Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 13, No. 1, 1990

APLICACIONES DEL CALCULO FRACCIONAL PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES

J.A. GUERRA y S.L. KALLA
Departamento de Matemáticas
Ciclo Básico
División de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia

RESUMEN

En el presente trabjo se define el diferintegral de orden fraccional, el cual generaliza la definición natural de derivada e integral de una función, esto se hace utilizando la definición de Holmgren-Bassam. Luego se da la definición de forma operacional y su equivalencia con las ecuaciones difero-integrales y ecuaciones diferenciales. El objetivo principal de este trabajo es resolver ecuaciones difero-integrales y ecuaciones diferenciales en intervalos que no contengan puntos singulares de dicha ecuación, esto se hace demostrando dos teoremas, los cuales vinculan una ecuación difero-integral o diferencial con su forma operacional, y se hallan las soluciones usando el cálculo fraccional.

ABSTRACT

Is this work the differintegral of arbitrary order which generalizes the natural definition of derivative and integral of a function is defined, this has been done using the Holmgren-Bassam concept. Further we define the operational form of differential and integro-differential equations. We establish the equivalence between the differential equations and their operational forms. The main purpose of this paper is to solve differintegral and differential equations (within intervals which do not contain singular points of these equations). The solution is obtained using the method of fractional calculus.

1. INTRODUCCION

Los operadores de integración y derivación fraccional juegan un papel muy importante en el análisis aplicado para resolver muchos problemas de ingeniería, ecuaciones difero-integrales, problemas de física-matemática, etc. Nosotros definimos el diferintegral de orden fraccional, el cual generaliza la definición natural de derivada e integral de una función y la utilizamos para resolver ecuaciones difero-integrales y diferenciales en intervalos que no contengan puntos singulares regulares de dicha ecuación.

2. DEFINICIONES

(i) Definición del conjunto S.

Dado $\alpha \in R$, definimos el conjunto unitario :

$S = \{ m \in N \ / \ m$ es el menor entero positivo tal que $\alpha + m > 0 \}$

(ii) Definición de Holmgren-Bassam

Dado un número $\alpha \in R$, $m \in S$ tal que $\alpha + m > 0$, f una función real sobre el intervalo $a \le x \le b$. Si $f \in C^{(n)}$, donde n es el entero positivo más pequeño que cumple: $n+1 \ge m$, definimos: [1]

$$ {}_{a}^{x}I^{-\alpha} \{ f(x) \} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} D_x^m \int_a^x (x-t)^{\alpha+m-1} f(t)\, dt \qquad (2.1)$$

La convergencia de la integral anterior está garantizada por el hecho de que $\alpha + m \ \ 0$ [2].

(iii) Definición de Forma Operacional

Llamaremos FORMA OPERACIONAL (F.O.) a la siguiente ecuación:

$$ {}_{a}^{x}I^{w} P_1(x)\, {}_{a}^{x}I^{1} P_2(x)\, {}_{a}^{x}I^{-(w-n+1)} y(x) = f(x) \qquad (2.2)$$

donde y(x) es la función incógnita y debe pertenecer a

$C^{(o)}$, $P_1(x)$, $P_2(x) \in C^{(\infty)}$, $w \in R$ con $a \le x \le b$.

Esta F.O. puede representar una ecuación diferencial o difero-integral, dependiendo de los valores de w y de n.

(iv) Definición de Equivalencia entre una Ecuación Difero-Integral ó Diferencial con una Forma Operacional.

Una ecuación diferencial o difero-integral o integral se dice equivalente a una F.O. si la primera es un desarrollo de la segunda.

3. TEOREMA UNO

Equivalencia entre una Forma Operacional y una Ecuación Difero-Integral y sus soluciones.

TEOREMA 1.-

$$\text{Si } \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w}\left\{ f(x)\, e^{-\lambda x} \right\} \text{ existe, entonces :}$$

La ecuación difero-integral :

$$(h+bx)(c+dx)z'' + (A_1x^2 + B_1x + C_1)\, z' + (A_2x^2 + B_2x + C_2)z$$

$$+ A_3e^{-\lambda x} \int_a^x e^{\lambda t}\, z(t)\, dt = f(x) \qquad (3.1)$$

es equivalente a:

