Rev. Téc. Univ. Zulia, Vol. 16, No. 1, 35 - 41, 1993

Diferintegral de algunas funciones especiales

Pablo Valera
Ciclo Básico y División de Postgrado, Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Resumen

El diferintegral (DI) de una función es la derivada o la integral de orden arbitrario de la misma. Existen varias definiciones del DI de una función tales como: la de Riemann-Liouville, la de Grünwald, la de Weyl, la de Nishimoto, etc.

El propósito de este trabajo es el de calcular el DI de algunas funciones elementales, especiales, especiales generalizadas, etc. Se cree que muchos de los resultados obtenidos son nuevos, se deducen además varios casos particulares de los mismos.

Palabras claves: diferintegral, funciones especiales

Differintegral of some special functions

Abstract

The differintegral (DI) of a function is the derivative or integral of arbitrary order. There are several definitions of the DI of a function, such as Riemann-Liouville's, Grünwald 's, Weyl's, Nishimoto's, etc.

The purpose of this work is to calculate the DI of some functions: elementary, special, generalized special, etc. and several particular cases of each have been deduced. Some of the results seem to be new.

Key words: differintegral, special functions.

1. Introducción

El cálculo fraccional surge inicialmente como una generalización del operador $\frac{d^q f(x)}{dx^q}$ donde "q" es cualquier número real o complejo.

En la historia del cálculo fraccional nos conseguimos con nombres, tales como: Leibniz, Fourier, Abel, Lacroix, Riemann, De Morgan, Grünwald, Krug, Heaviside y otros, quienes se pueden considerar como los iniciadores del Cálculo fraccional y posteriormente Gemant, Weyl, Kober, Erdélyi, Love, Ross, Kalla, Al-Bassan, Oldham, Spanier, Marichev, Nishimoto, Bora, Fox, Osler, Samko y otros, quienes han contribuido enormemente con su desarrollo.

El cálculo fraccional puede ser aplicado en diversos problemas matemáticos, tales como: en las resoluciones de ecuaciones diferenciales, integrales, integro-diferenciales, además se puede aplicar en campos, tales como: la electroquímica, teoría de potencial, bioenergética, biología cuantitativa, teoría de difusión, etc.

Existen diversas definiciones del DI de una función; a continuación indicaremos algunas de ellas.

1.1. Definición de Riemann-Liouville

Sea f (x) una función localmente integrable en el intervalo [0,x] entonces:

$$D_x^q f(x) = \frac{d^q f}{dx^q} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x (x-t)^{-q-1} f(t)\, dt;\ Re(q) < 0$$

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{q-n} f(x)}{dx^{q-n}}\right);\ Re(q) \geq 0,$$

n es el menor entero tal que n > q.[6]

1.2. Definición de Weyl

$$W_x^q f(x) = \frac{d^q f}{dx^q} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \int_x^\infty (t-x)^{-q-1} f(t)\, dt;\ Re(q) < 0$$

$$W_x^q f(x) = \frac{(-1)^n d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{q-n} f(x)}{dx^{q-n}}\right);\ Re(q) \geq 0$$

1.3. Definición de Grünwald.

El DI de orden "q" de una función f sobre el intervalo [a,x] lo define Grünwald de la siguiente manera [6]

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x-j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right)\right\}$$

q arbitrario.

Esta definición es muy usada en cálculo numérico debido a que no hay necesidad de efectuar integraciones o derivaciones de la función f, sino, sencillamente, evaluaciones sucesivas de dicha función, sin embargo este hecho lo hace poco usual en problemas prácticos y en funciones complicadas.

1.4. Definición de Nishimoto

Si f (z) es una función analítica que no tiene puntos ramales en el interior y sobre c ($c = \{c_-, c_+\}$, c_- es una curva integral a lo largo del corte que une dos puntos z y $-\infty + iIm(z)$ y c_+ es una curva integral a lo largo del corte que une dos puntos z y $+\infty + iIm(z)$).

$$f_\nu = {}_c f_\nu(z) =$$

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{\nu+1}},\ (\nu \in \Re, \nu \notin Z^-)$$

$$f_{-n} = \lim_{\nu \to -n} f_\nu\ \ (n \in Z^+)$$

donde $\zeta \neq z$, $-\pi \leq \arg(\zeta - z) \leq \pi$ para c_- y $0 \leq \arg(\zeta - z) \leq 2\pi$ para c_+, entonces $f_\nu(\nu>0)$ es la derivada de orden fraccional ν, y $f_\nu(\nu<0)$ es la integral de orden fraccional $|\nu|$, si f_ν existe.[5]

