Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 15 No. 2, 143 - 145, 1992

Una generalización de los polinomios de hermite

Beatríz González y Shyam Kalla
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería,
La Universidad del Zulia, Maracaibo - Zulia

Resumen

Aquí presentamos una generalización de los polimonios de Hermite H_n (x), la cual definimos en términos de la función Hipergeométrica Confluente Φ. Deducimos su expresión en serie, su relación con los polinomios generalizados de Laguerre L_n^{α} (x) y demostramos su propiedad de ortogonalidad en $(-\infty, \infty)$. Además obtenemos una función generadora, una ecuación diferencial y una relación de recurrencia.

Palabras Claves: Polinomios ortogonales, Polinomios de Hermite Función Hipergeométrica, Función generadora.

A generalization of the hermite polynomials

Abstract

A generalization of the Hermite polynomials is considered in terms of the confluent hypergeometric function ϕ We derive its series expansion, relation with the Laguerre polynomials, and the orthogonal property. Further, a generating function, recurrence relation and the corresponding differential equation are obtained.

1 Definición y Relación con otros Polinomios

Definimos los polinomios generalizados de Hermite, los cuales denotamos por el símbolo, $H_{2n+r,\alpha}(x)$, por

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n\ (2n+r)!}{n!}$$

$$(2x)^r \Phi(-n\ ;\ \alpha+1\ :\ x^2) \tag{1}$$

donde **r** es un entero no negativo (fijo), n= 0,1,2..., $\alpha > -1$ y x es un número real.

Según (1), para r = 0 y r = 1 mostramos los primeros polinomios.

-Para r = 0

$$H_{0,\alpha}(x) = 1 \qquad H_{2,\alpha}(x) = \frac{2\ x^2}{\alpha+1} - 2$$

$$H_{4,\alpha}(x) = 12\left[\frac{x^4}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{2x^2}{(\alpha+1)} + 1\right]$$

-Para r = 1

$$H_{1,\alpha}(x) = 2x \qquad H_{3,\alpha}(x) = 12\left[\frac{x^3}{(\alpha+1)} - x\right]$$

$$H_{5,\alpha}(x) = 240\left[\frac{x^5}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{x^3}{(a+1)} + \frac{x}{2}\right]$$

- Relación con otros Polinomios.

(i) Si r = 0 y $\alpha = 1/2$; $H_{2n+r,\alpha}(x)$ coincide con los polinomios de Hermite de grado par 2n, $H_{2n}(x)$

(ii) Si r = 1 y $\alpha = 1/2$; obtenemos los polinomios de Hermite de grado 2n+1, $H_{2n+1}(x)$

(iii) Si sustituimos el resultado [1,p.273(9.13.10)] en (1), obtenemos la relación de $H_{2n+r}(x)$ con los polinomios de Laguerre

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r)!}{(\alpha+1)_n}\ (2x)^r L_n^{\alpha}(x^2) \tag{2}$$

$r \in N$(fijo); $\alpha > -1$, $n \in N$ y x real

La igualdad (2) generaliza una relación entre los polinomios clásicos Hermite y Laguerre [4,p.106(5.6.1)]

Si en (2), sustituimos $x = 0$ y $L_n^{\alpha}(0) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}$, resulta que

$$H_{2n+r,\alpha}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}, & si\ r = 0 \\ 0, & si\ r \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$
$$\alpha > -1 \ y \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Una Función generadora para $H_{2n+r,\alpha}(x)$

De (1), usando la expresión en serie para la función Φ [1 ,p.260] y la relación $(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$, resulta

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}(2n+r)!\,2^r x^{2k+r}}{(n-k)!\,(\alpha+1)_k\, k!} \quad (4)$$

$r \in N$ (fijo); $n \in N$, $\alpha > -1$ y x real

de la cual cambiando x por -x, obtenemos fácilmente la relación

$$H_{2n+r,\alpha}(-x) = (-1)^r H_{2n+r,\alpha}(x) \quad (5)$$

$r \in N$ (fijo), $n \in N$ y $\alpha > -1$

Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+r,\alpha}(x)\, t^{2n+r}}{(2n+r)!}$$

$r \in N$ (fijo). Es fácil probar utilizando el criterio de la razón y el resultado [4,p.198 (8.22.1)] que la serie converge para $t \in R$ y $x > 0$.

