Rev. Téc. Univ. Zulia, Vol 16, No. 2, 177-184, 1993

Algunos resultados sobre la ecuación de Difusión Fraccional

Xiomara Arrieta de Uzcátegui y Shyam L. Kalla.
División de Postgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia

Resumen

En el presente trabajo se tratan problemas que involucran Ecuaciones Diferenciales Parciales de gran importancia, dichas ecuaciones describen muchos procesos físicos como por ejemplo conducción de calor, difusión, radiactividad. Se generaliza la ecuación integrodiferencial que se encuentra en los problemas de difusión y de onda fraccionales dada por W. Wyss y W. Schneider (Fractional Diffusion and Wave Equations: J. Math. Phys. 30 (1). 134-144). La teoría sobre la función H de Fox y las transformadas de Laplace y Mellin se usan para resolver el problema. Se consideran algunos ejemplos tomando funciones adecuadas. Se obtienen resultados conocidos como casos particulares de la forma generalizada aquí presentada.

Palabras Claves: Difusión, onda, ecuación fraccional.

Some results on the Fractional Diffusion equation

Abstract

This work deals with problems that involve important Partial Differential Equations describing many physical proccess, for example, conduction of heat, diffusion, radiactivity, etc. We generalize the integrodifferential equation that appear in the problems of the fractional diffusion and wave given by W. Wyss y W. Schneider (Fractional Diffusion and Wave Equations: J. Math. Phys., (30) (1) 134-144). The theory on the H. function of Fox and the Laplace and Mellin transforms are used to solve the problem. We consider some example taking convenient functions. Some known results follow as special cases of the general formulas presented here.

Key Words: Diffusion, wave, fractional equation.

Introducción

Dentro de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes en las Ciencias Aplicadas está la ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Es muy conocida su importancia en el modelo de conducción de calor, procesos de difusión y flujo a través de un medio poroso, así como también en radiactividad y otros procesos físicos [1, 5].

Las ecuaciones de difusión y de onda fraccionales [7, 10, 11, 13] se obtienen al reemplazar en las ecuaciones de difusión y de onda clásicas, la derivada respecto al tiempo, de primero y segundo orden, respectivamente, por una derivada fraccional de orden α con $0<\alpha\leq 2$. Si $0<\alpha \leq 1$ se habla de una ecuación de difusión fraccional y si $1<\alpha\leq 2$ de una ecuación de onda fraccional.

En los trabajos realizados recientemente por W. Wyss y W. Schneider [10, 11, 13] se resuelven las ecuaciones de difusión y de onda fraccionales, las cuales aparecen expresadas como ecuaciones integrodiferenciales.

En el presente trabajo se generaliza la ecuación integrodiferencial que conduce a los problemas de difusión y de onda fraccionales. Se resuelven algunos ejemplos tomando funciones adecuadas. Resultados conocidos se obtienen como casos particulares de la forma generalizada aquí presentada.

Ecuación Integrodiferencial de Wyss y Schneider.

En los trabajos realizados por Wyss y Schneider [10, 11, 13] se resuelven las ecuaciones de difusión y de onda fraccionales, las cuales se expresan mediante la ecuación integrodiferencial [10]:

$$Z(t)=\sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{K!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau\, (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau) \tag{1}$$

con $m - 1 < \alpha \leq m,\ m \in \mathbb{N},\ t > 0$ (2)

donde y está relacionada con Z por medio de:

$$y = \phi\,(Z) \tag{3}$$

Los autores consideran el caso $y = \phi\,(Z) = -\lambda Z(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}+$.

A continuación, consideremos el caso $y = \phi(Z) = -\lambda Z^{(n)}(t)$, $n<m$, $n<\alpha$, $K<\alpha$, $n, K = 0, 1, 2,$ (4)

Sustituyendo en la Ec. (1), tenemos:

$$Z(t)=\sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{K!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau\, (t-\tau)^{\alpha-1} (-\lambda Z^{(n)}(\tau)) \tag{5}$$

Aplicando la transformada de Laplace [2, 9]

$$\tilde{Z}\,(p) = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_k\, p^{\alpha-k-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda C_i\, p^{n-i-1}}{p^{\alpha} + \lambda p^{n}} \tag{6}$$

donde se ha usado la condición inicial [10]:

$$Z^{(k)}(0) = C_k,\ 0 \leq K \leq m-1,\ m \in \mathbb{N} \tag{7}$$

Aplicando la relación Mellin-Laplace, [2, 3, 8] dada por:

$$\hat{\phi}\,(s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} dp\, p^{-s}\, \tilde{\phi}\,(p),\ \mathrm{Re}(s)>0 \tag{8}$$

resulta:

$$\hat{Z}(s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} dp\, p^{-s} \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_k\, p^{\alpha-k-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda C_i\, p^{n-i-1}}{p^{\alpha} + \lambda p^{n}} \right) \tag{9}$$