En este trabajo se aplica la definición de Riemann-Liouville para calcular el DI de ciertas funciones, inicialmente se utilizan funciones elementales y especiales, luego se usan los resultados obtenidos anteriormente para conseguir el DI de algunas funciones especiales generalizadas, tales como: la función de Exton [1], la integral de tipo elíptica generalizada, la función cilíndrica incompleta, etc.

2. DI de Ciertas Funciones Elementales y Especiales

2.1 Sea $f(x) = \lambda x^{\beta+1/2}$

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x \lambda y^{\beta+1/2} (x-y)^{-q-1} dy$$

Haciendo x-y=u se obtiene:

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{\lambda}{\Gamma(-q)} \int_0^x (x-u)^{\beta+1/2} u^{-q-1} du$$

Evaluando la integral, tenemos:

$$\frac{d^q \lambda x^{\beta+1/2}}{dx^q} = \frac{\lambda\Gamma(\beta+3/2)}{\Gamma(\beta+3/2-q)} x^{\beta+1/2-q},$$

$$Re(\beta) > -3/2; \ \lambda = cte \qquad (1)$$

Si en (1) se hace β=n-1/2 se obtiene:

$$\frac{d^q \lambda x^n}{dx^q} = \frac{\lambda\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-q)} x^{n-q}; \ n \in Z^+ \qquad (2)$$

2.2. Sea $f(x) = x^{v/2} J_v(\sqrt{x})$

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x y^{v/2} (x-y)^{-1-q} J_v(\sqrt{y})\, dy$$

usando el desarrollo en serie de $J_v(\sqrt{y})$ [9] y el resultado (2.4) Tabla I [8] se obtiene:

$$\frac{d^q}{dx^q} x^{v/2} J_v(\sqrt{x}) =$$

$$2^{-q} x^{v/2-q/2} J_{v-q}(\sqrt{x}), \ Re(v) > -1 \ldots \qquad (3)$$

2.3. DI de ciertas Funciones Especiales Generalizadas.

2.3.1. DI de la integral de tipo elíptica generalizada.

Sea [2]

$$R_\mu(k,\alpha,\Upsilon) =$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos^{2\alpha-1}(\theta/2)\, sen^{2\Upsilon-2\alpha-1}(\theta/2)\, d\theta}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+1/2}}$$

$$0 \le k < 1, Re(\Upsilon) > Re(\alpha) > 0, \ Re(\mu) > -1/2$$

$$\frac{d^q R_\mu(k,\alpha,\Upsilon)}{dk^q} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x R_\mu(L,\alpha,\Upsilon)\, (k-L)^{-1-q} dL$$

Sustituyendo R_μ por su desarrollo en serie, es decir:

$$R_\mu(k,\alpha,\Upsilon) =$$

$$(1+k^2)^{-\mu-1/2} \sum_{r=0}^{\infty} (k^2/1+k^2)^r\, W_r(\mu,\alpha,\Upsilon)$$

donde [2]

$$W_r(\mu,\alpha,\Upsilon) =$$

$$[2^r(\mu+1/2)_r/r!]\ \Gamma(\alpha+r)\ \Gamma(\Upsilon-\alpha)\ /\ \Gamma(\Upsilon+r)$$

y aplicando el resultado (2.24a) Tabla I [8] se obtiene:

$$\frac{d^q R_\mu(k,\alpha,\Upsilon)}{dk^q} =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} W_r(\mu,\alpha,\Upsilon)\frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma(2r+1-q)}k^{2r-q}$$

$$_3F_2(\mu+1/2+r, r+1/2,\ r+1\ ;$$

$$r+1/2-q/2,\ r+1-q/2:\ -k^2) \tag{4}$$

(4) se puede expresar en la siguiente forma [8]:

$$\frac{d^q R_\mu(k,\alpha,\Upsilon)}{dk^q} = \frac{\Gamma(\Upsilon-\alpha)\ \Gamma(\alpha)\ k^{-q}}{\Gamma(\Upsilon)\ \Gamma(1-q)}$$

$$F^{3:1,0}_{2:1,0}\left[\begin{matrix}1/2, 1, \mu+1/2:\alpha;\\ 1/2-q/2, 1-q/2, \Upsilon;\end{matrix} 2k^2, -k^2\right] \tag{5}$$

donde F[ ] es la función de Kampé de Feriét.