Si sustituimos $H_{2n+r,\alpha}(x)$ según (4) y simplificamos, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+r,\alpha}(x)}{(2n+r)} t^{2n+r} = (2xt)^r$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k} t^{2n}}{(n-k)!\,(\alpha+1)_n\, k!}$$

Si utilizamos el resultado [3,p.57(2)] y separamos sumas, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+r,\alpha}(x)}{(2n+r)!} t^{2n+r} =$$
$$(2xt)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2 t^2)}{(\alpha+1)_k\, k!} \quad (6)$$
$$= (2xt)^r e^{t^2} {}_0F_1(\text{—}; \alpha+1 : -x^2 t^2)$$

De (6), podeamos obtener la relación

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+r,\alpha}(x)}{(2n+r)!} t^{2n+r}$$
$$= (2xt)^r e^{t^2} \Gamma(\alpha+1)(xt)^{-\alpha} J_{\alpha}(2(xt))$$
$$= F(x, t, \alpha, r) \ ; \ x, > 0$$

$r \in N$ (fijo), $\alpha > -1$ (7)

si usamos el resultado [2],

$${}_0F_1(\text{—} ; b : -z) = \Gamma(b)\, z^{(1-b)/2} J_{b-1}(2\sqrt{z}),$$

con $z = x^2 t^2$ y $b \ \alpha + 1$

Por lo tanto

$F(x,t,\alpha,r) = (2xt)^r e^{t^2} \Gamma(\alpha+1)(xt)^{-\alpha} J_{\alpha}(2(xt)); x,t > 0$ $\alpha > -1$ y $r \in N$ (fijo); es una función generadora para los polinomis $H_{2n+r,\alpha}(x)$.

- Casos particulares.

(i) De (8), haciendo $r = 0$ y $a = -1/2$, se tiene $F(x,t,-1/2,0) = \sqrt{\pi}\, e^{t^2} |xt|^{1/2} J_{-1/2}(2|xt|)$ de donde usando la relación $J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos(z)$ obtenemos una función generadora para los polinomios de Hermite de grado 2n ; resultado mostrado en [1,p.95]

$$F(x,t,-1/2,0) = e^{t^2} \cos(2xt)$$

(ii) Análogamente si sustituimos $r = 1$ y $\alpha = 1/2$ y utilizamos la relación correspondiente a $J_{1/2}(z)$ [1], se tiene que:

$F(x,t,1/2,1) = e^{t^2} sen(2xt)$, la cual es una función generadora para los polinomios de Hermite de grado 2n+1

3. Ortogonalidad de los Polinomios $H_{2n+r,\alpha}(x)$

Consideremos la función $W(x,a,r) = e^{-x^2}(x^2)^{\alpha - r + 1/2}$

$\alpha > -1$, $r \in N$ (fijo) (9)

y la integral

$$I_{\alpha,r} = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,\alpha,r)\, H_{2n+r,\alpha}(x)\, H_{2m+r,\alpha}(x)\, dx \quad (10)$$

Al sustituir $H_{2n+r,\alpha}(x)$ y $H_{2m+r,\alpha}(x)$ por la relación (2) y arreglar la expresión, resulta

$$I_{\alpha,r} = \frac{2^{2r+1}(-1)^{m+n}(2n+r)!\,(2m+r)!}{(\alpha+1)_n(\alpha+1)_m} \int_0^{\infty} e^{-x^2}(x^2)^{\alpha+1/2} L_n^{\alpha}(x^2) \quad L_m^{\alpha}(x^2)\,dx$$

y si hacemos $x^2 = t$

$$I_{\alpha,r} = \frac{2^{2r}(-1)^{m+n}(2n+r)!\,(2m+r)!}{(\alpha+1)_n(\alpha+1)_m} \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha} L_n^{\alpha}(t)\, L_m^{\alpha}(t)\,dt$$

de donde obtenemos

$$I_{\alpha,r} = \begin{cases} 0 & , si\ n \neq m \\ \dfrac{2^{2r}\,\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\left[\dfrac{(2n+r)!}{(\alpha+1)_n}\right]^2 & , si\ n = m \end{cases} \tag{11}$$

$r \in N$ (fijo), $n \in N$ y $\alpha > -1$

al utilizar la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Laguerre [1.p.84].

