Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 15, No. 3, 173 -181, 1992

Deducción de algunas propiedades de funciones especiales mediante el cálculo fraccional

Luz Marina Suárez

Departamento de Matemáticas. Ciclo Básico. Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia

Resumen

El Cálculo Fraccional surge de la idea de generalizar la derivada n-ésima de una función $d^n f/dx^n$, es decir que n fuese un número arbitrario, esto es, una diferenciación e integración de orden arbitrario. Existen varias aplicaciones del Cálculo Fraccional entre las cuales tenemos las soluciones de ecuaciones diferenciales, integrales, integro-diferenciales, etc. Una de las aplicaciones más importantes es poder expresar las funciones especiales de física - matemática, como diferintegrales de funciones elementales para luego poder deducir varias propiedades de éstas funciones mediante estas representaciones. En este trabajo, primeramente representaremos la función hipergeométrica de Gauss y la función hipergeométrica confluente como diferintegrales de funciones elementales algebraicas. Luego se derivan algunas fórmulas de recurrencia de estas funciones, cuyo método se puede extender a otras funciones especiales. Se mencionan casos particulares que incluyen funciones asociadas de Legendre y Laguerre.

Palabras claves: Funciones especiales, cálculo fraccional

Some properties of special functions using fractional calculus

Abstract

The Fractional Calculus stems from the idea of generalizing the n-th derivative of a function $d^n f/dx^n$, to an arbitrary order v. One of the important application is to express the special functions of mathematical - physics as differintegrals of elementary functions, and from them one can deduce several propierties of these functions. In this work, first we will represent the Gauss' hipergeometric function and the confluent hipergeometric function as differintegrals of elementary functions. Then we will deduce several recurrence formulas of these functions. This method can be used for others special functions. We mention particular cases which include associate Legendre and Laguerre functions.

Key words: Special functions, fractional calculus

1.- Introducción

El Cálculo Fraccional se origina como respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo generalizar el significado de la derivada n-ésima de una función $d^n f/dx^n$, conocido para el caso de n entero, al caso generalizado, es decir, para n cualquier número racional, irracional o complejo?.

Durante las últimas cuatro décadas ha tenido significación el interés de grandes matemáticos en el Cálculo Fraccional, debido a la sencillez y elegancia con que se pueden abordar y solucionar muchos problemas, tanto de matemáticas como de otras ramas científicas.

Una integral fraccional es una generalización inmediata del concepto elemental de integración múltiple. Se han escrito muchos trabajos sobre el Cálculo Fraccional y sus aplicaciones, dentro de los cuales se han definido operadores de diferintegración fraccional.

Daremos, en lo que sigue, algunas definiciones de dichos operadores, entre las cuales podemos mencionar:

i) Definición de Riemann - Liouville.

Una de las definiciones más usadas de una integral de orden fraccional es a través de una transformada integral, llamada el operador de Riemann- Liouville de integración fraccional [1], la cual viena dada por:

$$ {}_aR_x^{-\alpha}\{f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad Re(\alpha) > 0 \qquad (1.1)$$

donde f(x) es una función localmente integrable sobre (a,x).

Si $Re(\alpha) \le 0$, la integral en general diverge, pero utilizando la continuación analítica podemos encontrar una expresión convergente la cual nos define la derivada fraccional.

ii) Definición de Weyl [2].

$$ {}_xW_\infty^{-\mu}\{f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^\infty (t-x)^{\mu-1} f(t)\,dt \qquad (1.2)$$

$Re(\mu) > 0$

iii) Definición de K. Nishimoto [3].

Si f(z) es una función analítica que no tiene puntos de ramificación en el interior y sobre C = {$\underline{C}$,$\overline{C}$}, donde $\underline{C}$ (Fig. 1) es una curva integral a lo largo del corte que une dos puntos z y - ∞ + Im(z), y $\overline{C}$ (Fig. 2) es una curva integral a lo largo del corte que une dos puntos z y ∞ + Im(z), entonces:

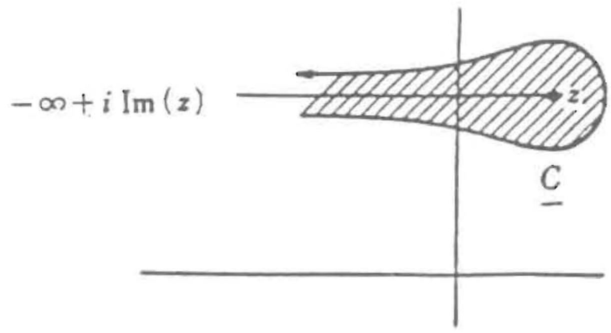
$$ {}_Cf_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{\nu+1}}$$

