Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia Vol. 13, No. 1, 1990

F.J. GUEVARA Y L. CUINTERO División de Postgrado Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia Maracaibo, Venezuela

## RESUMEN

Se ha desarrollado un modelo de simulación numérica tridimensional y bifásico para simular el flujo de petróleo y agua en un yacimiento naturalmente fracturado, en base a las ecucaciones presentadas por Kazerni y col. Se supone flujo semi-contínuo entre la matriz y la fractura y flujo no contínuo entre las fracturas. Las ecuaciones se resuelven bajo un esquema semi-implícito en potencial y saturación de agua. Para la solución del sistema de ecuaciones resultante se utilizaron, un algoritmo de eliminación para matrices de banda, el método propuesto por Thomas y los métodos Gauss-Seidel, SOR-Linea y S.I.P. El modelo desarrollado fue probado con los datos de dos ejemplos que se presentan en la literatura y los resultados obteridos comparan favorablemente. Se seleccionaron mallas cuadradas y rectangulares con las cuales se corrieron los dos ejemplos, con cada uno de los métolos considerados y una comparación de tiempos de computación se presenta en forma gráfica. De los métodos iterativos, el método S.I.P. produjo los mejores tiempos de computación.

### ABSTRACT

A three-dimensional numerical simulator model based on Kazemi et al's equations has been develope for simulating water and oil flow in naturally fractured reservoirs. Semi-steady state flow between the matriz and the fracture and unsteady state between the fracture are assumed. The corresponding equations for each phase are solved using a semi-implicit finite difference expansion for water potencial and water saturation. The resulting equations system was solved following Gruska and Poliak's reduced bandwidth direct solution (1967. Thomas et al's method, Gauss-Seidel's method, SOR-Block, SOR-Line and Stongly Implicit Procedure (SIP) were also used. Two examples taken from Kazemi et al were followed to test the model. The results obtained were then found to compare favorably with Kazemi's results and all of the above programmed methods.Square and rectangular grids, finer than the ones proposed by Kazemi, were chosen for the examples and the computing time was measured. It was found that SIP method consumed the least computing time of all iterative methods for every grids that was used. Poliak's and Thomas's methods for rectangular grids consumed computing times which are relatively

MODELO SEMI-IMPLICITO DE SIMULACION NUMERICA PARA YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS. TRIDIMENSIONAL BIFASICO (AGUA PETROLEO)

> equivalent to those obtained by using Block and Line methods. For square grids, on the other hand, Block and Line methods consumed computing times fairly shorter than those obtained when Poliak's and Thomas's methods were used.

### INTRODUCCION

En los últimos años hemos visto incrementarse los descubrimientos de nuevos horizontes petrolíferos en yacimientos de rocas Igneas, Metamórficas y Sedimentarias (Calizas y Dolomitas) fracturadas, los cuales se han caracterizado por sus altas presiones y por la existencia de cantidades significativas de hidrocarburos livianos. Este tipo de yacimientos, normalmente conocidos como "Yacimientos de Doble Porosidad", presentan diferencias importantes con respecto a los yacimientos no fracturados o "Yacimientos de Porosidad Simple", por lo cual se hace necesario desarrollar herramientas, entre ellas los modelos de simulación, que permitan evaluarlos para así programar el esquema de explotación más conveniente.

Se ha desarrollado un modelo de simulación numérico, tridimensional y bifásico para simular el flujo de petróleo y agua en yacimientos naturalmente fracturados en base a las ecuaciones presentadas por Kazemi y col<sup>11</sup>. Se supone flujo no contínuo para el movimiento de los fluidos entre las fracturas y flujo semi-contínuo para el intercambio de fluidos entre las fracturas y los bloques de matriz.

Las ecuaciones para el flujo en fracturas y el flujo fractura-matriz se resuelven bajo un esquema semi-implícito en potencial y saturación de agua, utilizando el esquema de linealización propuesto por Nolen y Berry<sup>127</sup>. Para la solución del sistema de ecuaciones resultantes de utilizaron un algoritmo de eliminación para matrices de banda desarrollado por Gruska y Poliak (1967), el método Esquema Reducido propuesto por Thomas<sup>13</sup> y los métodos Gauss-Seidel, SOR-Linea y S.I.P.

