Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 15, No. 3, 163 -168, 1992

Sobre la similaridad a contracciones

Wilson R. Pacheco

Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia Maracaibo, Venezuela

Resumen

El tema de similaridad a contracciones ha sido estudiado por muchos autores (Nagy, Lebow, Rota, Halmos, Foias y otros) y el problema de decidir si todo operador polinomialmente acotado es similar a una contracción ha resistido el esfuerzo de estos notables matemáticos por más de dos décadas.

Damos aquí una nueva demostración del teorema de caracterización de operadores similares a contracciones dada por Paulsen, utilizando la caracterización dada por Holbrook para tales operadores. También incluimos una breve discusión sobre los resultados obtenidos por otros autores sobre el tema en cuestión.

Palabras claves: Contracción, similaridad, completamente acotado

On similarity to contractions

Abstract

The study of operators similars to contractions has been carried out for many authors (Nagy, Lebow, Rota, Halmos, Foias and others), and the problem to decide whether a polynomially bounded operator is similar to a contraction has resisted the efforts of these notable mathematical for more than two decades.

We give here a new proof of the characterization theorem of Paulsen for operators similar to contractions, using the characterization given by Holbrook for such operators. Also we include a brief discussion of the results obtained by other authors on this problem.

Key words: Contraction, similarity, completely bounded.

Introducción

Sean H,K espacios de Hilbert separables sobre los complejos y $L(H,K)$ el álgebra de todos los operadores acotados de H en K. $T\in L(H)$ y $S\in L(K)$ son similares si existe un operador $A\in L(H,K)$ invertible tal que $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{SA}$.

El problema de caracterizar a todos los operadores similares a una clase particular de operadores ha sido estudiado ampliamente por Sz-Nagy, C. Foias, J. Holbrook, V. Paulsen, entre otros.

La evolución de los resultados obtenidos al tratar de caracterizar los operadores similares a contracciones es la siguiente.

Sz-Nagy probó en **[8]** que un operador $T\in L(H)$ es similar a un operador unitario, si y sólo si, existe k>o tal que $\|\mathbf{T}^n\| \leq k$ para todo $n \in Z$.

Si **T** cumple la condición $\|\mathbf{T}^n\|\leq k$ para todo $n\in N$ y algún k>o, se dice que **T** es acotado por potencias. El mismo Sz-Nagy **[9]** prueba que si **T** es acotado por potencias y compacto, entonces **T** es similar a una contracción y conjeturó que la condición de ser acotado por potencias para T era suficiente para que T fuera similar a una contracción. Esto fue respondido de manera negativa por S.R. Foguel en [2] quien mostró la existencia de un operador acotado por potencias que no es similar a una contracción.

Utilizando la desigualdad de von-Neumann [11] se prueba que todo operador similar a una contracción es polinomialmente acotado. A. Lebow [5] analizando el contraejemplo de Foguel, prueba que dicho operador no es polinomialmente acotado.

Gian-Carlo Rota, [7], prueba que si el radio espectral de un operador $T \in L(H)$ es menor que uno, entonces T es similar a una contracción.

Sz-Nagy y C. Foias introducen en [10] los operadores de la clase C_ρ y prueban que dichos operadores son similares a contracciones.

En [3] P.R. Halmos pregunta si todo operador polinomialmente acotado es similar a una contracción, hasta hoy no se ha respondido afirmativa ó negativamente dicha pregunta. Aun cuando existen respuestas parciales a ella las dadas por J. Holbrook en [4] y V. Paulsen en [6].

En el presente trabajo damos una nueva demostración del siguiente teorema de Paulsen [6, **Corollary 3,5**] que responde parcialmente la pregunta de Halmos. En nuestra demostración utilizamos los teoremas 2.4 y 2.8 de Paulsen [6] y el teorema 1 de Holbrook [4], cuando Paulsen [6] emplea dichos teoremas 2.4 y 2.8 conjuntamente con el teorema 3.1 de [6] y la desigualdad de von Neumann [11] para deducir este resultado. Aunque el trabajo de Paulsen [6] es muy general, en este caso particular podemos probar el resultado más directo utilizando el resultado de Holbrook [4] en vez de los argumentos de Paulsen [6], donde resultados de Sarason sobre subespacios semi invariantes se usan en la prueba de su teorema 3.1.

TEOREMA 1. (PAULSEN [6]) Un operador $T \in L(H)$ es similar a una contracción si y sólo si T es completamente polinomialmente acotado.

Preliminares: A continuación introducimos las definiciones y resultados previos necesarios para dar nuestra demostración.

DEFINICIÓN 1 . Sean A y B álgebras C^*, diremos que $\pi: A \to B$ es un **$*$-homomorfismo**, si π es un homomorfismo de álgebras y además: $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$, para todo $a \in A$. Si A y B son unitales exigimos también que $\pi(I_A) = I_B$.

