal component as the essential to the analysis of triangulation nets, the coefficients of correlation matrix of unknow parameters and from the standard  $L_1$  or the

Laplace to the detection and localization of grave mistakes in the observations.

Finally, to the verification from the proposed methodology, simulated triangulation nets were used and such results were analysed to draw out conclusions and recommendations related to the deportment of such methodology.

### 1. INTRODUCCION

Para el desarrollo de este trabajo denominado "Diseño de una Metodología para el Post - Análisis de redes de Triangulación", se procedió, en primer lugar, a la revisión de las metodologías que son usadas para cumplir con este propósito, encontrándose, por lo menos, las características de tres de ellas. Posteriormente, teniendo presente algunas deficiencias de las tres metodologías antes citadas y con la incorporación de novedosos conceptos de data reciente se logró a través de una estrategia diseñada adecuadamente, desarrollar esa meta trazada, cual es, el de concebir una nueva metodología para el Post-Análisis de redes de Triangulación, que contemple aspectos no involucrados en las metodologías mencionadas anteriormente.

#### 1.1. CONCEPTOS BASICOS UTILIZADOS EN ESTE TRABAJO

Entre estos conceptos tenemos los siguientes:

##### 1.1.1. CONCEPTO DE POST-ANALISIS

El Post-Análisis es un procedimiento estadístico que hace uso de la información obtenida de la compensación (parámetros incógnitos estimados) combinada con la información obtenida del modelo estocástico de la compensación (matriz de VARCOV de los parámetros incógnitas estimados, residuales de las observaciones, factores de varianza a priori y a posteriori, etc.) para medir y probar la bondad de los resultados obtenidos o solución (2).

Se podría decir entonces que, además de los simples o complejos resultados que se obtienen por el cálculo de compensación según el principio de los cuadrados mínimos, existe una etapa más (Post-Análisis).

La figura 1, ilustra hasta donde llega la práctica más común en el tratamiento y producción de información métrica:

Tomando en cuenta el Post-Análisis, es obvio que al esquema anterior debe añadirse una etapa más, en la cual las etapas de salidas de la figura 1, constituyen las entradas al proceso de Post-Análisis, que no es más que una evaluación de los resultados de la compensación.

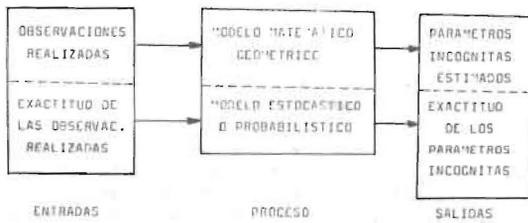


FIG.1: Tratamiento y producción de información métrica.



FIG.2: Esquema Simplificado del Proceso Evaluativo.

### 1.1.2. CONCEPTO DE CALIDAD DE UNA RED

La calidad de una red se refiere a la exactitud y confiabilidad de la red completa, es decir, de manera global, puesto que la exactitud de cada punto de la red sólo indica su exactitud local, lo cual no representa a toda la red. (3)

Por lo tanto, la "calidad de una red" indica lo bien que las coordenadas de los puntos de una red han sido estimadas, lo cual implica medidas de exactitud y confiabilidad para expresar esa calidad (5).

### 1.1.3. EL CONCEPTO DE CONFIABILIDAD DE UNA RED

De acuerdo a W. Baarda (1979), el concepto de "confiabilidad de una red" está relacionado a la comprobación de los errores groseros en las observaciones de la red, que no es más que la comprobación del modelo computacional usado. (3)

Esos errores pueden ser equivocaciones, errores sistemáticos debido a su no corrección, errores en las asunciones funcionales del modelo de compensación, errores en los pesos de las observaciones, errores en las asunciones estocásticas de los errores accidentales, etc. (6)(7)

La "confiabilidad" depende tanto de la redundancia de las observaciones como de la geometría local. Comprende dos aspectos: La confiabilidad externa y la confiabilidad interna.

#### 1.1.3.1. LA CONFIABILIDAD INTERNA

Expresa la magnitud de un error grosero en una observación, la cual no sería detectable a un cierto nivel de probabilidad. (6) (7)

#### 1.1.3.2. LA CONFIABILIDAD EXTERNA

Indica el efecto de los errores groseros no detectables sobre los parámetros incógnitas estimados. La confiabilidad externa está descrita por la influencia de un error grosero de las observaciones no detectado sobre los parámetros incógnitas estimados o sobre una función arbitraria de dichos parámetros incógnitas, tales como las siguientes: (8)

- un ángulo, una distancia, una diferencia de coordenadas o un área poligonal.

### 1.1.4. CONCEPTO DE EXACTITUD Y PRECISION

Existen dos conceptos que generalmente son usados erróneamente, como equivalentes o sinónimos, tales como el de "exactitud" y el de "precisión".

**LA PRECISION:** Se refiere al grado de cercanía o conformidad de mediciones repetidas de una misma magnitud aleatoria unas a otras, las cuales solamente están afectadas por errores accidentales (9) (10) (11) (12).

**LA EXACTITUD:** Se refiere al grado de cercanía o conformidad de una medición al valor verdadero. Se adopta el mejor estimado puntual de ese valor. La exactitud incluye no solamente los errores puramente accidentales, sino también los debidos a los errores sistemáticos remanentes producto de su no eliminación total por los modelos matemáticos de corrección empleados (10)(11)(12).

### 1.1.5. TÉCNICAS PARA EL POST-ANÁLISIS

Las diversas técnicas para el Post-Análisis pueden ser agrupadas así:

1.1.5.1. TÉCNICAS PARA EL POST-ANÁLISIS DE LA EXACTITUD DE LOS RESULTADOS FINALES (evaluación de la calidad del diseño geométrico de la red).

1.1.5.2. TÉCNICAS PARA EL POST-ANÁLISIS DE LA CONFIABILIDAD DE LAS OBSERVACIONES (evaluación de la conformidad de las observacio-

nes y el modelo funcional utilizados para la compensación).

- el test de ausencia de errores sistemáticos

Entre las técnicas para el Post-Análisis de exactitud de los resultados finales de una red, donde se consideran los elementos relativos a la estocasticidad de los parámetros incógnitas estimados (matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados) están las siguientes: (1)(10)(15).

De todas las técnicas mencionadas acá solamente se usaron en el trabajo desarrollado algunas de ellas.