El modelo desarrollado fue probado con los datos de dos ejemplos que se presentan en la literatura<sup>(1)</sup>y los resultados obtenidos, con todos los métodos de solución programados, comparan favorablemente con los presentados en la referencia mencionanda.

Además de las malias propuestas<sup>(1)</sup>, se seleccionaron mallas cuadradas y rectangulares, con mayor y menor número de bloques totales. Para todos las mallas utilizadas, el método S.I.P. consumió el menor tiempo de computación con respecto a los demás métodos de solución .

Los métodos de eliminación y Esquema Reducido<sup>(3)</sup>consumieron, para mallas rectangulares, tiempos de computación en el mismo orden de magnitud a los métodos de solución por bloques y por líneas. Para mallas cuadradas, los métodos de solución por bloques y por líneas, mostraron tiempos de computación apreciablemente menores a los métodos de eliminación y Esquema Reducido<sup>(3)</sup>.

## **REVISION DE LITERATURA**

Los primeros trabajos publicados sobre el tema, se orientan hacia el estudio del comportamiento de presión en pozos ubicados en yacimientos naturalmente fracturados. Una solución analítica a la ecuación de difusividad para yacimientos fracturados fue obtenida por Barenblatt y col<sup>44</sup>, quienes introducen el concepto de doble porosidad para este tipo de yacimientos, suponiendo que el flujo interporosidades es del tipo semi-contínuo.

Warren y Root<sup>(5)</sup>desarrollaron un modelo radial ID considerando al yacimiento formado por dos sistemas, uno de fracturas y otro de bloques de matriz. El sistema de bloques de matriz está conformado por paralelepípedos, rodeados por un sistema de planos de fracturas perpendiculares entre sí, constituyendo éste un sistema contínuo a diferencia del primero. A partir del modelo desarrollado, los autores analizan el comportamiento de pozos sometidos a pruebas de restauración de presión.

Kazemi y col<sup>(1)</sup> desarrollan un modelo de simulación numérico semi-implícito, tridimensional y bifásico para yacimientos fracturados extendiendo las ecuaciones presentadas por Warren y Root<sup>(5)</sup>. Suponen que el flujo entre las fracturas y los bloques de matriz se realiza como flujo semi-contínuo.

Rossen<sup>(6)</sup> desarrolla un procedimiento para simular yacimientos fracturados, basado en considerar a los bloques de matriz como fuentes o sumideros, en un modelo de simulación convencional que simula solo el sistema de fracturas.

Thomas y col<sup>(3)</sup> presentan un modelo de simulación numérica, tridimensional y trifásico para yacimientos naturalmente fracturados. Las ecuaciones de flujo en las fracturas y entre fractura-matriz, una extensión a las presentadas por Kazemi<sup>(1)</sup>, son resueltos implícitamente en presión, saturación de agua, saturación de gas y presión de saturación. Proponen un método iterativo que será utilizado en el presente trabajo.

# **CONSIDERACIONES TEORICAS**

Una idealización de un yacimiento naturalmente fracturado, de la forma concebida por Warren y Root<sup>(5)</sup>, se presenta en la Figura I, en la cual se considera al yacimiento formado por una serie de bloques parlelepípedos que representan la matriz y separados por planos perpendiculares entre sí, que constituyen las fracturas. Esta forma de concebir los yacimientos de doble porosidad, supone que los fluidos se desplazan a través de las fracturas y de los bloques de matriz hacia las fracturas. Los fluidos llegan a los pozos a través de las fracturas únicamente. El intercambio de fluidos, entre los dos medios, se efectúa bajo la forma de flujo semi-contínuo.