$\mathrm{Re}(s) > 0$

Cambiando el orden de la integral y la suma en base a la convergencia absoluta:

$$\hat{Z}(s)=\sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{p^{\alpha-k-s-1}\, dp}{p^{\alpha} + \lambda p^{n}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda\, C_i}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{p^{n-i-s-1} dp}{p^{\alpha} + \lambda\, p^{n}} \tag{10}$$

Haciendo cambio de variable resulta:

$$\hat{Z}(s)= (\alpha-n)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k\, \lambda^{\frac{-(k+s)}{\alpha-n}}}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{-(k+s)}{\alpha-n}}}{(1+x)}\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha-n)^{-1} \frac{C_i\, \lambda^{\frac{-(i+s)}{\alpha-n}}}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{-(i+s)}{\alpha-n}-1}}{(1+x)}\, dx \tag{11}$$

Expresando el resultado en términos de la función Gamma [4]:

$$\hat{Z}(s)= (\alpha-n)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} C_k\, \lambda^{\frac{-(k+s)}{\alpha-n}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{(k+s)}{\alpha-n}\right) \Gamma\left(\frac{(k+s)}{\alpha-n}\right)}{\Gamma(1-s)} + (\alpha-n)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i\, \lambda^{\frac{-(i+s)}{\alpha-n}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{(i+s)}{\alpha-n}\right) \Gamma\left(-\frac{(i+s)}{\alpha-n}\right)}{\Gamma(1-s)}$$

donde $\frac{k+s}{\alpha-n} \neq 1, 2, 3, 4, \ldots$ y $\frac{i+s}{\alpha-n} \neq 0, 1, 2, 3 \ldots$ respectivamente (12)

Usando la expresión de la transformada de Mellin de la Función H de Fox e invirtiendo resulta:

$$Z(t) = (\alpha-n)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} C_k \lambda^{\frac{-k}{\alpha-n}} H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha-n}} t \,\middle|\, \begin{matrix} (\frac{k}{\alpha-n}, \frac{1}{\alpha-n}) \\ (\frac{k}{\alpha-n}, \frac{1}{\alpha-n}), (0, 1) \end{matrix}\right)$$

$$+ (\alpha-n)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} C_i \lambda^{\frac{-i}{\alpha-n}} H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha-n}} t \,\middle|\, \begin{matrix} (1+\frac{i}{\alpha-n}, \frac{1}{\alpha-n}) \\ (1+\frac{i}{\alpha-n}, \frac{1}{\alpha-n}), (0, 1) \end{matrix}\right) \quad (13)$$

Usando la propiedad de la función H de Fox [6,12]:

$$z^{\sigma} H^{m\,n}_{p\,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right) = H^{m\,n}_{p\,q}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_j+\sigma\alpha_j, \alpha_j)_{1,p} \\ (b_j+\sigma\beta_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right) \quad (14)$$

con $\sigma = -K$ y $\sigma = -i$ respectivamente, tenemos:

$$Z(t) = (\alpha'-n)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} C_k t^k H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha-n}} t \,\middle|\, \begin{matrix} (0, \frac{1}{\alpha-n}) \\ (0, \frac{1}{\alpha-n}), (-k, 1) \end{matrix}\right)$$

$$+ (\alpha-n)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} C_i t^i H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha-n}} t \,\middle|\, \begin{matrix} (1, \frac{1}{\alpha-n}) \\ (1, \frac{1}{\alpha-n}), (-i, 1) \end{matrix}\right) \quad (15)$$

Introduciendo la representación en serie de la Función H [6, 12] nos queda:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_k}{\Gamma(1+k+j(\alpha-n))} (-\lambda)^j t^{k+j(\alpha-n)}$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_i}{\Gamma(1+i+(j+1)(\alpha-n))} (-\lambda)^{j+1} t^{i+(j+1)(\alpha-n)}$$

$\alpha > n, \lambda \in R^+$ (16)

Haciendo α-n= p/2, p= 2, 3, 4, ... y separando la suma sobre j en términos pares e impares, la ec. (16) nos queda:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k t^k \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^p)^j}{\Gamma(1+k+pj)} - \lambda t^{p/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^p)^j}{\Gamma(1+k+p/2+pj)}\right]$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda C_i t^{i+p/2} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^p)^j}{\Gamma(1+i+p/2+pj)} - \lambda t^{p/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^p)^j}{\Gamma(1+i+p+pj)}\right] \quad (17)$$

Utilizando la fórmula de multiplicación de Gauss para la función Gamma:

$$\Gamma(pz) = (2\pi)^{(1-p)/2} p^{-1/2+pz} \prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma\left(z+\frac{\upsilon}{p}\right) ;$$

$p = 2, 3, 4, \ldots$ (18)

resulta:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k t^k$$

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t^p)^j}{(2\pi)^{(1-p)/2}p^{1/2+k+pj}\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{1+k+v}{p}+j\right)}\right.$$

$$\left.-\lambda t^{p/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t^p)^j}{(2\pi)^{(1-p)/2}p^{1/2+k+p/2+pj}\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{1+k+p/2+v}{p}+j\right)}\right]$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda C_i\, t^{i+p/2}$$