- análisis de la matriz de correlación
- análisis de las elipses relativas de error
- análisis de la razón de los semiejes de las elipses absolutas de error
- análisis de la razón entre los eigenvalues máximo y mínimo de la matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados.
- la matriz de criterio
- análisis de la componente principal

## 2. ALGUNAS METODOLOGIAS USADAS PARA EL POST-ANÁLISIS DE REDES DE TRIANGULACION

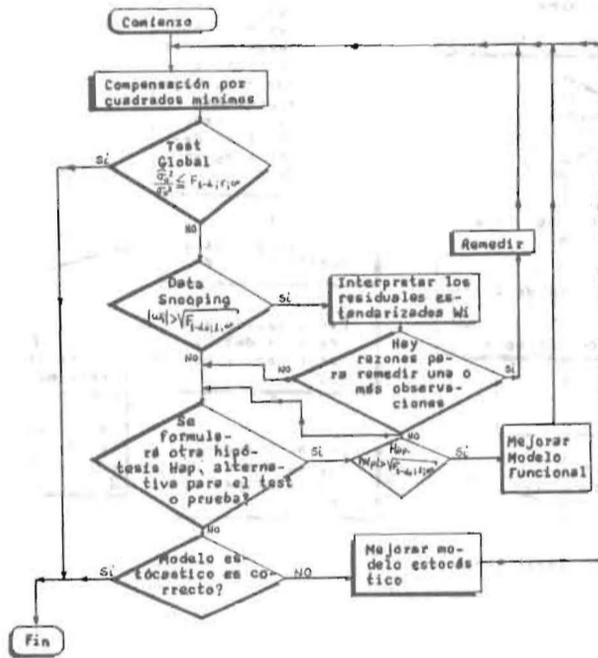
Entre las técnicas para el Post-Análisis de la confiabilidad de las observaciones, las cuales se fundamentan en su gran mayoría en la detección y localización de errores groseros en las observaciones, podemos citar las siguientes: (1)(3)(4)(5) (6) (7)(8)(10)(11)(13)(14)(18)

Se hace el análisis a tres metodologías de las varias empleadas para efectuar el Post-Análisis de redes de triangulación, siendo las mismas divulgadas y de uso continuo en varios países, las cuales combinan algunas de las técnicas para el Post-Análisis citadas anteriormente. Las metodologías son designadas como: Metodología A, Metodología B y Metodología C.

- el test global sobre el factor de Varianza
- el test sobre los pesos de las observaciones
- el data snooping
- el tau-test
- el test sobre la forma cuadrática de los residuales
- el método premium-protection
- el uso de la norma de Laplace

### 2.1. METODOLOGIA A (PROCEDIMIENTO DELFT)

Desarrollada por el centro de computación geodésica, de la Universidad Tecnológica de Delft, Holanda. (5) Este procedimiento se fundamenta en el test global (para detectar la presencia de errores groseros) y en el test data snooping (para localizar la observación que contiene el error grosero), lo cual pone en evidencia la utilización de los aportes del insigne geodesta holandés W. Baarda. Se condensa el procedimiento en el diagrama de flujo presentado en la figura 3.



(figura 3)

2.2. METODOLOGIA B (M. KAVOURAS)

Esta es una propuesta desarrollada por el geodesta griego, Marinos Kavouras, quien la presento en su tesis de Magister en Ciencia de Ingeniería (M.Sc.E.), al culminar sus estudios en la Universidad de New Brunswick, Fredericton, Canadá en Noviembre de 1982, la cual aplico a redes de triangulación reales y ficticias (16).

Kavouras, se baso en las asunciones siguientes:

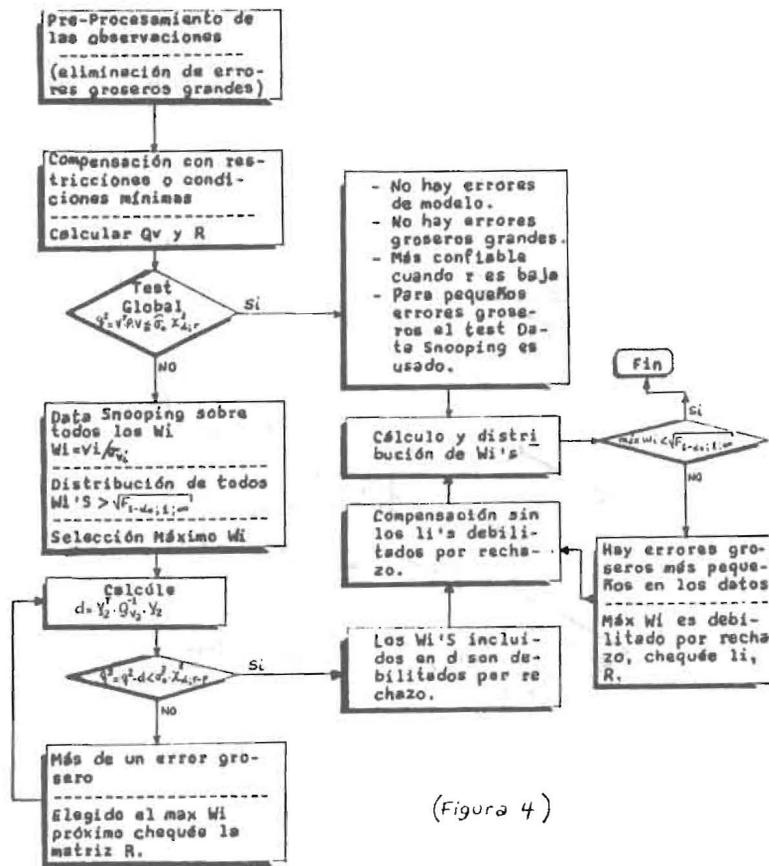
1. Todos los errores groseros grandes en las observaciones, deben ser detectados y eliminados en las etapas previas a la compensación, según el método de los cuadrados mínimos (norma  $L_2$ ), empleando las técnicas propias del pre-procesamiento de las observaciones.

2. El número de errores groseros en una red de triangulación es limitado y se asume que nunca exceden a la redundancia de la red.

3. Las varianzas de las observaciones de campo (independientes) son conocidas, por lo tanto, la matriz de pesos de las observaciones será una matriz diagonal.

4. Se realizará una compensación previa de la red de triangulación, usando la técnica de redes libres o de restricciones mínimas y la norma  $L_2$ , para determinar la presencia de errores groseros grandes en las observaciones (test global) y selección de los pesos. Se condensa el procedimiento mediante el diagrama de flujo mostrada en la figura 4.

Metodología propuesta por M. Kavouras presentada en el diagrama de flujo tomado de su tesis de M.sc.E.