En el desarrollo de las ecuaciones se parte de un elemento de volumen y suponiendo la validez de la ley de Darcy, un balance de masa proporcionará las ecuaciones que describen el comportamiento de los fluidos, en un sistema de doble porosidad. Para el caso de que ocurra flujo de dos fases (agua-petróleo), el flujo en las fracturas estará representado por la siguiente ecuación<sup>(1)</sup>:

∇.[λαf.ρα -ψαma) +	$(\nabla, \psi \alpha f - 1/144. \nabla, Df))$ - Tama(Sama). pa. ( $\psi \alpha f$	f
	$a\alpha.\delta(X-Xo) = 1/5.6145 \ \partial(\phi f.S\alpha f/B\alpha)/\partial t$	1

y el flujo matriz-fractura por :

 $T\alpha ma(S\alpha ma).\rho\alpha.(\psi\alpha f - \psi\alpha ma) =$ 

 $1/5.6145 \partial (\phi ma.S\alpha ma/B\alpha ma)/\partial t$  (2)

donde  $\alpha$  es un indicador de fase y

 $\lambda \alpha = 0.0011271 (K.Kr \alpha / \mu \alpha.B \alpha) f$ (3)

 $T\alpha ma = 0.0011271 Kma. \sigma. (Kr \alpha / \mu \alpha. B\alpha) ma$  (4)

 $\psi \alpha = \int_{pq}^{p} 1/\rho(p\alpha).dp\alpha$ 

Las ecuaciones (1) y (2) contienen las porosidades de la fractura y los bloques de matriz, las cuales son expresadas con respecto al volumen total de una unidad de roca. La permeabilidad efectiva de la fractura es definida como:

 $Kf = \phi f / (\phi f + \phi ma) * K abs.$ 

Warren y Root<sup>(5)</sup>definieron para " $\sigma$ ", la siguiente expresión :

- 10 -

conde N es el número de direcciones normales de fractura (1.2 ó 3) y L las dimensiones de los bloques ce matriz.

Después de desarrollar los términos de acumulación, hacer uso de la ecuación (5) y aplicar la cefición de potenciales para cada fase, las ecuaciones (1) y (2) pueden expresarse, para el flujo en las fracturas como :

 $\nabla .[\lambda \alpha f. \nabla, \Phi \alpha f]$  - Toma(Sama).( $\Phi \alpha f - \Phi \alpha ma$ ) + qa. $\delta(X-X_0)$ 

=  $1/5.6145 (S\alpha f/B\alpha . [cf. \phi f + c\alpha . \phi f ] . 1/(1-D. p\alpha . c\alpha / 144) f$ 

 $.\partial \Phi \alpha f / \partial t + \phi f / B \alpha . \partial S \alpha f / \partial t$  (6)

#### y para el flujo matriz-fractura:

 $T\alpha ma(S\alpha ma).(\phi \alpha f - \phi \alpha ma) = 1/5.6145 (S\alpha ma/B\alpha.(cma.\phi ma))$ 

+ cα.φma} .1/ (1-D.ρα.cα/144)ma.
(7)

 $\partial \Phi \alpha ma / \partial t + \phi ma / B\alpha . \partial S \alpha ma / \partial t$ 

Las Transmisibilidades y las propiedades PV1 se evaluan corriente arriba.

Las ecuaciones (6) y (7) representan el novimiento de fluidos en yacimientos naturalmente fracturados, y por su caracter de ecuaciones en derivadas parciales no-lineales, no pueden ser resueltas por métodos analíticos. La técnica numérica seleccionada, para la resolución de las ecuaciones en cuestión, está basada en un esquema semi-implícito utilizando el método propuesto por Nolen y Berry<sup>(2)</sup>. La expansión de estas ecuaciones por medio de diferencias finitas conducirán a las expresiones utilizadas en nuestro simulador.

# METODOS DE SOLUCION

Con el objeto de comparar tiempos de computación y estudiar la posibilidad de correr el modelo desarrollado en computadoras personales, se probaron seis métodos de solución. Estos métodos se describen a continuación.

Se utilizó un método de solución directo conformado por un algoritmo de eliminación para matrices de banda, desarrollado por Gruska y Poliak (1967). La aplicación de las ecuaciones (6) y (7), para cada fase y en cada bloque de malla, genera un sistema de 4.NX.NY.NZ ecuaciones, cuya matriz de coeficientes es de la forma de banda.

Se programó el método iterativo propuesto por Thomas<sup>3</sup>, que consiste en escribir las ecuaciones de flujo en las fracturas en función de las incógnitas correspondientes a los bloques de matriz, a la aproximación m. Esta sustitución genera un sistema de 2.NX.NY.NZ ecuaciones con igual número de incógnitas, el cual se resolvió por el método de eliminación mencionado. A continuación las soluciones para las fracturas, a la aproximación m+1, son sustituídas en las ecuaciones de flujo matriz-fractura, lo cual genera un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas para cada bloque de malla y cuya solución permite encontrar las incógnitas de la matriz a la aproximación m+1, completándose una iteración.