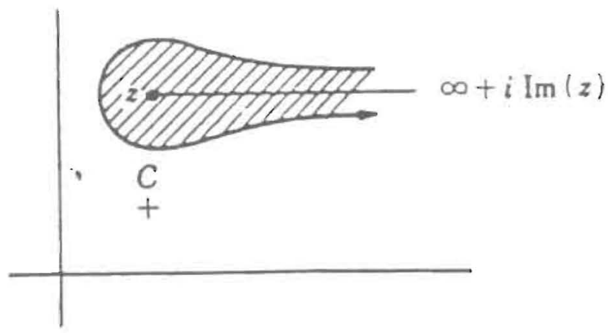
$$\nu \in \mathbb{R} \in \mathbb{Z}^- \qquad (1.3)$$

donde $t \neq z$, $-\pi \le \arg(t-z) \le \pi$ para $\underline{C}$

y $\quad 0 \le \arg(t-z) \le 2\pi$ para $\overline{C}$

Si $\nu > 0$ tenemos la derivada fraccional de orden ν y si $\nu < 0$ tenemos la integral fraccional de orden $|\nu|$, si ${}_Cf_\nu(z)$ existe.





iv) Definición de M. Saigo [4].

$$ I_x^{\alpha,\beta,\eta}\{f(x)\} = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}$$
$$ {}_aF_1(\alpha+\beta,-\eta;\alpha:1-t/x)\ f(t)\ dt$$
$$ Re(\alpha) > 0 \qquad (1.4)$$

$$ J_x^{\alpha,\beta,\eta}\{f(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}\ t^{-\alpha-\beta}$$
$$ {}_2F_1(\alpha+\beta,-\eta;\alpha:1-x/t)\ f(t)\ dt$$
$$ Re(\alpha) > 0 \qquad (1.5)$$

Existen además, otros operadores de integración fraccional, entre los cuales cabe destacar los operadores de Erdélyi-Kober, Sneddon y el definido por S. L. Kalla entre otros.

Las integrales fraccionarias involucran arbitrariamente las funciones H y G consideradas por Parashar [5], Kalla [6], [7], [8], Srivastava y Bushman [9], etc. La función $G^{m,n}_{m+n,m+n}$ es usada como núcleo por McBride [2], Dimovski y Kiryakova [10], Kiryakova [11] y [12], Samko, Kilbas y Marichev [13].

En un trabajo presentado por S. L. Kalla y V. Kiryakova [14], se consideran subclases de los operadores de integración fraccional, las cuales involucran a la función H de Fox $H^{m,0}_{m,m}$ y a su vez se demuestra que son composiciones conmutativas de m operadores de Erdélyi-Kober.

Los operadores de integración fraccional juegan un papel muy importante en la teoría de ciertos tipos de ecuaciones. Un uso sistemático de estos operadores facilita la comprensión de la estructura básica de cualquier método de solución de ecuaciones diferenciales, integrales, integro-diferenciales, etc. y permite apreciar más fácilmente las conexiones existentes entre los diversos métodos.

Actualmente existen diversos trabajos los cuales destacan lo referente a la resolución de ecuaciones diferenciales, utilizando el Cálculo Fraccional, dichos trabajos son los realizados por: K Nishimoto [3], M. A. Al Bassam [15], L. M. Campos [16] y J. A. Guerra [17] entre otros.

Tenemos otra aplicación muy interesante dentro de este campo, la cual se basa en poder expresar ciertas funciones especiales de física - matemática como diferintegrales de funciones elementales y determinar ciertas propiedades básicas mediante estas representaciones.

2.- Representación Gráfica de la Función Hipergeométrica de Gauss como un Diferintegral

Se considera a continuación una de las funciones más importantes de física - matemática, llamada Función Hipergeométrica de Gauss [18], la cual definiremos como una suma de series de la siguiente forma:

$$ {}_2F_1(a,\beta;c:z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}z^k \qquad |z|<1 \quad (2.1)$$

donde $(a)_o=1$, $(a)_k=\dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$

a, b, c, son parámetros y z la variable. Además su representación integral (18) viene dada por :

$$ {}_2F_1(a,b;c:z)= $$

$$ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1\frac{t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}}{(1-zt)^b}dt \qquad (2.2)$$

donde

$$ Re(c) > Re(a) > 0 \quad , \quad |arg(1-z)| < \Pi $$

Se considera ahora el diferintegral de la función $z^{a-1}(1-z)^{-b}$, de orden (a-c) [19], esto es:

$$ \frac{d^{a-c}}{dz^{a-c}}[z^{a-1}(1-z)^{-b}] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}z^{c-1}\,{}_2F_1(a,b;c:z) \qquad (2.3)$$

de tal manera que:

$$ {}_2F_1(a,b;c:z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{1-c}\frac{d^{a-c}}{dz^{a-c}}[z^{a-1}(1-z)^{-b}] \qquad (2.4)$$

por lo cual, hemos obtenido la función ${}_2F_1$ (a,b;c:z) en términos del diferintegral de la función $z^{a-1}(1-z)^{-b}$.