El siguiente lema es bien conocido.

LEMA 2. Sean A y B álgebras C^* unitales y $\pi: A \to B$ un $*$-homomorfismo, entonces $\|\pi\| \leq 1$.

DEFINICIÓN 2. Sea A un álgebra C^*, una representación de A en H donde H es un espacio de Hilbert, es un $*$-homomorfismo de álgebras $\pi: A \to L(H)$.

Dada un álgebra C^* A, denotaremos por $M_n(A)$ al álgebra C^* de todas las matrices nxn cuyas entradas son elementos de A.

Sean A y B álgebras C^* y $S \subseteq A$ un subespacio de A y sea $\varphi: A \to B$ una aplicación lineal acotada. Definimos la sucesión $\varphi_n: M_n(S) \to M_n(B)$, tal que si $A \in M_n(S)$, entonces $\varphi_n(A)$ es la aplicación de φ entrada por entrada. Entonces φ se dice **completamente positivo**, si φ_n es positivo para todo n (Aquí positivo significa que si $a \geq 0$, entonces $\varphi(a) \geq 0$). Diremos que φ es **completamente contractivo**, si $\|\varphi_n\| \leq 1$ para todo n. Por último, diremos que **φ es completamente acotado**, si

$$\sup\{\|\varphi_n\| \,/\, n \in N\} < \infty,$$

en este caso definimos la siguiente norma para φ,

$$\|\varphi\|_{cb} = \sup\{\|\varphi\|_n \,/\, n \in N\}$$

TEOREMA 3. ([6, THEOREM 2.4]) Sea A un álgebra C^* unital, sea $S \subseteq A$ un subespacio y $L: S \to L(H)$ una aplicación lineal completamente acotada. Entonces existe una aplicación lineal completamente acotada $L': A \to L(H)$ que extiende a L, con $\|L'\|_{cb} = \|L\|_{cb}$.

TEOREMA 4. ([6, THEOREM 2.8]) Sea A un álgebra C^* unital y $L: A \to L(H)$ una aplicación lineal completamente acotada tal que, $\|L\|_{cb} = k$. Entonces existe un espacio de Hilbert M, un $*$-homomorfismo $\pi: A \to L(M)$, un operador invertible $S: M \to M$ y una isometría $V: H \to M$, tal que

$$L(a)=V^{*}S^{-1}\pi(a)SV,$$

para todo $a\in A$.

TEOREMA 5. (**[4, THEOREM 1]**) Si $T\in L(H)$, entonces T es similar a una contracción si y sólo si, existen un espacio de Hilbert K y operadores $A\in L(K,H)$, $B\in L(H,K)$, $C\in L(K)$ con **C** contracción y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| AC^n B - T^n \|^2 < \infty$$

Sea **M** un subconjunto compacto de los Complejos, R(**M**) denotara el conjunto de las funciones racionales con polos fuera de **M**, **y** definimos para $f\in R(M)$ la siguiente norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(z)| \ / \ z\in M\}.$$

Recordemos que si $T\in L(H)$ y $\sigma(T)\subset M$, entonces **M** se llama **k-espectral** para **T**, si existe $k>0$ tal que

$$\|f(T)\| \leq k \|f\|_{\infty} \ \forall f\in R(M)$$

en este caso diremos que **T** es un **operador k-espectral.** Cuando k=l, M se llama un conjunto **espectral** para **T** y **T** un **operador espectral.** Si el disco unitario cerrado **D** es un conjunto **k-espectral** para **T**, entonces decimos que **T** es **polinomialmente acotado.** Recordemos que esto es equivalente a decir que

$$\|p(T)\| \leq k \|p\|_{\infty},$$

para todo polinomio p, pues los polinomios son densos en R(**D**).

DEFINICIÓN 3. Sea $T\in L(H)$ y sea $M\subseteq C$, compacto. Entonces diremos que **M** es **completamente k-espectral** para **T** si

$$\|(f_{ij}(T))\| \leq k \|(f_{ij})\|_{\infty},$$

para toda $(f_{ij})\in M_n(R(M))$ y para todo $n\in N$. En este caso diremos que **T** es un **operador completamente k-espectral.** Para el caso k=1, diremos que **M** es un conjunto **completamente espectral** y que **T** es un **operador completamente espectral.** Si el disco **D** es un conjunto completamente k-espectral para **T** decimos que **T** es completamente polinomialmente acotado.

DEFINICIÓN 4. Una subálgebra *B* de *C*(**M**) se dice de **Dirichlet** si $B+\overline{B}$ es denso en *C*(**M**), donde la barra denota al conjugado complejo.

Resultados: Procedamos ahora con la demostración del teorema 1.

DEMOSTRACIÓN (TEOREMA 1) Supongamos gue **T** es similar a una contracción $C\in L(K)$, entonces existe $A\in L(H,K)$ invertible tal que $AT^nA^{-1}=C^n$, para todo $n\in N$.