El método Gauss-Seidel se programó para la solución de las ecuaciones correspondientes a cada bloque de malla y se utilizó también, para el cálculo del radio espectral y el factor de relajación en los métodos SOR-Punto y SOR-Línea.

El método SOR-Punto se programó utilizando el factor de relajación obtenido del método Gaus-Seidel. Cada paso de tiempo con este método se inició con 6 iteraciones con el método Gauss-Seidel.

El método SOR-Linea se programó para obtener la solución de las ecuaciones de los bloques a lo largo de las líneas X ó Y ó Z, en forma progresiva o regresiva. Para el barrido de los bloques en la dirección x, la aplicación de las ecuaciones para yacimientos fracturados y flujos de agua y petróleo generarán un sistema de  $4^{\circ}NX$  ecuaciones con igual número de incógnitas. La matriz de estos sistemas son del tipo de banda (pentadiagonales). El cálculo del factor de relajación se efectúa a través del método Gauss-Seidel.

El algoritmo S.I.P. se aplicó a las 4 ecuaciones características y se obtuvieron las expresiones algebráicas para cada uno de los elementos, los cuales tienen la forma de matrices de 4 filas y 4 columnas y, en el caso de los vectores, 4 filas y una columna.

## PRUEBA DEL SIMULADOR-COMPARACION DE METODOS DE SOLUCION

Con el objeto de probar el modelo de simulación desarrollado, se realizaron varias corridas, tratando de reproducir los resultados presentados por Kazemi y col<sup>11</sup>para los dos ejemplos que dichos autores califican de conceptuales: un cuadrante de un arregio de 5 pozos y un yacimiento inclinado con 5 pozos productores e intrusión de agua en la parte baja de la estructura.

Las corridas fueron realizadas hasta alcanzar los 1200 días de simulación, para el primer ejemplo y 1400 días para el segundo ejemplo, teniendo al computador HP-1000 disponible en forma absoluta, para cada una de dichas corridas. Así los tiempos medidos corresponden a tiempo real y pueden ser utilizados para efectos de comparación.

# CUADRANTE DE UN ARREGLO DE 5 POZOS

Con este elemplo se describe el comportamiento de un cuadrante de un arregio de 5 pozos, con un pozo inyector y un pozo productor, en los extremos de la diagonal de un cuadrado de 600 pies de lado (Tabla I).

Con los datos presentados por Kazemi y col<sup>(1)</sup>se efectuaron corridas con cada uno de los métodos de solución. En la Figura 2 se presenta el comportamiento de la relación agua-petróleo contra tiempo presentado por los autores mencionados y el obtenido con los métodos de solución utilizados. El ajuste puede considerarse satisfactorio.

Se efectuaron corridas utilizando dos malias cuadradas uniformes (4x4x1 y 12x12x1) adicionales a la indicada en la Tabia 1 y 3 mallas rectangulares de 8x4x1, 16x4x1 y 36x4x1 bloques.

La Figura 3 muestra el tiempo de computación consumido por los métodos utilizados, en función del número de bloques de malla. Se observa que los métodos de eliminación y Esquema Reducido muestran diferencias de tiempo de computación apreciables dependiendo si son utilizados en mallas cuadradas, 477.85 min. y 428.80 min respectivamente, o rectangulares, 120.46 min y 148.61 min respectivamente, con el mismo número de bloques (144). El tiempo de computación, en estos métodos, es función del número de ecuaciones y del ancho de banda de la matriz de los coeficientes. Para las mallas rectangulares el ancho de banda es idéntico y el tiempo de computación aumenta unicamente con el número de ecuaciones, lo cual explica los menores tiempos de computación consumidos en comparación a los obtenidos con mallas cuadradas.