Si en (5) se sustituye $\Upsilon = 2\alpha$, utilizando la fórmula de duplicación de Gamma y la relación [2]:

$$R_\mu(k,\alpha,2\alpha) = 2^{1-2\alpha}S_\mu(k,\alpha-1/2)$$

donde

$$S_\mu(k,\nu) = \int_0^\pi \frac{sen^{2\nu}\ \theta\ d\ \theta}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+1/2}},$$

$$o \le k < 1,\ Re(\mu) > -1/2,\ Re(\nu) > -1/2$$

se obtiene:

$$\frac{d^q S_\mu(k,\alpha-1/2)}{dk^q} = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\alpha)\ k^{-q}\ \cdot}{\Gamma(\alpha+1/2)\ \Gamma(1-q)}$$

$$F^{3:1,0}_{2:1,0}\left[\begin{matrix}1/2, 1, \mu+1/2:\alpha;\\ 1/2-q/2, 1-q/2, 2\alpha;\end{matrix} 2k^2, -k^2\right] \tag{6}$$

reemplazando $\mu = j \in Z^+$, $\alpha = 1/2$ en (6) y usando la relación $S_j(k,0) = \Omega_j(k)$ donde [2]:

$$\Omega_j(k) = \int_0^\pi (1-k^2\cos^2\varnothing)^{-j-1/2}\ d\ \varnothing,\ 0 \le k < 1$$

se tiene que:

$$\frac{d^q\Omega_j(k)}{dk^q} =$$

$$\frac{\pi k^{-q}}{\Gamma(1-q)} F^{3:1,0}_{2:1,0}\left[\begin{matrix}1/2, 1, j+1/2:1/2;\\ 1/2-q/2, 1-q/2, 1;\end{matrix} 2k^2, -k^2\right] \tag{7}$$

Haciendo q=1/2 en (7) se obtiene la semiderivada de Ω_j (k)
y si q=-1/2 la semi-integral.

De manera similar, calculando el DI de [3]:

$$K_\mu(k,m)=\int_0^\pi \frac{\cos^{2m}\theta\, d\theta}{(1-k^2\cos\theta)^{\mu+1/2}};$$

$$0\le k<1,\ Re(\mu)>-1/2,\ m\in Z^+$$

se obtiene la expresión [8]:

$$\frac{d^q\Omega_j(k)}{dk^q}=$$

$$\frac{2^{-2q}\pi K^{-q}}{\Gamma(1-q)}\ {}_5F_4(1/4,1/2,3/4,j/2+1/4,j/2+3/4;$$

$$1/4-q/4,1/2-q/4,3/4-q/4,1-q/4:k^4) \tag{8}$$

si en (8) se hace j = 0 entonces

$$\Omega_0(k)=(\sqrt{2}\lambda/K)\,k(\lambda)\ \ y$$

$$k(\lambda)=\int_0^{\pi/2}(1-\lambda^2 sen^2\theta)^{-1/2}\, d\theta$$

donde $\lambda^2 = 2k^2 / (1+k^2)$ (ver [3]).

Por lo tanto:

$$\frac{d^q\Omega_0(k)}{dk^q}=\frac{d^q[(\sqrt{2}\lambda/k)\,k(\lambda)]}{dk^q}=\frac{2^{-2q}\,\pi\, k^{-q}}{\Gamma(1-q)}$$

$${}_5F_4(1/4,1/2,3/4,1/4,3/4;$$

$$1/4-q/4,1/2-q/4,3/4-q/4,1-q/4:k^4) \tag{9}$$

por otro lado si en (8) se hace j=1 [3],

$$\Omega_1(k)=[\sqrt{2}\ \lambda/k\ (1-k^2)]\,E(\lambda);$$

$$E(\lambda)=\int_0^{\pi/2}(1-\lambda^2 sen^2\theta)^{1/2}d\theta$$

entonces:

$$\frac{d^q[(\sqrt{2}\lambda/k(1-k^2))E(\lambda)]}{dk^q}=\frac{2^{-2q}\pi k^{-q}}{\Gamma(1-q)}$$

$${}_5F_4(1/4,1/2,3/4,3/4,5/4;$$

$$1/4-q/4,1/2-q/4,3/4-q/4,1-q/4:k^4) \tag{10}$$

comparando (7) y (8) se tiene que:

$$2^{-2q}\ {}_5F_4(1/4,1/2,3/4,\mu/2+1/4,\mu/2+3/4;$$

$$1/4-q/4,1/2-q/4,3/4-q/4,1-q/4:k^4)=$$

$$F^{3:1,0}_{2:1,0}\left[\begin{matrix}1/2,1,\mu+1/2:1/2;\\ 1/2-q/2,1-q/2:1;\end{matrix}\ 2k^2,-k^2\right] \tag{11}$$

2.3.2. El DI de la función cilíndrica generalizada o función cilíndrica incompleta.

Sea [4]

$$J_\nu(w,x)=\frac{2x^\nu}{A_\nu}\int_0^w \cos(x\cos\theta)\,sen^{2\nu}\theta\, d\theta;$$

$$Re(\nu+1/2)>0,$$

$$A_\nu = 2^\nu\,\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)$$

$$\frac{d^q J_\nu(w,x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x J_\nu(w,y)\,(x-y)^{-1-q}\,dy$$

usando el desarrollo en serie de $J_\nu(w,x)$, se obtiene

$$\frac{d^q J_\nu(w,x)}{dx^q} =$$

$$\frac{x^{-q}}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m C_{2m,\nu}(w)\,\Gamma(2m+\nu+1)\,x^{2m+\nu}}{(2m)!\,\Gamma(2m+\nu+1-q)} \tag{12}$$

si en (12) se hace $w=\pi/2$, y se aplica la fórmula de duplicación de la función Gamma se obtiene

$$\frac{d^q J_\nu(\pi/2,x)}{dx^q} =$$

$$x^{-q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(\nu+2m+1)\,(x/2)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(\nu+m+1)\,\Gamma(\nu+2m-q+1)}$$

resultado que coincide con el DI de la función de Bessel $J_\nu(x)$, como era de esperarse, ya que $J_\nu(\pi/2,x) = J_\nu(x)$ [4].

Si en vez de usar el desarrollo en serie de la función $J_\nu(w,x)$, se utiliza la relación [4]:

$$J_\nu(w,x) = J_\nu(x) - \frac{2x^\nu}{A_\nu} \cos w\ sen^{2\nu-1} w \,\Xi_2$$

$$(1/2-\nu, 1, 3/2; -\cot^2 w; -\frac{x^2 \cos^2 w}{4})$$

donde

$$\Xi_2(\alpha,\beta,\Upsilon,x,y) =$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m\,(\beta)_m\,x^m\,y^m}{(\Upsilon)_{m+n}\,m!\,n!}\ ;\ |x| < 1$$

es un caso especial de la función hipergeométrica de Gauss de dos variables [8]; entonces el DI de orden "q" de $J_\nu(w,x)$ es [8]:

$$\frac{d^q J_\nu(w,\sqrt{x})}{dx^q} = \frac{d^q J_\nu(\sqrt{x})}{dx^q} - \frac{2}{A_\nu} \cos w\ sen^{2\nu-1} w$$

$$\frac{x^{\nu/2-q/2}\,\Gamma(\nu/2+1)}{\Gamma(\nu/2+1-q)}$$

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}(1/2-\nu)_m (1)_m (\nu/2+1)_n \cot^{2m} w}{(\nu/2+1-q)_n\,(3/2)_{m+n}\,m!\,n!}$$

$$\left(\frac{x\cos^2 w}{4}\right)^n \tag{13}$$

obsérvese que si en (13) se sustituye $w=\pi/2$ se obtiene:

$$\frac{d^q J_\nu(\pi/2,\sqrt{x})}{dx^q} = \frac{d^q J_\nu(\sqrt{x})}{dx^q} \tag{14}$$

si se utiliza la definición de $J_\nu(w,x)$ directamente en vez de su desarrollo en serie y haciendo las operaciones pertinentes y las sustituciones adecuadas [8] el DI de orden "q" de $J_\nu(w,x)$ que se obtiene es:

$$\frac{d^q J_\nu(w,x)}{dx^q} = \frac{x^{\nu-q}\,\Gamma(\nu+1)}{2A_\nu\,\Gamma(\nu+1-q)}$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_k C_{k,\nu}(w)}{(\nu+1-q)_k\,k!} [(ix)^k + (-ix)^k] \right\} \tag{15}$$