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w}\, (h+bx)^{1-p}\, (c+dx)^{1-q}\, e^{-\nu x}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{1}\, (h+bx)^{p}\, (c+dx)^{q}$$

$$e^{\nu x}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)}{}_{y=f(x)e^{\lambda x}} \qquad (3.2)$$

con $y = e^{\lambda x} z(x)$

donde h, b, c, d, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, p, q, w, ν y λ sonnúmeros reales tales que : b y d no son ambos ceros y w > o si y solo si :

$$A_1 = bd\,(\nu + 2\lambda) \qquad (3.3)$$

$$B_1 = bd\,(U + V) + \nu S + 2\lambda S \qquad (3.4)$$

$$C_1 = bcU + hdV + \nu hc + 2\lambda hc \qquad (3.5)$$

$$A_2 = \lambda bd\,(\nu + \lambda) \qquad (3.6)$$

$$B_2 = \lambda(bd(U+V) + \lambda S + \nu S)\ )\ 2\nu wbd \qquad (3.7)$$

$$C_2 = \lambda(bcU + hdV + \lambda hc + \nu hc) + \nu wS + wbd$$

$$(U + V - w - 1) \qquad (3.8)$$

$$A_3 = \nu w(w-1)bd \qquad (3.9)$$

$$\text{con } S = bc + hd\ ,\ U = w+p\ ,\ V = w+q \qquad (3.9a)$$

de donde tenemos:

$$bd\lambda^2 - \lambda A_1 + A_2 = 0 \qquad (3.10)$$

$$bdw^2\ (bd - B_1 + 2\lambda S)\ w + (C_2 - \lambda C_1 + \lambda^2 hc) = 0 \qquad (3.11)$$

$$B_2 = \lambda B_1 - \lambda^2 S + 2\nu wbd \qquad (3.12)$$

donde λ y w son las raíces de (3.10) y (3.11) respectivamente y ν lo obtenemos de (3.3). La ecuación (3.11) se llama Ecuación Indicial.

Además la solución de (3.1) viene dada por:

$$z = z_1(x) + z_2(x) + z_p(x)$$

donde $z_1(x)$ y $z_2(x)$ son soluciones de la ecuación difero-integral homogénea asociada a (3.1) y z (x) es una solución particular de (3.1) con:

$$z_1(x) = K.e^{-\lambda x}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)}\, e^{-\nu x}\, (h + bx)^{-p}\, (c + dx)^{-q} \qquad (3.13)$$

$$z_2(x) = e^{-\lambda x}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)} e^{-\nu x}\, (h+ bx)^{-p}\, (c + dx)^{-q}$$

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1}\, e^{\nu x}\, (h + bx)^{p-1}\, (c + dx)^{q-1}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w}\, (0) \qquad (3.14)$$

$$z_p(x) = e^{-\lambda x}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)}\, e^{-\nu x}\, (h + bx)^{-p}\, (c + dx)^{-q}\ .$$

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1}\, e^{\nu x}\, (h + bx)^{p-1}\, (c + dx)^{q-1}\, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w}\, (\ f(x)\, e^{\lambda x} \qquad (3.15)$$

Demostración :

i) $\Rightarrow$)

Desarrollando (3.2) tenemos:

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx)^{1-p} (c + dx)^{1-q} e^{-\nu x} \Big[pb\,(h + bx)^{p-1} (c + dx)^{q} e^{\nu x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y + qd\,(c + dx)^{q-1} (h + bx)^{p} e^{\nu x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y + \nu e^{\nu x} (h + bx)^{p} (c + dx)^{q} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y + (h + bx)^{p} (c + dx)^{q} e^{\nu x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-2)} y \Big] = f(x)e^{\lambda x}$$

Luego:

$$pb \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (c + dx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y + qd \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y + \nu \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx) (c + dx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y + \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx) (c + dx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-2)} y = f(x)e^{\lambda x} \tag{3.16}$$

pero sabemos que aplicando la regla de Leibnitz [7], podemos concluir:

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (c + dx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y = (c + dx)\, y' + (wd) y \tag{3.17}$$

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y = (h + bx) y' + (wb) y \tag{3.18}$$

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx) (c + dx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y = (h + bx) (c + dx)\, y' + wb(c + dx) y + wd(h + bx) y + w(w-1)bd \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1} y \tag{3.19}$$