Definamos: $L:R(D)\to L(K)$, por

$$L(f)=f(C).$$

Por **[11]** se tiene que

$$\|L(f)\| = \|f(C)\| \leq \|f\|_{\infty},$$

y por tanto **L** es contractivo. Como R(**D**) es un álgebra de Dirichlet, por el teorema 3.6.1 de **[1]** que asegura que toda aplicación contractiva sobre un álgebra de Dirichlet es completamente contractiva, tenemos que **L** es completamente contractivo.

Así, para toda $(f_{ij})\in M_n(R(D))$ se tiene

$$\begin{aligned}\|(f_{ij}(T))\| &= \|(f_{ij}(A^{-1}CA))\|\\ &= \|(A^{-1}\otimes I_n)(f_{ij}(C))(A\otimes I_n)\|\\ &= \|(A^{-1}\otimes I_n)L(f_{ij})(A\otimes I_n)\|\\ &\leq \|A^{-1}\| \ \|A\| \ \|(f_{ij})\|_{\infty}\end{aligned}$$

por tanto T es completamente polinomialmente acotado.

Recíprocamente, si **T** es completamente polinomialmente acotado, la aplicación

$$L:R(D)\to L(H),$$

definida por $L(f)=f(T)$, es completamente acotada. Luego por el teorema 3, **L** se extiende a una aplicación **L'** definida del álgebra $C^{*}C(D)$ a $L(H)$ con $\|L'\|_{cb}=\|L\|_{cb}$. Por el teorema 4., existe un espacio de Hilbert K, un operador invertible S en L(K), una isometría $V \in L(H,K)$ y un *-homomorfismo $\pi: C(D) \to L(K)$, tal que

$$L(f) = V^{*} S^{-1} \pi(f) SV$$

como π es un *-homomorfismo, por el lema 2 se tiene que $\pi(z)$ es una contracción en L(K), digamos $\pi(z)=C$, luego $\pi(z^n)=C^n$.

Así,

$$T^n=L(z^n)=L(z^n)=V^{*}S^{-1}\pi(z^n)SV=V^{*}S^{-1}C^nSV$$

para todo $n \in N$.

Tomando $A=V^{*}S^{-1}$ y $B=SV$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| AC^n B - T^n \|^2 < \infty$$

Luego, por el teorema 5, T es similar a una contracción.

Conclusiones

Ahora con el teorema de Paulsen la pregunta de Halmos es equivalente a la siguiente ¿Es cada operador polinomialmente acotado necesariamente completamente polinomialmente acotado?, hasta la fecha no se conoce su solución.

También esta sin solución el siguiente problema que parece tener mucha relación con el anterior, y su enunciado es como sigue: si T es un operador acotado por potencias digamos $\|T^n\| < k$ con $k>1$, es cierto gue para todo r con $1<r<k$ existe un operador S tal que T es similar a S y $\|S^n\| < r$.

Por último no quisiera dejar de mencionar que en la demostración que damos del teorema de Paulsen sólo usamos un caso particular del teorema de Holbrook, por tanto pensamos que la condición de ser el operador completamente polinomialmente acotado puede ser debilitada de alguna manera y todavía seguir obteniendo la similaridad a contracciones.

Bibliografía

1. ARVESON, W. Subálgebras of C^{*} - Algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.

2. FOGUEL, S. R. A Counterexample to a Problem of Sz-Nagy, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 788-790.

3. HALMOS, P. R. Ten Problems in Hilbert Space, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1970), 887-932.

4. HOLBROOK, J. Operators Similar to Contractions, Acta Sci. Math., 34 (1973), 163-168.

5. LEBOW, A. A Power-Bounded Operator that is not Polynomially Bounded, Mich. Math. J., 15 (1968), 397-399.

6. PAULSEN, V. I. Every Completely Polinomially Bounded Operator is Similar to a Contraction, J. Functional Analysis, 55 (1984), 1-17.

7. ROTA, G. C. On Models for Linear Operators, Comm. Purl. Appl. Math., 13 (1960), 469-472.

8. SZ-NAGY, B. On Uniformly Bounded Linear Transformations in Hilbert Space, Acta Sci. Math., 11 (1947), 152- 157.

9. SZ-NAGY, B. Completely Continous Operators With Uniformly Bounded Iterates, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kzl., 4 (1959), 89-93.

10. SZ-NAGY, B. FOIAS, C. S. Harmonic Analysis of Operators in Hilbert Space. Akademiai Kiado (1970).

11. VON NEUMANN, J. Eine Spektraltheorie für Allgemeine Operatoren eines Unitärem Raumes. Math. Nachr., 4 (1951), 258-281.

Recibido el 12 de julio de 1991
En forma revisada el 08 de noviembre de 1991