(15)

si en (15) se sustituye $w=\pi/2$ y usando la definición de la función Beta se obtiene el resultado (14)

2.4. El Diferencial de ciertas funciones especiales que vienen expresadas en forma de transformaciones integrales

2.4.1.

$$\frac{d^{-\beta}x^{\alpha-1}L_{v}(cx)}{dx^{-\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{\alpha+\beta-1}$$

$$ {}_2F_2(v+1,\alpha;1,\ \beta+\alpha:-cx); \qquad (16)$$

$$Re(\alpha),\ Re(\beta)>0$$

2.4.2.

$$W_x^{\beta}x^{\alpha-1}e^{-cx}L_v(cx)=\frac{\Gamma(1-\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha+\beta-1}$$
$$ {}_2F_2(v+1,1-\beta-\alpha;1,\ 1-\alpha:-cx)+$$
$$\frac{c^{1-\beta-\alpha}\ \Gamma(\alpha-1+\beta)\ \Gamma(2-\alpha+v-\beta)}{\Gamma(v+1)\ \Gamma(-\alpha-\beta)}$$
$$ {}_3F_1(1-\beta,\alpha-1+\beta,2-\alpha+v-\beta;-\alpha-\beta:cx);$$

(17)

$[Re(c), Re(\beta)>0;\ Re(\alpha+\beta-v)<2;\ \forall v\neq \dot{0},1,2,\ldots]$

2.4.3.

$$\frac{d^{-\beta}x^{\alpha-1}(x+t)^{\beta-1}p_v^{\mu}(t/x)}{dx^{-\beta}}=$$

$$\frac{2^{\mu-1}\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta-\mu/2)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\mu)\Gamma[\beta+(\alpha-\mu)/2]}$$

$$x^{\alpha+2\beta-2}\ {}_3F_2\left(\frac{1-\mu+v}{2},-\frac{\mu+v}{2},\beta-\mu/2;\right.$$
$$\left.1-\mu,\beta+\frac{\alpha-\mu}{2}:1\right) \qquad (18)$$

$$Re(\alpha,\ Re(2\beta-\mu)>0]$$

ver [7,8] para resultados similares.

Bibliografía

[1] **Exton, H.**: "The Di-Bessel Function." Indian J. Pure Appl. Math 11 (7): July 1980, 856-862.

[2] **Kalla S. L., Conde, S., Hubbell, J. H.** : "Some results on Generalized Elliptic-Type Integrals". Applicable Analisys. Vol. 22, (1986), 273-287.

[3] **Kalla, S. L., Bader, Al-Saqabi** : "On a Generalized Elliptic-Type Integral". Revista Brasilera de Fisica, Vol. 16, No. 1 (1986), 145 - 149.

[4] **Kalla, S. L., and Bader, Al-Saqabi** : "Some results on incomplete Cylindrical Functions", Anales Acad. Nac. Ciencias Exactas Física, Nat. Arg. (1989).

[5] **Nishimoto, K.**: "Fractional Calculus". Descartes Press CO. Koriyama. Japon Vol.I. 1984, Vol.II 1987.

[6] **Oldham, K. B., Spanier, J.**: "The Fractional Calculus". Academic Press, New York, (1974).

[7] **Prudnikov, A. P, Brychkov, Yu. A., Marichev, O. I.** : "Integrals and Series" Gordon and Breach Science Publishers, New York, Vol. III (1987).

[8] **Valera Villegas, Pablo José**: "Diferintegral de Algunas Funciones Especiales. Tesis de Magister en Matemáticas Aplicadas. Maracaibo: Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, División de Postgrado, 1990.

[9] **Watson, G. N.** : "A Treatise on the Theory of Bessel Functions". Cambridge University press. Second Edition. Cambridge

Recibido 27 de Abril de 1990
En forma revisada 06 de Octubre de 1992