El método S.I.P. muestra los menores tiempos de computación para mallas cuadradas (122.29 min, 144 bloques), y en mallas rectangulares (178.23 min, 144 bloques), es superado (menores tiempos) solo por los métodos de eliminación (120.46 min, 144 bloques) y Esquema Reducido (148.61 min, 144 bloques),

## **EJEMPLO DE UN YACIMIENTO CON 5 POZOS PRODUCTORES CON INTRUSION DE AGUA**

Con los datos presentados por Kazemi y  $col^{(1)}$ , para este ejemplo (Tabla 2), se efectuaron corridas con cada uno de los métodos de solución utilizados en este trabajo. La Figura 4 muestra el comportamiento de la relación agua-petróleo en función del tiempo y como se puede apreciar, la comparación de los resultados obtenidos con los métodos estudiados y los presentados por Kazemi y col<sup>11</sup>, pueden considerarse satisfactorios.

En forma similar a lo realizado para el ejemplo anterior, se seleccionaron tres mallas adicionales a la presentada en la Tabla 2, con las configuraciones siguientes: 17x5x1, 21x5x1 y 25x5x1. La figura 5 muestra un gráfico del tiempo de computación en función del número de bloques, y se observa, para todos los métodos, una tendencia de crecimiento lineal con el aumento del número de bloques. Este comportamiento resulta natural para los métodos de solución por bloques donde el tiempo de computación aumenta con el número de bloques.

Para el método de eliminación y el Esquema Reducido, la matriz de los coeficientes, para las mallas seleccionadas, presentan un ancho de banda que es función de NY y NZ, los cuales se han mantenido constante en las 4 mallas. Entonces, el incremento del tiempo de computación es consecuencia, unicamente, del aumento del número de ecuaciones. El método S.I.P. consumió 56.76 min (125 bloques) siendo el menor tlempo de computación en relación con los demás métodos de solución.

#### CONCLUSIONES

1) Un modelo de simulación numérica en tres dimensiones ha sido desarrollado para simular el flujo de agua y petróleo en yacimientos naturalmente fracturados, utilizando como métodos de solución, un algoritmo de eliminación para matrices de banda, el método Esquema Reducido, Gauss-Seidel, SOR-Linea y S.L.P

2) De los métodos iterativos considerados en el presente trabajo, el método S.I.P. requirió los menores tiempos de computación.

3)Los métodos de eliminación y Esquema Reducido mostraron tiempos de computación en un orden de magnitud similar a los métodos de solución de bloques, en mallas rectangulares.

4) Los métodos de solución por bloques y por líneas consumieron menostiempode computación en relación a los métodos de eliminación y Esquema Reducido, en mallas cuadradas.

# NOMENCLATURA

B:Factor Volumétrico del Petróleo, BY/BN.

: Compresibilidad, 1/1pc. C

Ð : Profundidad a partir del Datum (+hacia abajo), Pies.

- ĸ : Permeabilidad Absoluta, mD.
- Kr : Permeabilidad Relativa, Adim.
- L. : Dimensión de Bloques de Matriz, Pies. N
  - : Número de Bloques de Malla.
- P : Presión, Lpc.
- q : Tasa de Producción/Inyección, BN/Días.
- : Saturación de la Fase a, Fracción. Sa

t : Tiempo, Días. Tæma : Transmisibilidad de la Fase  $\alpha$  en los Bloques de Matriz, md/cps/pie<sup>2</sup>/(BY/BN).



Fig. 1 - Idealización de un medio porozo noturolmente fracturado, según Warren y Root





Pig 3 - Tiempo de computación contra número de blaques. Ejemplo de un cuadrante de un arregio de 5 pazos



- 13 -Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 13, No. 1, 1990

- : Volumen Total de un Bloque de Malla, Pies<sup>3</sup>. Vt Хо : Coordenada de Pozo. δ(X-Xo): Función Delta-Dirac, I para X=Xo, O para otro. : Indicador de Fase. α : Variación del Potencial entre n y n+1, Lpc. Δté **∆tS** : Variación de la Saturación entre ny n+1, Frace. : Viscosidad, caps. μ : Densidad, Lbm/pies<sup>3</sup>, ρ
- $\sigma$  : Factor de Forma que refleja la Geometría de los Bloques de Matriz, Pies<sup>2</sup>.
- $\phi$  : Porosidad (frac. del vol. total de roca) Fracción.
  - : Definida por la Ecuación (5).
- : Potencial, Lpc.
- $\lambda \alpha$  : Movilidad de la fase  $\alpha$ , mD/cps/(BY/BN).