Por lo tanto los polinomios $H_{2n+r,\alpha}(x)$ son ortogonales en $(-\infty, \infty)$, respecto a la función de peso $W(x,\alpha,r)$.

-Casos particulares

Si $r = 0$ y $\alpha = -1/2$ o $r = 1$ y $\alpha = 1/2$: obtenemos de (9) $W(x,\alpha,r) = e^{-x^2}$, la cual es la función de peso para los polinomios de Hermite $H_m(x)$ y además se obtiene la conocida relación [1.p.66]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m^2(x)\,dx = m!\,2^m\sqrt{\pi},$$ para m par y m impar

4 Ecuación Diferencial en diferencias y relación de recurrencia para los Polinomios $H_{2n+r,\alpha}(x)$

(i). Ecuación Diferencial en Diferencias.

Considerando $xt > 0$ y derivando (8), respecto de x y luego respecto de t ; obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2^r\,\Gamma(\alpha+1)\; t^{r-\alpha}\; e^{t^2} \left\{ (r-\alpha)\; x^{r-\alpha-1}\, J_{\alpha}(2xt) \;+\; x^{r-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(\alpha+2k)\,(2xt)^{\alpha+2k}}{K!\;\Gamma(k+\alpha+1)} \right\} \tag{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2^r\Gamma(\alpha+1)\,x^{r-\alpha} \left\{ (r-\alpha)\,t^{r-\alpha-1}e^{t^2}J_{\alpha}(2xt) + 2t^{r-\alpha-1}e^{t^2}J_{\alpha}(2xt) + t^{r-\alpha-1}e^{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\alpha+2k)(2xt)^{\alpha+2k}}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)} \right\} \tag{13}$$

Si multiplicamos (12) por x , (13) por t y restamos miembro a miembro, se tiene

$$x\frac{\partial F}{\partial x} - t\frac{\partial F}{\partial t} = -2\,t^2\,F \tag{14}$$

De (14) y (7) al igualar coeficientes de t^{2n+r}, obtenemos la relación

$$x\frac{\partial}{\partial x}H_{2n+r,\alpha}(x) - (2n+r)\,H_{2n+r,\alpha}(x) + 2\,(2n+r)(2n+r-1)\,H_{2n+r-2,\alpha}(x) = 0$$

$n = 1,2,\ldots\ldots;\ r \in N$ (fijo) (15)

(ii) Una Relación de Recurrencia para $H_{2n+r,\alpha}(x)$

Si partimos de la relación (2), sustituimos la relación de recurrencia [1.p.79(4.18.15)] con $z = x^2$ y de nuevo hacemos uso de (2) , resulta una relación de recurrencia para los polinomios generalizados de Laguerre

$$(\alpha+1)\;H_{2n+r,\alpha} = (\alpha+1+n)\;H_{2n+r,\alpha+1} + (2n+r)(2n+r-1)\;H_{2n+r-2,\alpha+1} \tag{16}$$

$r \in N$ (fijo); $n = 1,2,\ldots\ldots$; $\alpha > -1$

Agradecimiento

Agradecemos al árbitro sus sugerencias para una mejor presentación de este trabajo.

Referencias

[1] LEBEDEV N.N : Special Function And Their Applications. Prentice-Hall Englewood Cliffs. New York (1985).

[2] PRUDNIKOV A.P., BRYCHKOV YU.A., Y MARICHEV O.: Integrals And Series, Vol. 3: More Special Functions, Gordon and Breach New York (1990).

[3] RAINVILLE EARL D: Special Functions. The Macmillan Company, New York (1960).

[4] SZEGO GABOR : Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 23 (1939).

Recibido: 14 de Octubre de 1991

En forma revisada: 10 de febrero de 1992