(Figura 4)

### 2.3. METODOLOGIA C (BARBARELLA-UNGUENDOLI)

Desarrollada por los geodestas italianos Maurizio Barbarella y Marco Unguendoli, de Bologna, Italia, quienes la aplicaron para el Post-Análisis de la red de triangulación nacional italiana, además en diversas redes locales y regionales. Las principales características de esta metodología son: (17)

- 1.- La detección de errores groseros en las observaciones se hace usando el test data snooping y rechazando la observación que no aprueba el test de máximo  $W_i$ , para luego compensar. Este proceso se efectúa en forma repetitiva hasta dejar la red libre de observaciones con errores groseros. (data snooping:  $W_i = 3.29$ , se rechaza la observación).
- 2.- Para la compensación se aplica el método de red libre, usando la inversa generalizada de Helmert o la descomposición de valor singular (norma  $L_2$ ).
- 3.- El análisis de la red de triangulación se lleva a cabo considerando las elipses de error absoluta y relativa y el error sobre la distancia y acimut entre pares de puntos. Las elipses son ploteadas automáticamente usando un programa interactivo.

### 2.4. FUNDAMENTOS DE LA METODOLOGIA A DESARROLLAR

En atención a las características correspondientes a las Metodologías anteriores se han postulado los fundamentos para la nueva Metodología a desarrollar, previo análisis de las justificaciones de la misma, siendo éstos los siguientes:

- 1.- La detección y localización de errores groseros en las observaciones se basará en el uso de la norma  $L_1$ .
- 2.- Eliminadas las observaciones con errores groseros, se hará la compensación final de la red de triangulación mediante la norma  $L_2$ .
- 3.- El Post-Análisis de la exactitud de los puntos de la red de triangulación, se basará en las elipses absolutas de error determinadas en función de los Eigenvalues y Eigenvectors de la correspondiente matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados.
- 4.- El Post-Análisis de la exactitud de la red, se basará en las elipses relativas de error de las distancias mayores entre los puntos más alejados de la red en dos direcciones, una en dirección longitudinal y la otra en dirección transversal.
- 5.- El uso de la componente principal para detectar la zona más débil o crítica y su dirección en la red de triangulación.

6.- La utilización de la matriz de coeficientes de correlación de la correspondiente matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados, como una verificación adicional de lo reflejado por la componente principal.

7.- Finalmente, el uso de la matriz de VAR-COV de las observaciones compensadas, como una posibilidad de verificar la asunción de la matriz de pesos diagonal para las observaciones originales.

Se observa, que los fundamentos de la Metodología a desarrollar, contempla aspectos no considerados en las Metodologías A, B y C presentadas anteriormente, pretendiendo subsanar algunas deficiencias observadas para las antes citadas.

En resumen, la Metodología propuesta comprende dos aspectos primordiales:

- El Post-Análisis de observaciones y
- El Post-Análisis de exactitudes de los parámetros incógnitas estimados.

Con el propósito de resumir la Metodología propuesta se presenta, en forma general, el diagrama de flujo correspondiente en la figura 5.

### 2.5. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA METODOLOGIA PROPUESTA

Ventajas:

- 1.- Elimina el uso de varios tests estadísticos para la detección y localización de errores groseros en las observaciones, fundamentalmente el test global.
- 2.- Elimina el uso de la norma  $L_2$  como el medio más empleado para la compensación previa al Post-Análisis y la sustituye por la compensación usando la norma  $L_1$ , la cual ofrece ventajas significativas para el Post-Análisis, en lo relativo a la detección y localización de errores groseros en las observaciones, de manera inequívoca con una aproximación del 90% en la magnitud del error.
- 3.- Permite localizar de manera simultánea todas las observaciones que contiene errores groseros sin necesidad de repetir la compensación.
- 4.- No requiere la reestructuración de unas nuevas matrices A y L en las ecuaciones de observaciones para realizar la compensación final de la red, por la norma  $L_2$ , puesto que sólo basta eliminar las filas correspondientes a las observaciones con errores groseros en las matrices originales A y L.
- 5.- Cuando ninguna de las observaciones presenta errores groseros, el residual máximo obtenido con la norma  $L_1$ , representa el máximo error de cierre de los triángulos en la red.

6.- El uso de los Eigenvalues y Eigenvectors de la matriz VAR-COV de los parámetros incógnitos estimados para el cálculo de las elipses absolutas de error.

7.- Utilizar la componente principal para detectar las zonas críticas o débiles de la red y su dirección.

Estas dos últimas ventajas señaladas, no son consideradas por las Metodologías mencionadas anteriormente.

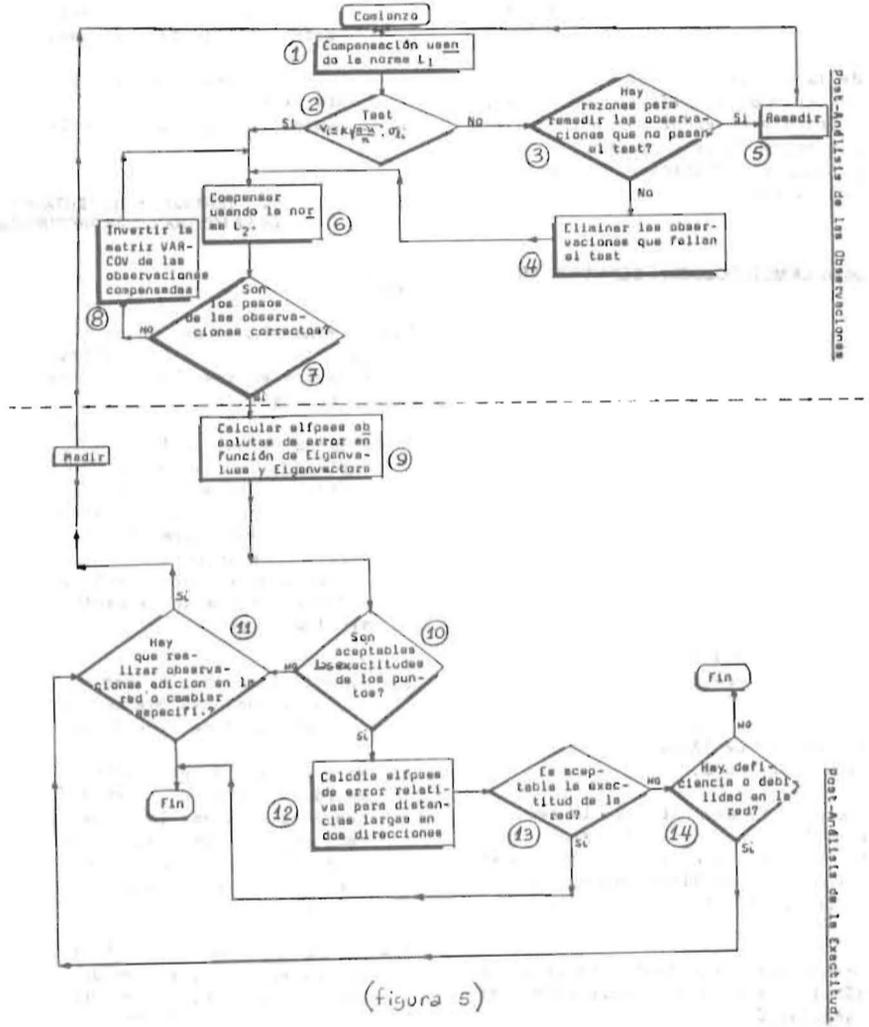
Desventajas:

1.- La poca divulgación del uso de la norma  $L_1$  para la compensación y detección de errores groseros

en las observaciones de redes geodésicas. En virtud de lo anterior no es común la disponibilidad de programas de computación para la compensación usando la norma  $L_1$ .

2.- El uso de la norma  $L_1$ , bajo la misma estrategia que han usado la norma  $L_2$ , de eliminar la observación con máximo error grosero, compensar y repetir el proceso para ir eliminando una a una las observaciones con errores groseros, falla. Por lo cual no es aplicable en ese sentido, de acuerdo a los resultados obtenidos en las diversas pruebas efectuadas para el presente trabajo, debiéndose esto al aspecto conceptual involucrado en la norma  $L_1$ , que hace el residual cero en un número de observaciones igual al número de parámetros incógnitos a estimar.

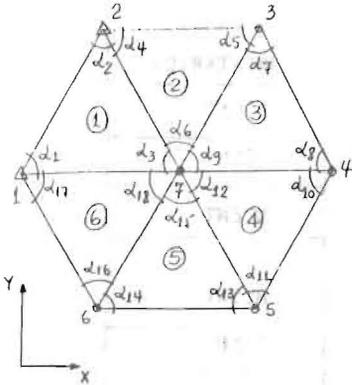
DIAGRAMA DE FLUJO DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA.



(figura 5)

## 2.6. VERIFICACION DE LA METODOLOGIA PROPUESTA

Para lograr este cometido, se simuló una red de triangulación cuya configuración geométrica fue la siguiente:



Estableciéndose dos tipos básicos de redes de triangulación.

- Una red ideal o teórica donde las observaciones están libres de errores.
- Otra red óptima o práctica simulada en la cual sus observaciones presentan errores encontrándose éstos dentro de unas especificaciones pre-establecidas. Las coordenadas de los puntos obtenidas para el caso a.), por supuesto se consideran libres de error. Para el caso b.) se tuvo presente ciertas especificaciones de tal manera que permitiera fijar un orden de exactitud para dicha red. Dentro de las especificaciones se tienen las siguientes:

- Exactitud para los ángulos:
  - . Cierre máximo de triángulos: 5"0
  - . Promedio de cierre del triángulo no debe exceder de 2"0
  - . Exactitud de la medición angular: 1"
- Espaciamiento entre estaciones:
  - . No debe ser menor que 5 Kms

Con estos elementos se logró simular las observaciones (ángulos solamente) para cada triángulo, basándose en el uso de números aleatorios. Con los ángulos generados en la red óptima se efectuó la compensación por cuadrados mínimos (norma  $L_2$ ), obteniéndose los resultados que se presentan en la tabla 1. Además se efectuó la comprobación de esa red óptima al serle aplicada el test global y el análisis de residuales en las observaciones generadas y las observaciones compensadas, siendo aprobados ambos, indicando esto, que es innecesario la aplicación de otras técnicas de Post-Análisis para

esta red óptima, la cual constituye la red básica para los casos a investigar en este trabajo. Para la simulación de los casos a ser investigados se procedió a la modificación de una o varias observaciones en la red de triangulación óptima, introduciendo errores groseros en esas observaciones, es decir, errores que superen tolerancias establecidas para las observaciones angulares.

### RESULTADOS A OBTENERSE POR LA COMPENSACION CON LA NORMA $L_2$ .

- Correcciones a las coordenadas aproximadas
- Correcciones a las observaciones
- Sumatoria de los PVV
- Factor de varianza a posteriori
- Matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas
- Desviaciones estándares de los parámetros incógnitas
- Elipses de error absolutas en base a la matriz de VAR-COV
- Matriz de VAR-COV de las observaciones compensadas
- Desviación estándar de las observaciones compensadas
- Matriz de VAR-COV de los residuales
- Matriz de correlación de los parámetros incógnitas
- Matriz de correlación de los residuales
- Residuales estandarizados
- Test global
- Test data snooping

(Tabla 1)

Debido a la gran cantidad de casos simulados en atención a la cantidad de observaciones modificadas en la red óptima (6597 casos), solamente se han analizado en este trabajo 14 casos simulados, elegidos al azar, a los cuales se les aplicó la Metodología propuesta objeto de este trabajo. Las características de cada caso analizado se presentan en la tabla 2. Para la compensación de los casos analizados se utilizó un programa de cálculo en lenguaje basic para microcomputadores.

## 3. RESULTADOS OBTENIDOS

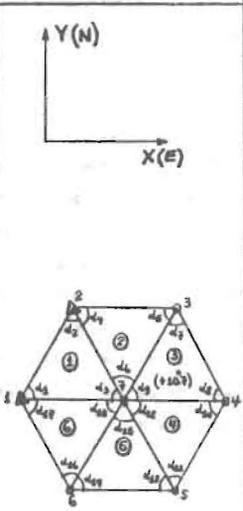
Con los casos simulados mencionados, se procedió a la comprobación de los fundamentos de la Metodología propuesta, cuyos resultados se presentan en las tablas 3 a 9, donde se observa lo siguiente:

- En la tabla 3 se presenta el cálculo de los residuales máximos de las observaciones de la red de triangulación para algunos de los 14 casos simulados a partir de la red óptima empleando las normas  $L_1$  y  $L_2$ , donde se observa la superioridad y conveniencia que representa el uso de la norma  $L_1$  sobre la norma  $L_2$  en lo concerniente a la de-

tección y localización de errores groseros en las observaciones.