Mediante la expresión (2.4) es posible hallar algunas propiedades ó fórmulas que expondremos a continuación.

Si derivamos ${}_2F_1(a,b;c:z)$ se obtiene:

$$ \frac{d}{dz}\,{}_2F_1(a,b;c:z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \left[(1-c)\,z^{-c}\frac{d^{a-c}}{dz^{a-c}}[z^{a-1}(1-z)^{-b}] + z^{1-c}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{d^{a-c}}{dz^{a-c}}[z^{a-1}(1-z)^{-b}]\right]\right] \qquad (2.5)$$

Sustituyendo $c-1=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-1)}$ y multiplicando por z ambos miembros de la expresión anterior:

$$z\frac{d}{dz}\ {}_2F_1(a,b;c:z) =$$

$$(1-c)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\ z^{1-c}\ \frac{d^{a-c}}{dz^{a-c}}[z^{a-1}(1-z)^{-b}]$$

$$-z^{1-(c-1)}\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\ \frac{d^{a-(c-1)}}{dz^{a-(c-1)}}[z^{a-1}(1-z)^{-b}] \tag{2.6}$$

Usando (2.4) en esta expresión:

$$\frac{d}{dz}\ {}_2F_1(a,b;c:z) =$$

$$\frac{1-c}{z}\left[\ {}_2F_1(a,b;c:z) - {}_2F_1(a,b;c-1:z)\right] \tag{2.7}$$

Por otro lado:

$$\frac{d}{dz}\ {}_2F_1(a,b;c:z) =$$

$$\frac{a.b}{c}\ {}_2F_1(a+1,b+1;c+1:z) \tag{2.8}$$

y de esta manera, se concluye:

$$\frac{a.b}{c}\ {}_2F_1(a+1,b+1;c+1:z) =$$

$$\frac{(1-c)}{z}\left[\ {}_2F_1(a,b;c:z) - {}_2F_1(a,b;c-1:z)\right] \tag{2.9}$$

Por último mencionaremos otra propiedad la cual viene dada por la expresión:

$${}_2F_1(a+1,b;c:z) - {}_2F_1(a,b;c:z) =$$

$$\frac{z.b}{c}\ {}_2F_1(a+1,b+1;c+1:z) \tag{2.10}$$

3.- Representación de la Función Hipergeométrica Confluente como un Diferintegral.

Además de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a,b;c:z)$, existe otra función muy importante dentro de la teoría de funciones especiales [18], definidas por:

$${}_1F_1(a;c:z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k\, k!} z^k \quad |z| < \infty$$
$$c \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots \tag{3.1}$$

conocida como la función hipergeométrica confluente. Con z una variable compleja, a y c parámetros reales ó complejos.

La función ${}_1F_1(a;c:z)$ tiene una representación integral simple, la cual juega un rol importante en la teoría y aplicaciones de las funciones hipergeométricas confluentes.

Consideramos sólo las representaciones básicas en términos de integrales evaluadas a lo largo de un intervalo del eje real.

La representación integral de la función ${}_1F_1(a;c:z)$ [18] es dada por la fórmula:

$${}_1F_1(a;c:z) =$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{(1-t)^{a-c+1}} e^{zt}dt \tag{3.2}$$

Podemos usar la representación integral (3.2) para deducir una relación muy importante para ${}_1F_1(a;c:z)$, de manera que si hacemos el cambio de variable t = 1 - s en (3.2) se tiene:

$$_1F_1(a;c:z) = \frac{\Gamma(c)\,e^{z}}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{-zs}s^{c-a-1}(1-s)^{a-1}ds \qquad (3.3)$$

lo cual implica

$$_1F_1(a;c:z) = e^{z}\;{}_1F_1(c-a;c:-z) \qquad (3.4)$$

Re (c) > Re (c - a) > 0

llamada Fórmula de Kummer.