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h + bx) (c + dx) \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-2)} y = (h + bx) (c + dx) y'' + w(2bdx + hd + bc) y' + w(w-1) (bd)\, y \tag{3.20}$$

sustituyendo (3.17), (3.18), (3.19) y (3.20) en (3.16), agrupando y ordenando tenemos:

$$(h + bx) (c + dx) y'' \; [\nu bdx^{2} + (bd(p + w + q + w) + \nu(bc + hd))\, x + (bc(p + w) + hd\,(q + w) + \nu hc)] y' + [2\nu wbdx + \nu w(bc + hd) + wbd(p + w + q + w - w - 1)] y + [\nu w(w - 1)bd \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1} y] = f(x)e^{\lambda x} \tag{3.21}$$

como $y = e^{\lambda x} z(x)$, hallando las derivadas, agrupando y usando las expresiones para S, U, V ya definidas tenemos:

$$(h + bx) (c + dx) z'' + [bd(\nu + 2\lambda)\, x^{2} + (bd(U + V) + \nu S + 2\lambda S) x + (bcU + hdV + \nu hc + 2\lambda hc)] z' + [\lambda bd(\lambda + \nu) x^{2} + (\lambda(bd(U + V) + \lambda S + \nu S) + 2\nu wbd) x + \lambda(bcU + hdV + \lambda hc + \nu hc) + \nu wS + wbd(U + V - w\ 1)]\, z + \nu w(w-1)bde^{-\lambda x} \int_{a}^{x} e^{\lambda t} z(t)dt = f(x) \tag{3.22}$$

como por hipótesis (3.22) es igual a (3.1), tenemos lo que se quiere demostrar. Ver detalles en [9].

ii) $\Leftarrow$) trivial

Se desarrolla la Forma Operacional (3.2) hasta llegar a (3.22), aplicando la hipótesis se concluye que: (3.22) es igual a (3.1).

La ecuación homogénea asociada a (3.2) es:

$$\underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{w} (h + bx)^{1-p} (c + dx)^{1-q} e^{-\nu x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{1} (h + bx)^{p} (c + dx)^{q}$$

$$e^{\nu x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-(w-1)} e^{\lambda x} z = 0 \qquad (3.23)$$

aplicando operadores inversos:

$$\underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{1} (h + bx)^{p} (c + dx)^{q} e^{\nu x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-(w-1)} e^{\lambda x} z =$$

$$e^{\nu x}(h + bx)^{p-1} (c + dx)^{q-1} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-w}(0)$$

luego:

$$z = K.e^{-\lambda x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{w-1} e^{-\nu x} (h + bx)^{-p} (c + dx)^{-q} +$$

$$+ e^{-\lambda x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{w-1} e^{-\nu x} (h + bx)^{-p} (c + dx)^{-q} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-1}$$

$$e^{\nu x}(h + bx)^{p-1}(c + dx)^{q-1} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-w}(0) \qquad (3.24)$$

Es claro que (3.24) es una combinación lineal de dos soluciones particulares:

$$z_1(x) = K e^{-\lambda x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{w-1} e^{-\nu x} (h + bx)^{-p}(dx)^{-q} \qquad (3.25)$$

$$z_2(x) = e^{-\lambda x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{w-1} e^{-\nu x} (h + bx)^{-p} (c + dx)^{-q}.$$

$$\underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-1} e^{\nu x} (h + bx)^{p-1} (c + dx)^{q-1} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-w} (0) \qquad (3.26)$$

cada una de las cuales se puede demostrar fácilmente que satisfacen (3.23), y en consecuencia a la ecuación difero-integral homogénea asociaa a (3.1).

De la misma forma que en el caso anterior, aplicando operadores inversos a (3.2) obtenemos:

$$z_p(x) = e^{-\lambda x} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{w-1} e^{-\nu x} (h + bx)^{-p} (c + dx)^{-q}$$

$$\underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-1} e^{\nu x} (h + bx)^{p-1} (c + dx)^{q-1} \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-w} (f(x)e^{\lambda x})$$

luego la solución de (3.1) viene dada por:

$$z = z_1(x) + z_2(x) + z_p(x)$$

CASOS PARTICULARES DEL TEOREMA 1

a) Si $bd \neq 0$, h y c no son ambos ceros, $\nu = 0$ y $f(x) = 0$, el Teorema 1 reduce a uno de los resultados dados por M.A. AL-BASSAM, en el Congreso Internacional de Cálculo Fraccional [6].

b) Si $d = 0$, $c = 1$ y $f(x) = 0$, el teorema 1 reduce a otro de los resultados presentados por M.A. AL-BASSAM, en el Congreso Internaiconal de Cálculo Fraccional [6].

c) Si $h = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$, $C_1 = \gamma$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$