- En la tabla 4 se presentan las diferencias en X e Y máximas para algunos de los 14 casos simulados,

empleando las normas  $L_1$  y  $L_2$  donde se evidencia que son menores las diferencias al emplear la norma  $L_2$  que con la norma  $L_1$ . Esto se ha realizado sin observaciones con errores groseros, lo cual ratifica el fundamento enunciado con respec-

CONFIGURACION GEOMETRICA	CASO ESTUDIADO	MODIFICACION ANGULAR REALIZ.	COMENTARIOS
 <p>Figura 2 (usada en todos los casos estudiados)</p> <p><b>OBSERVACIONES:</b> R.C.S.N.T: Reconpensación sin reestructurar nuevas tablas A y L, sin observaciones con errores. N.C.F.N.T: Nueva Compensación con estructuración de nuevas tablas A y L, eliminando las observaciones con errores.</p>	A	$d_9$ en $+10\%0$	RCSNT
	B	$d_{17}$ en $-20\%0$	RCSNT
	C	$d_{17}$ en $-20\%0$	NCENT
	D	$d_{12}$ en $+30\%0$ $d_{17}$ en $+20\%0$	RCSNT
	E	$d_{17}$ en $-5\%0$	RCSNT
	F	$d_{12}$ en $+20\%0$ $d_{17}$ en $+30\%0$	RCSNT
	G	$d_{10}$ en $-10\%0$	RCSNT
	H	$d_{10}$ en $-10\%0$ $d_{15}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-10\%0$	RCSNT
	I	$d_{10}$ en $-5\%0$ $d_{15}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-20\%0$	RCSNT
	J	$d_6$ en $-10\%0$ $d_{10}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-10\%0$	RCSNT
	K	$d_{15}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-10\%0$	RCSNT
	L	$d_{15}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-20\%0$	RCSNT
	M	$d_{12}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-10\%0$	RCSNT
	N	$d_{12}$ en $-10\%0$ $d_{17}$ en $-20\%0$	RCSNT

(Tabla 2 )

to a que la compensación final de la red de triangulación debe efectuarse con la norma L<sub>2</sub>.

- En la tabla 5 se presentan los residuales máximos para algunos de los 14 casos simulados, empleando las normas L<sub>1</sub> y L<sub>2</sub>, donde se manifiesta la situación anterior, observándose que son estos residuales menores al usar la norma L<sub>2</sub> que con la norma L<sub>1</sub>. Naturalmente la compensación final se ha realizado eliminando las observaciones con errores, lo cual viene a confirmar el uso de la norma L<sub>2</sub> en la misma.

- En la tabla 6, se muestran los elementos de las elipses absolutas de error calculadas con la matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados por un lado y por el otro los mismos elementos pero en función de los Eigenvalues y Eigenvectors de los parámetros incógnitas estimados, como un medio de efectuar el Post - Análisis de exactitud de los puntos de la red de triangulación, donde se observa que las elipses de error obtenidos con los Eigenvalues y Eigenvectors de la matriz VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados revelan de manera más real la correlación que existe entre los puntos de la red, tomándola en cuenta para el cálculo de ella. Por el contrario las elipses absolutas de error solamente, en función de la matriz VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados no toman en cuenta la correlación existente con los puntos vecinos, siendo por lo tanto su valor irreal.

Las elipses absolutas de error en función de los Eigenvalues y Eigenvectors fueron calculadas mediante un programa de computación en lenguaje basic usando un microcomputador.

- En la tabla 7, se presentan los elementos de las elipses relativas de error en las distancias mayores entre los puntos más alejados de la red en dos direcciones, una en dirección longitudinal y la otra, en dirección transversal para algunos de los 14 casos analizados, para efectuar el Post-Análisis de exactitud de la red, donde se observa que con los elementos a y b de la elipse podemos conocer la exactitud de las redes que se han analizado, utilizando para ello una tabla especial.

- En la tabla 8 se presentan los elementos para el cálculo de la componente principal y así poder detectar la zona más débil y su dirección en algunas de las redes de triangulación analizados. Se determina que el punto 7 por tener el mayor  $\lambda$  máx, representa la zona más débil de la red de triangulación.

- En la tabla 9, se presenta en forma resumida los coeficientes de correlación de la correspondiente matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas estimados como un complemento adicional, para la verificación de lo reflejado en el análisis de la componente principal, donde se evidencia que la correlación entre los parámetros incógnitas estimados es bastante significativa, ya que llega a tener valores que oscilan desde -0.52 hasta 0.83. Esto nos lleva a considerar que, en efecto, la zo-

na más débil de la red estará en el punto número 7. Por lo tanto, se ha ratificado lo obtenido en el aparte anterior.

- En la tabla 10, se presenta la matriz de VAR-COV de las observaciones compensadas, resumida para 06 de los 14 casos simulados de la red de triangulación, como un criterio para la verificación de la matriz de pesos diagonal asumida para las observaciones originales, donde se verifica que la varianza asumida para las observaciones fue correcta y su valor la unidad.

(Tabla 3)