Por otro lado sabemos que:

$$\frac{d^{a-c}\{z^{a-1}e^{z}\}}{dz^{a-c}} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}z^{c-1}\;{}_1F_1(a;c:z) \qquad (3.5)$$

de donde:

$$_1F_1(a;c:z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{1-c}\frac{d^{a-c}\{z^{a-1}e^{z}\}}{dz^{a-c}} \qquad (3.6)$$

lo que significa que hemos expresado a la función hipergeométrica confluente $_1F_1(a;c:z)$ en términos del diferintegral de la función $z^{a-1}\,e^{z}$.

En forma similar a la usada en la sección anterior y utilizando la expresión (3.6), se obtiene:

$$_1F_1(a+1;c+1:z) = \frac{c(1-c)}{az}\left[\,{}_1F_1(a;c:z) - {}_1F_1(a;c-1:z)\right] \qquad (3.7)$$

$$_1F_1(a+1;c:z) - {}_1F_1(a;c:z) = \frac{z}{c}\;{}_1F_1(a+1;c+1:z) \qquad (3.8)$$

4.- Casos Especiales.

Un caso particular de la función hipergeométrica de Gauss es el relacionado con la función asociada de Legendre de orden μ y grado ν [18].

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1+\nu)}(z^2-1)^{\mu/2}\frac{d^{\mu+\nu}}{dz^{\mu+\nu}} \qquad (4.1)$$

En la expresión anterior tenemos a la función $P_\nu^\mu(z)$ en función del diferintegral del factor $(z^2-1)^\nu$, de la cual se hallan ciertas relaciones o propiedades muy importantes.

Si derivamos (4.1), obtenemos:

$$\frac{d}{dz}P_\nu^\mu(z) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1+\nu)}(z^2-1)^{\mu/2}\left[\frac{\mu z}{z^2-1}\frac{d^{\mu+\nu}}{dz^{\mu+\nu}}(z^2-1)^{\nu} + \frac{d}{dz}\frac{d^{\mu+\nu}}{dz^{\mu+\nu}}(z^2-1)^{\nu}\right] \qquad (4.2)$$

Usando (4.1.) en (4.2):

$$(z^2-1)\frac{dP_\nu^\mu(z)}{dz} = \mu\, z\, P_\nu^\mu(z) + (z^2-1)^{1/2}\,P_\nu^{\mu+1}(z) \qquad (4.3)$$

De manera similar a la empleada anteriormente se obtiene también la relación:

$$P_{\nu+1}^\mu = z\,P_\nu^\mu(z) + (\mu+\nu)(z^2-1)^{1/2}\,P_\nu^{\mu-1}(z) \qquad (4.4)$$

Es importante hacer notar que la función $P_\nu^\mu(z)$ se puede expresar de otra manera distinta a (4.1):

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}(z+1)^{\mu/2}(z-1)^{-\mu/2}\;{}_2F_1\left(\nu+1,-\nu;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right) \qquad (4.5)$$

es decir tenemos a $P_\nu^\mu(z)$ en términos de una función hipergeométrica de Gauss [19].

Usando (2.4):

$$ {}_2F_1(\nu+1,-\nu;1-\mu:\frac{1-z}{2}) = $$

$$ \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+1)}(-1)^{\mu+\nu}\frac{(z-1)^{\mu}}{2^{\mu}+2\nu}\frac{d^{\mu+\nu}}{dz^{\mu+\nu}}(z^2-1)^{\nu} \tag{4.6} $$

Reemplazando (4.6) en (4.5), se determina:

$$ P_\nu^\mu(z)=\frac{(-1)^{\mu+\nu}(z^2-1)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu+1)2^{\mu+2\nu}}\frac{d^{\mu+\nu}}{dz^{\mu+\nu}}(z^2-1)^{\nu} \tag{4.7} $$

Con esta nueva expresión, se demuestra en forma similar la relación (4.3), y la fórmula dada por:

$$ P_{\nu+1}^\mu(z)=-\frac{z}{2}P_\nu^\mu(z)+\frac{(\mu+\nu)(z^2-1)^{1/2}}{4}P_\nu^{\mu-1}(z) \tag{4.8} $$

La función asociada de Laguerre $L_\nu^\mu(z)$ es considerada también como otro caso muy especial de estas funciones hiopergeométricas.

