Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 16, No. 1, 63- 65, 1993

Una nota sobre series de funciones de Bessel Modificadas

Bermúdez, Misvely
Departamento de Física, Facultad de Ingeniería,
Universidad del Zulia, Maracaibo-Venezuela.

Resumen.

En esta nota se presentan series infinitas que involucran cuadrados de la función de Bessel Modificada de primera clase. Usando la técnica de la función generadora, el cálculo de la serie se reduce a encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial.

Palabras claves: Función de Bessel, series, recurrencia, función generadora.

Note on series of Modified Bessel Functions

Abstract.

In this note is presented infinite series involving squares of the Modified Bessel functions. Using the generating function technique, the problem of calculating the sume of the series is reduced to that of solving a parcial differential equation.

Key words: Bessel function, series, generating function, recurrence.

1.- Introducción.

En algunos problemas de Física surgen series infinitas que involucran funciones cilíndricas cuadráticas [2], como $\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n^2(x)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t^n J_n^2(x)}{n+\mu}$. En esta nota se usa la técnica de la función generadora [1], la cual consiste en utilizar dos relaciones de recurrencia que conducen a una ecuación diferencial cuya solución se conoce. Dicha técnica se aplica a otras funciones cilíndricas, tal como la función de Bessel Modificada de primera clase In(x) [3], y se presentan resultados para las sumas de series $\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n^2(x)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} t^n I_n^2(x)$.

2.- Series Infinitas de la Función de Bessel Modificada.

La función de Bessel Modificada, $I_n(x)$ satisface las siguientes relaciones de recurrencia [4].

$$\frac{2n}{x} I_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)$$

$$2\frac{d}{dx} I_n(x) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x), \quad I_n(0) = \delta_{n,0}$$

Considerando

a) Series del tipo

$$S_1(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n(x), \qquad 0 < |t| < \infty \tag{2}$$

Multiplicando la segunda de las ecuaciones (1) por t^n y tomando la suma sobre n se obtiene

$$2\frac{d}{dx}S_1(x,t) = (t+\frac{1}{t})S_1(x,t), \qquad S_1(0,t) = 1 \tag{3}$$

La solución de (3) conduce a

$$S_1(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})\right], \tag{4}$$

que es la función generadora de la función de Bessel Modificada de primera clase $I_n(x)$.

La ecuación (4) se puede utilizar para derivar dos reglas de suma que involucran índices par e impar. Escribiendo

$$S_1(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[t^{2n}I_{2n}(x) + t^{2n+1}I_{2n+1}(x)\right]$$

$$S_1(x,-t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[t^{2n}I_{2n}(x) - t^{2n+1}I_{2n+1}(x)\right]$$

las que al sumar o restar conducen a los siguientes resultados

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_{2n}(x) = \cosh\left[\frac{x}{2}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] \qquad (t>0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{senh}\left[\frac{x}{2}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] \qquad (t>0) \tag{5}$$

b) Series del tipo

$$S_2(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n I_n^2(x), \qquad 0 < |t| < \infty \tag{6}$$

Multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (1) se obtiene

$$\frac{2n}{x}\frac{d}{dx}I_n^2(x) = I_{n-1}^2(x) - I_{n+1}^2(x) \tag{7}$$

Además multiplicando por t^{n-1} y sumando sobre n se obtiene

$$\frac{2}{x}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}S_2(x,t) = \left(1-\frac{1}{t^2}\right)S_2(x,t) \tag{8}$$

$$con\ S_2(0,t) = 1, \quad S_2(x,1) = I_o(2x)$$

cuya solución es

$$S_2(x,t) = I_o\left[x\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] \tag{9}$$

Puede obtenerse una representación integral para el resultado (9) usando

$$I_n^2(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} I_{2n}(2x\cos\theta)\,d\theta \tag{10}$$

Multiplicando (10) por t^n, tomando suma sobre n en ambos miembros y usando la primera de las ecuaciones (5), resulta

$$S_2(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cosh\left[x\frac{t+1}{\sqrt{t}}\cos\theta\right]d\theta \tag{11}$$

Luego

$$I_0\left[x\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cosh\left[x\frac{t+1}{\sqrt{t}}\cos\theta\right]d\theta \tag{12}$$

c) Series del tipo

$$\overline{S}_1(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} t^n I_n(x) \tag{13}$$

Usando la misma técnica que condujo a (3), obtenemos para $\overline{S}_1(x,t)$ la siguiente ecuación diferencial de primer orden no- homogénea.

$$2\frac{\partial}{\partial x}\bar{S}_1(x,t) = \left(t+\frac{1}{t}\right)\bar{S}_1(x,t) + \left[I_{-1}(x) - \frac{1}{t}I_0(x)\right], \quad \bar{S}_1(0,t)=1 \tag{14}$$

cuya solución es de la forma

$$\bar{S}_1(x,t) = S_1(x,t)\left[1+\frac{1}{2}\int_0^x dv S_1(v,-t) \times \left[I_{-1}(v) - \frac{1}{t}I_0(v)\right]\right] \tag{15}$$

Usando el mismo argumento que condujo a las ecs. (5), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n I_{2n}(x) = \cosh\left[\frac{x}{2}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] + \frac{1}{2}\int_0^x dv \cosh\left[\frac{x-v}{2}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] I_{-1}(v) - \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^x dv \cosh\left[\frac{x-v}{2}\left(\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right)\right] I_0(v) \tag{16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n I_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} senh\left[\frac{x}{2}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] + \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^x dv\, senh\left[\frac{x-x'}{2}\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] I_{-1}(v) - \frac{1}{2t}\int_0^x dv \cosh\left[\frac{x-v}{2}\cdot\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] I_0(v)$$

d) Series del tipo

$$\bar{S}_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n I_n^2(x) \tag{17}$$

Usando la representación integral (10), junto con la primera de las ecuaciones (16) y la ecuación (12) resulta

$$\bar{S}_2(x,t) = I_0\left[x\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2x\cos\theta} d\epsilon \times \left\{\cosh\left[\frac{1}{2}(2x\cos\theta - \epsilon)\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] I_{-1}(\epsilon) - \frac{1}{\sqrt{t}} senh\left[\frac{1}{2}(2x\cos\theta - \epsilon)\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right] I_0(\epsilon)\right\} \tag{18}$$

Agradecimiento: Al Prof. S. L. Kalla por sus sugerencias y al CONDES por su financiamiento parcial.

Bibliografía.

1.- Dattoli, G., and Dipace, A.: "Remarks on the derivation of sum rules of special functions", Nuovo Cimento, Vol 87 B, No. 1, (1985) 50-54.

2.- Dattoli, G., Giannessi, L., Richetta, M., Torre, A., "Miscellaneous results on infinite series of Bessel Functions", Nuovo Cimento, Vol 103 B, No. 2, (1989), 149-159.

3.- Lebedev, N. N.: "Special Functions and their Applications". Dover Pub., Inc. New York, 1972.

4.- Watson, G. N.: "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", 2nd. Edition, Cambridge Univ. Press, 1980.

Recibido el 21 de Febrero de 1992
En forma revisada el 18 de Enero de 1993