$B_- = -(\alpha + \beta + 1)$, $C_- = -\alpha\beta$, $A_- = 0$, $B_- = 0$, $f(x) = 0$

y además $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tenemos:

La ecuación diferencial hipergeométrica

$$x(1 - x)z'' + (\gamma-(\alpha + \beta + 1)x)z' - \alpha\beta z = 0 \qquad (3.27)$$

de (3.10) resulta que $\lambda = 0$ y de (3.3) nos queda $\nu=0$, utilizándola ecuación indicial (3.11) tenemos:

$$w^2 - (\alpha + \beta)w + \alpha\beta = 0 \qquad (3.28)$$

por lo tanto:

$$w_1 = \alpha, \quad w_2 = \beta$$

Sustituyendo en (3.4), (3.5) y usando (3.9a) para w_1 y w_2 respectivamente nos queda:

$$\begin{cases} w_1 = \alpha \\ P = \gamma - \alpha \\ q = \beta - \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} w_2 = \beta \\ P = \gamma - \beta \\ q = \alpha - \gamma + 1 \end{cases}$$

Para $w_1 = \alpha$ utilizando (3.13) y (3.14) las soluciones de (3.27) son:

$$z_1 = K \, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} \, x^{\alpha-\gamma} \, (1-x)^{\gamma-\beta-1}$$

$$z_2 = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-1} x^{\gamma-\alpha-1} \, (1-x)^{\beta-\gamma} \, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} \, (0)$$

por lo tanto:

$$z_1 = K \, x^{1-\gamma} \; {}_2F_1(\alpha-\gamma+1 \, , \, \beta+1-\gamma ; \, 2-\gamma : \, x) \qquad |x| < 1$$

$$z_2 = K_1 \; {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma : x) \qquad |x| < 1$$

donde K, K_1 son constantes reales, z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación diferencial hipergeométrica [8].

Las soluciones z_1 y z_2 son linealmente independientes, por lo tanto forman una base del espacio solución de (3.27). Para $w_2 = \beta$, $p = \gamma - \beta$ y $q = \alpha - \gamma + 1$ son las mismas soluciones, sabiendo que:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma : x) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma : x)$$

4. TEOREMA DOS

Equivalencia entre una Forma Operacional y una Ecuación Diferencial y sus soluciones

TEOREMA 2.-

Si $\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-w} \left\{ (h+bx)^{\alpha} e^{\lambda x} \, f(x) \right\}$ existe, entonces:

La ecuación diferencial:

$$(h+bx)z'' + [B_1 x + C_1]z' +$$

$$[B_2 x + C_2 + B_3 (h+bx)^{-1}]z = f(x) \qquad (4.1)$$

es equivalente a:

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{w} (h+bx)^{1-p} \, e^{-\nu x} \, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{1} (h+bx)^{p} \, e^{\nu x} \, \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-(w-1)} y = f(x) \, (h+bx)^{a} e^{\lambda x}$$

$$(4.2)$$

$$\text{con } y = (h+bx)^{a} e^{\lambda x} \, z(x)$$

donde: h, b, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, w, p, ν, α y λ son números reales tales que: $b \neq 0$ y $w > 0$

si y solo si:

$$B_1 = \nu b + 2\lambda b \qquad (4.3)$$

$$C_1 = bp + bw + \nu h + 2\lambda h + 2\alpha b \qquad (4.4)$$

$$B_2 = b\lambda^2 + \lambda \nu b \qquad (4.5)$$

$$C_2 = \alpha b \nu + 2\lambda \alpha b + \lambda^2 h + \lambda p b + \lambda b w + \lambda \nu h + \nu w b \qquad (4.6)$$

$$B_3 = \alpha b^2 (\alpha - 1 + p + w) \qquad (4.7)$$

de donde tenemos:

$$b\lambda^2 - \lambda B_1 + B_2 = 0 \qquad (4.8)$$

$$b^2 \alpha^2 - (bC_1 - b\nu h - 2\lambda b h - b^2)\alpha + B_3 = 0 \qquad (4.9)$$

$$w \nu b = C_2 - \lambda C_1 + \lambda^2 h - \alpha b \nu \qquad (4.10)$$

donde λ y α son las raíces de (4.8) y (4.9) y ν, w, p se obtienende (4.3), (4.10) y (4.4) respectivamente.