Si hallamos el diferintegral de la función $z^{\mu+\nu}.e^{-z}$ de orden ν [19], se tiene:

$$ \frac{d^\nu(z^{\mu+\nu}e^{-z})}{dz^\nu}=z^{\mu}\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)} \, {}_1F_1(\mu+\nu+1;\mu+1:-z) \tag{4.9} $$

Por otro lado $L_\nu^\mu(z)$ se puede expresar así: (18)

$$ L_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)e^{z}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \, {}_1F_1(\mu+\nu+1;\mu+1:-z) \tag{4.10} $$

Sustituyendo (4.10) en (4.9), obtenemos la función asociada de Laguerre en términos del diferintegral de una función elemental, esto es:

$$ L_\nu^\mu(z)=\frac{z^{-\mu}e^{z}}{\Gamma(\nu+1)}\frac{d^\nu}{dz^\nu}(z^{\mu+\nu}e^{-z}) \tag{4.11} $$

Si derivamos (4.11) y multiplicamos por z toda la expresión, se tiene:

$$ z\frac{d\{L_\nu^\mu(z)\}}{dz}=(z-\mu)\frac{z^{-\mu}e^{z}}{\Gamma(\nu+1)}\frac{d^\nu(z^{\mu+\nu}e^{-z})}{dz^\nu} + \frac{(\nu+1)z^{-(\mu-1)}e^{z}}{\Gamma(\nu+2)}\frac{d^{\nu+1}(z^{\mu+\nu}e^{-z})}{dz^{\nu+1}} $$

Usando (4.11) en (4.12) se concluye:

$$ z\frac{d\{L_\nu^\mu(z)\}}{dz}= (z-\mu)L_\nu^\mu(z)+(\nu+1)L_{\nu+1}^{\mu-1}(z) \tag{4.13} $$

Referencias

(1) Oldhan, K - Spanier, J.: The Fractional Calculus. Academic Press. New York and London, 1974

(2) McBride, A. C.- Roach, G. F. : Fractional Calculus. University of Strathcclyde. Pitman Advanced Publishing Program. Boston - London - Melbourne.

(3) Nishimoto, Katsuyuki.: Fractional Calculus. Tomo I (1984) Descartes Press Co. Koriyama. Japan.

(4) Saigo, M.: A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. Kyushu Univ. Math. Reports of College of General Education, Vol. XI No 2, 1978, 135-143.

(5) Parashar, B.: Domain and range of fractional integration operators. Math. Japonicae 12, No 2 (1967), 141 - 145.

(6) Kalla, S. L. : Fractional integration operators involving hypergeometric functions - II. Acta Mexicana Cie. Tecn. 3, 1969, 1-5.

(7) Kalla, S. L. : Integral operators involving Fox's H- function. Acta Mexicana Cie. Tecn. 3, 1969, 117-122.

(8) Kalla, S. L. : Operators of fractional integration. Lecture Notes in Math. 798 (1980), 258-280.

(9) Srivastava, H. M. and Bushman, R. G.: Composition of fractional integration operators involving Fox's - H function. Acta Mexicana. Cie. Tecn 7, 21-28.

(10) Dimovski, I and Kiryakova, V.: Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel type operators via Meijer's G- function. Complex Analysis and Applications, Varna 83, 45 - 66.

(11) Kiryakova, V.: On operators of fractional intergration involving Meijer's G-function. C.R. Acad. Bulg. Sci. 39 No 10 (1986), 25-28.

(12) Kiryakova, V.: A generalized fractional calculus and integral transforms. Proc GFCA, Dubrovnik 1987, 205-217.

(13) Samko, S., Kilbas, A. and Marichev, O.: Integrals and derivates of fractional order and some of their applications (In Russian). Nauka i Tekhnika, 1987.

(14) Kalla, S. L.: On operators fractional integration. Universidad Nacional de Rosario. Separata de Mathematicae Notae, Año XXII-1970-71.

(15) Al Bassam, M. A.: On an integro-differential equation of Legendre (Volterra Type). Texas Technological College, Lubbock - U.S.A. and Faculty of Mathematics, University of Baghdad - Iraq., 1966.

(16) Campos, L.M.B.C.: On a systematic approach to some propertier of special functions. IMA Journal of Applied Mathematics (1986) 36, 191-206.

(17) Guerra P., José A.: Aplicaciones del Cálculo Fraccional para resolver ecuaciones diferenciales. Tesis Magister, Div. Postgrado. Ingieneria. L.U.Z., 1990.

(18) Lebedev, N. N.: Special Functions and their Applications. Dover Publications Inc. New York, 1965.

(19) Erdélyi, A.: Tablas of Integral Transforms. Vol. II, Mc. Graw-Hill, New York (1954).

Recibido el 27 de Abril de 1990
En forma revisada el 20 de Septiembre de 1991