Casos Estudia- dos	Residuales Máximos		
	Norma L <sub>2</sub>		Norma L <sub>1</sub>
	V <sub>i</sub>	W <sub>i</sub>	V <sub>i</sub>
A	V <sub>9</sub> =4'64	W <sub>9</sub> =6'96	V <sub>9</sub> =-9'00
	V <sub>8</sub> =3'07	W <sub>8</sub> =4'61	V <sub>6</sub> =-3'00
	V <sub>7</sub> =-2'99	W <sub>7</sub> =4'48	V <sub>18</sub> =+3'00
	V <sub>6</sub> =-2'07	W <sub>6</sub> =3'11	
B	V <sub>17</sub> =9'54	W <sub>17</sub> =14'30	V <sub>17</sub> =+19'50
	V <sub>16</sub> =6'63	W <sub>16</sub> =9'94	V <sub>4</sub> =-3'00
	V <sub>18</sub> =5'84	W <sub>18</sub> =8'76	V <sub>1</sub> =+2'00
	V <sub>11</sub> =4'03	W <sub>11</sub> =6'05	
D	V <sub>12</sub> =12'64	W <sub>12</sub> =18'96	V <sub>17</sub> =+22'00
	V <sub>11</sub> =10'89	W <sub>11</sub> =16'33	V <sub>12</sub> =+31'00
	V <sub>18</sub> =9'54	W <sub>18</sub> =14'31	V <sub>5</sub> =-2'80
	V <sub>17</sub> =7'79	W <sub>17</sub> =11'68	
E	V <sub>16</sub> =2'16	W <sub>16</sub> =3'24	V <sub>17</sub> =+6'30
	V <sub>17</sub> =2'91	W <sub>17</sub> =4'36	V <sub>1</sub> =+2'00
	V <sub>18</sub> =1'93	W <sub>18</sub> =2'90	V <sub>5</sub> =-1'80
	V <sub>11</sub> =1'44	W <sub>11</sub> =2'22	
F	V <sub>17</sub> =12'79	W <sub>17</sub> =19'19	V <sub>17</sub> =+32'00
	V <sub>18</sub> =11'20	W <sub>18</sub> =16'81	V <sub>2</sub> =-23'80
	V <sub>11</sub> =9'22	W <sub>11</sub> =13'83	V <sub>11</sub> =21'00
	V <sub>16</sub> =8'00	W <sub>16</sub> =12'01	V <sub>3</sub> =21'00
			V <sub>1</sub> =4'80
H	V <sub>16</sub> =4'92	W <sub>16</sub> =7'38	V <sub>10</sub> =10'80
	V <sub>18</sub> =4'59	W <sub>18</sub> =6'89	V <sub>17</sub> =+10'30
	V <sub>10</sub> =4'59	W <sub>10</sub> =6'88	V <sub>15</sub> =+9'00
	V <sub>12</sub> =4'26	W <sub>12</sub> =6'39	V <sub>5</sub> =-3'00
	V <sub>17</sub> =3'48	W <sub>17</sub> =5'23	V <sub>18</sub> =+2'70
	V <sub>11</sub> =3'15	W <sub>11</sub> =4'72	

(Tabla 4)

Casos Estudiados	Norma L <sub>2</sub>		Norma L <sub>1</sub>	
	$\Delta Y_{m\acute{a}x}$ (m)	$\Delta Y_{m\acute{a}x}$ (m)	$\Delta Y_{m\acute{a}x}$ (m)	$\Delta Y_{m\acute{a}x}$ (m)
A	-0.008	0.012	+0.178	+0.117
	-0.003	0.008	+0.112	+0.090
	0.002	-0.003	+0.071	-0.062
B	-0.080	-0.077	-0.104	-0.114
	-0.044	-0.073	0.060	-0.100
	+0.024	-0.030	-0.047	-0.049
	-0.018	-0.026	-0.010	-0.046
C	-0.003	-0.021	-0.008	-0.037
	-0.163	-0.096	-0.183	-0.106
	-0.096	-0.093	-0.097	-0.070
	-0.034	-0.038	+0.041	+0.012
D	-0.026	+0.008	-0.037	+0.007
	+0.019	-0.007	+0.024	-0.005
	-0.062	-0.061	-0.086	-0.074
	-0.025	-0.026	-0.069	-0.023
E	+0.022	-0.010	+0.034	-0.016
	-0.011	-0.009	-0.029	+0.012
	-0.002	+0.002	+0.013	-0.004
	-0.081	-0.076	-0.105	-0.139
F	-0.039	-0.076	+0.083	-0.114
	+0.025	-0.029	+0.037	-0.098
	+0.015	-0.029	-0.025	-0.037
	+0.002	-0.021	-0.010	-0.019
G	-0.061	-0.061	-0.797	+1.178
	-0.025	-0.025	+0.130	+0.183
	+0.022	-0.010	-0.070	+0.090
	+0.009	-0.009	+0.043	+0.085
H	-0.002	+0.002	+0.038	+0.027

(Tabla 5)

Casos Estudiados	Norma L <sub>2</sub>	Norma L <sub>1</sub>
	$V_{m\acute{a}x}$	$V_{m\acute{a}x}$
A	$V_5 = -1^{\circ}09$	$V_{17} = 3^{\circ}00$
	$V_6 = +1^{\circ}09$	$V_2 = 2^{\circ}50$
	$V_{16} = +1^{\circ}00$	$V_9 = 1^{\circ}90$
	$V_4 = -1^{\circ}00$	$V_8 = -1^{\circ}70$
B	$V_5 = -1^{\circ}30$	$V_1 = +1^{\circ}65$
	$V_1 = +1^{\circ}23$	$V_4 = -1^{\circ}50$
	$V_4 = -1^{\circ}11$	$V_5 = -1^{\circ}50$
	$V_3 = +0^{\circ}74$	$V_7 = -1^{\circ}00$
C	$V_5 = -1^{\circ}62$	$V_3 = -3^{\circ}00$
	$V_3 = +1^{\circ}28$	$V_3 = +1^{\circ}53$
	$V_4 = -1^{\circ}13$	$V_{12} = +1^{\circ}53$
	$V_{18} = +1^{\circ}10$	$V_8 = -1^{\circ}00$
D	$V_5 = -1^{\circ}20$	$V_5 = -2^{\circ}50$
	$V_6 = -1^{\circ}06$	$V_3 = +1^{\circ}20$
	$V_1 = +0^{\circ}92$	$V_9 = -1^{\circ}00$
	$V_4 = -0^{\circ}74$	$V_{15} = -1^{\circ}00$
E	$V_5 = -1^{\circ}30$	$V_5 = -2^{\circ}50$
	$V_1 = +1^{\circ}23$	$V_1 = 1^{\circ}65$
	$V_4 = -1^{\circ}10$	$V_{13} = -1^{\circ}00$
	$V_3 = +0^{\circ}74$	$V_7 = -1^{\circ}00$
F	$V_5 = -1^{\circ}19$	$V_{18} = 36^{\circ}00$
	$V_6 = -1^{\circ}06$	$V_{18} = -33^{\circ}30$
	$V_1 = +0^{\circ}92$	$V_{18} = 32^{\circ}00$
	$V_4 = -0^{\circ}74$	$V_{13} = -31^{\circ}20$

(Tabla 6)