## SUB-INDICES

- c : capilar.
- f : fractura.

- i, j, k : indicador de bloque de malla.
- ma : matriz.
- nw : fase no humectante.
- o : petróleo.
- w : fase humectante.

# SUPRA-INDICES

m : iteración anterior.

- m+1 : nueva iteración.
  - : derivada.

# **OPERADORES**

- V. : Divergencia de un vector.
- Δ : Gradiente de una función escalar,
- Δx,y,z : Diferencia central en la dirección r,z.
- Δt : Diferencia Regresiva en tiempo.
- δV : Variación de la variable "V" entre dos pasos de tiempo consecutivos.

Fi = 3959.89 lpc. h = 30.00 pies. Malla utilizada 8 x 8 x 1 0.08 pies-2 cma = 3.0 10-6 1/1pc. 10.3 10-6 1/1pc. 3.03 10-6 1/1pc. a cf co = CW = 2.00 cps. = 0.50 cps. μο LIN = 0.50 cps. = 52.00 lbm/pies3 = 64.00 lbm/pies3 = 1.0 a P = 0.0 lpc., Bw = 0.976 a P = 8000 lpc. = 1.0 a P = 0.0 lpc., Bo = 0.920 a P = 8000 lpc. po PW Bw Bo = 210 BN/dia. = - 200 BN/dia. qo QW TABLA 1. Datos de las propiedades del yacimiento y de los fluidos para el ejemplo de un cuadrante de un arreglo de 5 pózos.( Kazemi y col(3)). Pi 3983.75 lpc. Pi = 3983.75 lpc. h = 90.00 pies. Malla utilizada 13 x 5 x 1  $\Delta X = \Delta Y = 500$  pies.  $\phi f = 0.01$  fraction.  $\phi ma = 0.20$  fraction. Kf = 1000 mD. (efectiva) Kma = 1.00 mD.  $\sigma = 0.000B$  pies-2 cf = cma = 3.0 10-6 1/1pc. co = 10.3 10-6 1/1pc. cw = 3.03 10-6 1/1pc.  $\mu \omega = 2.00$  cps. 0.50 cps. LIW 52.00 lbm/pies3 64.00 lbm/pies3 po -= 64.00 lbm/pies3 = 1.0 a P = 0.0 lpc., Bw = 0.976 a P = 8000 lpc. = 1.0 a P = 0.0 lpc., Bo = 0.920 a P = 8000 lpc. = 1000 BN/dia.(por pozo) = - 2800 BN/dia. DW BW Bo qo aw

TABLA Z. Datos de las propiedades del vacimiento y de los fluidos para el ejemplo de un vacimiento fracturado con 5 pozos productores e intrusión de agua ( Kazemi y col(3)).

### - 14 -

I) KAZEMI, H.; MERRIL, L.S.; PORTERFIELD, K.L.; ZEMAN, P.R.: "Numerical Simulation of Water-oil Flow in Naturally Fractured Reservoirs". SPEJ. (Diciembre 1976) pp 317-326.

2) NOLEN, J.S.; BERRY, D.W.: "Test of Stability and Time-Step Sensitivity of Semi-Implicit Reservoir Simulation Techniques". SPEJ. (Junio 1972). pp 2:33-256.

3) THOMAS, L.K.; DIXON, T.N.; PIERSON, R.G.: "Fractured Reservoir Simulation". SPEJ. (Diciembre 1969) pp 451-452. 4) BARENBLATT, G.I.; ZHELTOV, U.P.; KOCHINA, G.H.: "Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks". Prikladnaia Matematika i Mehanika, Academia Nauk, U.R.R.S. (1960), Vol. 24, No. 5, pp 852-864.

5) WARREN, J.E.; ROOT, P.J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs". SPEJ. (Septiembre 1963) pp 245-255.

6) ROSSEN, R.H.: "Simulation of Naturally Fractured Reservoirs with Semi-Implicit Source Terms". SPEJ. (Junio 1977) pp 201-210.

> Recibido el 12 de Julio de 1988 En forma revisada el 21 de Mayo de 1990

Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 13, No. 1, 1990

- 16 -