Además la solución de (4.1) viene dada por:

$$z = z_1(x) + z_2(x) + z_p(x)$$

donde $z_1(x)$ y $z_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada a (4.1) y $z_p(x)$ es una solución particular de (4.1) con:

$$z_1(x) = k.(h+bx)^{-\alpha} e^{-\lambda x} \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{(w-1)} e^{-\nu x} (h+bx)^{-p} \qquad (4.11)$$

$$z_2(x) = (h+bx)^{-a} e^{-\lambda x} \, {}_{a}I_{x}^{w-1} \, e^{-\nu x}(h+bx)^{-p}$$

$$ {}_{a}I_{x}^{-1} e^{\nu x}(h+bx)^{p-1} \, {}_{a}I_{x}^{-w} \, (0) \qquad (4.12)$$

$$z_p(x) = (h+bx)^{-\alpha} e^{-\lambda x} \, {}_{a}I_{x}^{w-1} \, e^{-\nu x}(h+bx)^{-p}$$

$$ {}_{a}I_{x}^{-1} e^{\nu x}(h+bx)^{p-1} \, {}_{a}I_{x}^{-w} \, (g(x)) \qquad (4.13)$$

donde $g(x) = (h+bx)^{\alpha} e^{\lambda x} f(x)$

Demostración:

i) $\Rightarrow$)

Haciendo $d = 0$, $c = 1$ y sustituyendo $f(x)$ por $f(x)$ $(h+bx)^{\alpha}$ en (3.21) resulta:

$$(h+bx)y'' + (\nu bx + bp + bw + \nu h)y' + \nu wby = g(x) \quad (4.14)$$

como $y = (h+bx)^{a} e^{\lambda x} z(x)$, hallando las derivadas y agrupando tenemos:

$$(h+bx)z'' + [(\nu b + 2\lambda b)\, x + bp + bw + \nu h + 2\lambda h + 2\alpha b]z'$$

$$+ [(b\lambda^2 + \lambda\nu b)x + \alpha b\nu + 2\lambda\alpha b + \lambda^2 h +$$

$$\lambda(pb + bw + \nu h) + \nu wb +$$

$$+ \alpha b^2(\alpha-1 + p + w)\,(h + bx)^{-1}]z = f(x)$$

$$(4.15)$$

como hipótesis (4.15) es igual a (4.1) tenemos lo que se quieredemostrar. Ver detalles en [9].

ii) $\Leftarrow$) trivial

La solución se obtiene de la misma manera que en el Teorema 1.

CASOS PARTICULARES DEL TEOREMA 2

Si $f(x) = 0$, $b = 1$, $h = -b$, $B_1 = -\mu$

$C_1 = \alpha + 2\lambda - \gamma + \mu b + 1$, $B_2 = 0$, $C_2 =$

$\mu\gamma - \mu\lambda$, $B_3 = \lambda(\lambda+\alpha-\gamma)$

reduce a un trabajo presentado por M.A. AL-BASSAM y S.L. KALLA [5].

Las demostraciones más detalladas de todas estas conclusiones se pueden encontrar en [9].

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] AL BASSAM, M.A.: Some properties of Holmgren-Riesz transform. Estrattodagli Annali della Scoula Normals Superiors di Pisa. Sciense Fisiche e Matematiche. Serie III. Vol. XV. Fasc. I-II, 1961.

[2] ROSS, BERTRAM: The Development of the Gamma Function and a Profile of Fractional Calculus. New York University 1974. Chapter V.

[3] AL BASSAM, M.A.: On Laplace's second order linera differencial equations and their equivalent H-R transform equations. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 30, 1967.

[4] AL BASSAM, M.A.: H-R transform equation of Laguerre type. College of Science, University of Baghdad, Baghdad, Iraq. Vol. 9,1966.

[5] AL BASSAM, M.A. AND KALLA, S.L.: On orthogonal polynomials associated with differential equations of Laguerre type. Department of Mathematics. Kuwait University. Kuwait. Serdica, Vol. 15. No. 3, 1989.

[6] McBRIDE, A.C.; ROACH, G.F.: Fractional Calculus University of Strathcclyde. Pitman Advanced Publishing Program. Boston-London-Melbourne. 1985.

[7] OLDHAN, K.; SPANIER, J.: The Fractional Calculus. Academic Press. New York and London, 1974.

[8] RAINVILLE, EARL D.: Special Functions. The MacMillan Company, New York, 1960.

[9] GUERRA, P.; JOSE A.: Aplicación del Cálculo Fraccional para resolver ecuaciones diferenciales. Tesis Magister, Div. Postgrado. Ingeniería. L.U.Z., 1990.

Recibido el 27 de abril de 1990