Casos Estudiados	Puntos de la red	a (cm)		b (cm)		$\phi$	
		Cov	$\lambda$	Cov	$\lambda$	Cov	$\lambda$
A	3	4,9	1,3	4,9	1,3	00°(H)	73°42'(SA)
	4	7,8	1,9	7,1	1,9	156°34'(H)	62°51'(SH)
	5	7,3	2,6	7,1	2,6	19°08'(H)	104°19'(SA)
	6	4,9	3,0	4,9	3,6	59°40'(H)	85°56'(SA)
B	7	3,4	12,1	3,3	11,6	119°52'(H)	83°22'(SH)
	3	4,3	1,3	3,4	1,2	40°35'(H)	79°51'(SA)
	4	6,4	1,0	4,2	1,6	160°17'(H)	123°37'(SA)
	5	6,4	2,1	4,5	2,0	52°23'(H)	77°58'(SA)
C	6	4,9	3,0	4,2	3,0	140°59'(H)	86°48'(SA)
	7	2,9	10,2	2,0	7,7	103°36'(H)	97°32'(SH)
	3	4,6	1,3	4,6	1,3	00°(H)	84°46'(SA)
	4	6,9	2,0	6,9	2,0	00°(H)	93°07'(SA)
D	5	7,7	2,5	7,1	2,5	66°55'(H)	104°28'(SH)
	6	6,1	4,5	4,6	4,0	66°03'(H)	93°13'(SH)
	7	3,2	11,9	3,2	11,2	00°(H)	75°39'(SA)
	3	4,3	1,3	4,2	1,2	149°59'(H)	77°27'(SA)
E	4	6,4	1,9	6,2	1,6	10°57'(H)	51°48'(SA)
	5	7,0	2,3	6,1	1,9	22°09'(H)	99°18'(SA)
	6	5,6	4,2	4,2	3,1	68°30'(H)	86°37'(SA)
	7	2,9	10,9	2,9	10,1	00°(H)	75°16'(SH)
F	3	4,3	1,1	3,4	1,1	40°35'(H)	66°45'(SA)
	4	6,4	1,6	4,2	1,6	70°27'(H)	54°39'(SA)
	5	6,4	2,2	4,5	2,2	142°23'(H)	98°32'(SH)
	6	4,9	3,7	4,2	3,1	50°59'(H)	80°44'(SA)
G	7	2,9	10,2	2,0	7,7	103°36'(H)	79°14'(SH)
	3	4,3	1,4	4,2	1,0	149°59'(H)	47°51'(SA)
	4	6,4	2,0	4,2	1,4	10°57'(H)	77°58'(SH)
	5	7,0	2,3	6,1	2,0	22°09'(H)	114°23'(SA)
H	6	5,6	4,2	4,2	3,1	68°30'(H)	87°34'(SA)
	7	2,9	11,0	2,9	10,1	00°(H)	80°15'(SH)

donde:

S.A:Significa sentido con respecto al eje X<sup>+</sup>S.H:Significa sentido horario con respecto al eje X<sup>+</sup>H:Significa sentido horario con respecto al eje Y<sup>+</sup>

Casos Estudiados	Puntos	Distancia (m)	a (cm)	b (cm)	$\phi$
A	3 y 6	3-6=15999,9899	7,7	7,6	00°
	3 y 5	3-6=13856,3910	8,4	8,0	19°19'
B	3 y 6	3-6=16000,0481	7,2	5,3	35°00'
	3 y 5	3-5=13856,4490	6,5	5,8	80°47'
D	3 y 6	3-6=16000,0445	7,8	6,7	161°13'
	3 y 5	3-5=13856,4650	7,8	6,9	31°43'
E	3 y 6	3-6=16000,0478	7,2	5,3	35°00'
	3 y 5	3-5=13856,4490	7,2	4,5	80°47'
I	3 y 6	3-6=16000,0318	8,5	7,2	163°09'
	3 y 5	3-5=13856,4300	8,6	7,8	147°36'
N	3 y 6	3-6=16000,0545	7,8	6,7	161°13'
	3 y 5	3-5=13856,4650	7,8	6,9	31°43'

(Tabla 7)

(Tabla 8)

Caso Analizado	Punto	a	b	$\lambda_{\text{máx.}} \cdot 100$	Observaciones
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\Sigma \lambda$	
A	3	0.000137	0.000137	$\frac{0.014621 \cdot 100}{0.033348}$ =43.86%	Z.D.R.
	4	0.000375	0.000375		
	5	0.000699	0.000699		
	6	0.001441	0.001309		
	7	0.014621	0.013512		
B	3	0.00017	0.00015	$\frac{0.01045 \cdot 100}{0.020430}$ =51.15%	"
	4	0.00033	0.00025		
	5	0.00045	0.00039		
	6	0.00143	0.00090		
	7	0.01045	0.00991		
D	3	0.00016	0.00015	$\frac{0.01199 \cdot 100}{0.026710}$ =44.89%	"
	4	0.00036	0.00027		
	5	0.00052	0.00038		
	6	0.00174	0.00099		
	7	0.01199	0.01015		
E	3	0.000121	0.000121	$\frac{0.01040 \cdot 100}{0.020420}$ =51.15%	"
	4	0.000273	0.000273		
	5	0.000484	0.000484		
	6	0.001382	0.000949		
	7	0.01040	0.00993		
I	3	0.000174	0.000174	$\frac{0.014194 \cdot 100}{0.032735}$ =43.34%	"
	4	0.000388	0.000388		
	5	0.000644	0.000644		
	6	0.001994	0.001563		
	7	0.014194	0.012372		
N	3	0.000195	0.000102	$\frac{0.011989 \cdot 100}{0.026706}$ =44.89%	"
	4	0.000403	0.000195		
	5	0.000592	0.000403		
	6	0.001741	0.000988		
	7	0.011989	0.010140		

donde:

Z.D.R.: indica que por ser  $\lambda_{\text{máx}}$  correspondiente al punto 7, mayor que el 40% de  $\Sigma \lambda$  la zona más débil de la red.

Caso Analizado	Punto Red	3		4		5		6		7	
		$X_3$	$Y_3$	$X_4$	$Y_4$	$X_5$	$Y_5$	$X_6$	$Y_6$	$X_7$	$Y_7$
Z	$X_7$	0.43	0.59	0.75	0.30	0.76	0.14	0.44	0.50	1.00	0.00
	$Y_7$	0.59	0.43	0.30	0.75	0.75	0.75	0.53	0.46	0.00	1.00
A	$X_7$	0.44	0.60	0.80	0.15	0.76	0.28	0.43	0.59	1.00	0.02
	$Y_7$	0.58	0.48	0.26	0.77	0.25	0.79	0.59	0.48	0.02	1.00
D	$X_7$	0.43	0.60	0.77	0.30	0.77	0.18	0.44	0.50	1.00	0.00
	$Y_7$	0.59	0.45	0.27	0.75	0.27	0.77	0.53	0.49	0.00	1.00
E	$X_7$	0.61	0.57	0.80	0.21	0.83	0.29	0.46	0.51	1.00	0.17
	$Y_7$	0.41	0.26	0.23	0.53	0.20	0.69	0.29	0.55	0.17	1.00
N	$X_7$	0.43	0.60	0.77	0.30	0.77	0.18	0.44	0.50	1.00	0.00
	$Y_7$	0.59	0.48	0.27	0.75	0.27	0.77	0.53	0.49	0.00	1.00
B	$X_7$	0.61	0.57	0.80	0.21	0.83	0.29	0.46	0.51	1.00	0.17
	$Y_7$	0.41	0.26	0.23	0.53	0.20	0.69	0.29	0.55	0.17	1.00

(Tabla 9)

Casos Analizados		B	N	E	D	A	I
VAO		1	1	1	1	1	1
VCO	Max	0.8034	0.7483	0.7515	0.7487	0.9492	0.8858
	Min	0.2947	0.5498	0.5797	0.5501	0.7322	0.6748

Donde:

V.A.O.: Varianzas asumidas para las observaciones.

V.C.O.: Varianzas calculadas para las observaciones.

(Tabla 10)

#### 4. CONCLUSIONES

1. Se presenta una nueva metodología, que incorpora algunos de los más recientes conceptos técnicos - científicos relacionados a redes de triangulación y que se combina con el uso de la norma  $L_1$ , para efectuar el Post-Análisis de redes de triangulación, cuestión esta que no contemplan otras metodologías usadas al respecto.
2. Se destaca la importancia de los Eigenvalues y Eigenvectors de la matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas, para la determinación de la elipse absoluta de error de los puntos, puesto que ellos consideran las correlaciones existentes entre todos los puntos de la red. Esto no ha sido considerado en nuestro ámbito geodésico nacional para el caso de redes geodésicas.
3. La ventaja de la norma  $L_1$  sobre la norma  $L_2$ , no solo para detectar la magnitud del error grosero en la(s) observación(es), con una aproximación de casi el 90% de su valor, sino también para la localización de las(s) observación(es) que contiene dicho error, se ha demostrado con los casos analizados en el presente trabajo.
4. Se demuestra, con las pruebas realizadas en este trabajo, que la compensación final de la red de triangulación usando la norma  $L_2$  sólo produciría resultados óptimos si previamente se ha realizado un post-análisis de la red.
5. La importancia de la componente principal para detectar la zona débil de la red, la cual es calculada mediante el uso de los Eigenvalues de la matriz de VAR-COV de los parámetros incógnitas.
6. Para arribar a conclusiones más definitivas o generales sobre el comportamiento de la metodología propuesta en este trabajo para el Post-Análisis de redes de triangulación, se recomienda investigar otros tipos de configuraciones geométricas de redes horizontales, no sólo para triangulaciones, sino también trilateraciones y triangulateraciones.

#### BIBLIOGRAFIA

- 1) VANICEK PETR (1980): "Introduction to Adjustment Calculus". (Third corrected edition). Department of Surveying Engineering. University of New Brunswick. Fredericton. N.B. Canada. Lectures Notes N° 35. February, 1980.
- 2) KRAKIWSKY EDWARD J. y GRACIE GORDON (1983): "The need for Adjustment and Analysis". Paper for the C.I.S. Adjustment and Analysis Seminars. Canada. Edited by Edward J. Krakiwsky. July, 1983.
- 3) BAARDA W. (1979): "Measures for the accuracy of Geodetic Networks". Optimization of Design and Computation of Control Networks. Edited by: F. Halmos and J. Somogyi Akadémiai Kiadó. Budapest. Hungary, 1979.
- 4) DE HEUS HENK (1982): "Quality Related Problems of Densification Networks". Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the International Association of Geodesy. Munich, August 31 to September 5, 1981. Volume III. Optimal Design of Geodetic Networks. Edited by Rodolf Sigl. (\*\*)
- 5) DE HEUS HENK Y OTROS AUTORES (1982): "The Delft Approach for the design and Computation of Geodetic Networks". The staff of the Geodetic Computing Centre Delft University of Technology Thijssseweg 11. Delft. The Netherlands. Publicación Especial de Celebración de los 65 años de vida del Prof. Willem Baarda y su jubilación. Delft. Holanda.
- 6) GRUN A. (1982): "The Accuracy Potential of the Modern Bundle Block Adjustment in Aerial Photogrammetry". Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. American Society of Photogrammetry. Volume XLVIII. January 1982. N° 1.
- 7) FÖRSTNER W. (1985): "The Reliability of Block Triangulation". Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. American Society of Photogrammetry. Volume LI, August, N° 8.
- 8) FÖRSTNER W. (1979): "On internal and external Reliability of Photogrammetric Coordinates". Proceedings of the American Society of Photogrammetry. 45th Annual Meeting. Volume I. March 18 March 24. Washington, D.C. U.S.A. 1979.
- 9) GRANT EUGENE L. y LEAVENWORTH RICHARD S. (1981): "Control Estadístico de calidad". Compañía Editorial Continental S.A. México, 1981.
- 10) MIKHAIL EDWARD M. y ACKERMANN FREDERICK (1976): "Observations and Least Squares". Harper Row, Publishers. New York. U.S.A. 1976.
- 11) MIKHAIL EDWARD M. y GRACIE GORDON (1981): "Analysis and Adjustment of Survey Measurements". Van Nostrand Reinhold Company. New York. U.S.A. 1981.
- 12) BROTHER AUSTIN BARRY (1978): "Errors in Practical Measurement in Science, Engineering and Technology". Edited by: M.D. Morris, John Wiley Sons. Inc. New York. U.S.A. 1978.

- 13) MARCANO L. ADONIS L. (1984): "Análisis de una serie de mediciones directas de igual exactitud introduciendo el concepto de control de Calidad en la Ingeniería Geodésica". Trabajo de Ascenso. Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Geodésica. Maracaibo. Edo. Zulia, Venezuela.
- 14) MARCANO L. ADONIS L. (1985): "Una introducción a las modalidades y niveles del cálculo de Compensación". Trabajo de Ascenso. Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Geodésica. Maracaibo. Edo. Zulia, Venezuela.
- 15) NIEMEIER WOLFGANG (1982): "Principal Component Analysis and Geodetic Networks - Some basic Considerations". (\*\*).
- 16) KAVOURAS M. (1982): "On the detection of outliers and the determination of reliability in Geodetic Networks". Technical report N° 87. Department of surveying Engineering. University of New Brunswick. Canada.
- 17) BARBARELLA M. and UNGUENDOLI M. (1982): "Analysis of some Densification Networks in Italy". (\*\*)
- 18) FUCHS H. (1982): "Adjustment by Minimizing the Sum of Absolute Residuals". (\*\*)

Recibido el 8 de Diciembre de 1987