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t^p)^j}{(2\pi)^{(1-p)/2}p^{1/2+i+p/2+pj}\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{1+i+p/2+v}{p}+j\right)}\right.$$

$$\left.-\lambda t^{p/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t^p)^j}{(2\pi)^{(1-p)/2}p^{1/2+i+p+pj}\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma\left(\frac{1+i+p+v}{p}+j\right)}\right] \quad (19)$$

Usando la relación $(a)_j=\Gamma(a+j)\,/\,\Gamma(a)$ ordenando y expresando en términos de la Función Hipergeométrica Generalizada

$$Z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}C_k\left(\frac{t}{p}\right)^k(2\pi)^{1/2(p-1)}p^{-1/2}$$

$$\left[\frac{1}{\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma(\alpha_v)}\,{}_1F_p\left(1;\alpha_v;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda(t/p)^{p/2}}{\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma(\beta_v)}\,{}_1F_p\left(1;\beta_v;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right)\right]$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda C_i\left(\frac{t}{p}\right)^{i+p/2}(2\pi)^{(p-1)/2}p^{-1/2}$$

$$\left[\frac{1}{\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma(\gamma_v)}\,{}_1F_p\left(1;\gamma_v;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda(t/p)^{p/2}}{\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma(\delta_v)}\,{}_1F_p\left(1;\delta_v;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right)\right] \quad (20)$$

donde

$$\alpha_v=\frac{1+k+v}{p};\ \beta_v=\frac{1+k+p/2+v}{p};\ \gamma_v=\frac{1+i+p/2+v}{p};$$

$$\delta_v=\frac{1+i+p+v}{p}$$

$${}_pF_q(\alpha_r:\beta_s:z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k\, z^k}{\prod_{s=1}^{q}(\beta_s)_k\, K!}$$

Si hacemos $n=0$ en esta ecuación obtenemos para la ecuación:

$$Z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_k}{K!}t^k+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t d\tau\,(t-\tau)^{\alpha-1}(-\lambda Z(\tau)) \quad (21)$$

$y=-\lambda Z(t),\ \lambda\in\mathbb{R}^+$

la siguiente solución:

$$Z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{C_k}{\Gamma(1+k+j\alpha)}(-\lambda)^j\, t^{k+j\alpha} \quad (22)$$

este es el mismo resultado obtenido por Wyss y Schneider [10].

Si $\alpha=p/2$, $p=2,3,4,\ldots$ la Ec. (22) queda expresada en términos de la función hipergeométrica generalizada de la siguiente manera:

$$Z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}C_k\left(\frac{t}{p}\right)^k(2\pi)^{(p-1)/2}p^{-1/2}\ .$$

$$\left[\frac{1}{\prod_{v=0}^{p-1}\Gamma(\alpha_v)}\,{}_1F_p\left(1;\alpha_v;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right)\right.$$

$$- \frac{\lambda (t/p)^{p/2}}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\beta_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1;\beta_\upsilon;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \Bigg] \tag{23}$$

donde

$$\alpha_\upsilon = \left(\frac{1+k+\upsilon}{p}\right); \qquad \beta_\upsilon = \left(\frac{1+k+p/2+\upsilon}{p}\right)$$

Si hacemos n = 1 obtenemos para la ecuación:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau \, (t-\tau)^{\alpha-1} \left(-\lambda Z'(\tau)\right) \tag{24}$$

$$y = -\lambda Z'(t), \ \lambda \in I\!R^+$$

la solución:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_k}{\Gamma(1+k+j(\alpha-1))} (-\lambda)^j \, t^{k+j(\alpha-1)} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_0}{\Gamma(1+(j+1)(\alpha-1))} (-\lambda)^{j+1} \, t^{(j+1)(\alpha-1)}$$

$$\alpha > 1 \tag{25}$$

Para α-1= p/2 ; p= 2,3,4,... la Ec. (25) nos queda:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k \left(\frac{t}{p}\right)^k (2\pi)^{(p-1)/2} p^{-1/2}$$

$$\left[\frac{1}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\alpha_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1;\alpha_\upsilon;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right) - \frac{\lambda (t/p)^{p/2}}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\beta_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1;\beta_\upsilon;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right]$$

$$+ \lambda \, C_0 \left(\frac{t}{p}\right)^{p/2} (2\pi)^{(p-1)/2} p^{-1/2}$$

$$\left[\frac{1}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\gamma_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1;\gamma_\upsilon;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right) - \frac{\lambda (t/p)^{p/2}}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\delta_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1;\delta_\upsilon;\lambda^2\left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right] \tag{26}$$

donde

$$\alpha_\upsilon = \frac{1+k+\upsilon}{p}; \ \beta_\upsilon = \frac{1+k+p/2+\upsilon}{p}; \gamma_\upsilon = \frac{1+p/2+\upsilon}{p};$$

$$\delta_\upsilon = \frac{1+p+\upsilon}{p}$$

Una Ecuación Integrodiferencial Generalizada

Además del caso dado por Wyss y Schneider [10] de la ecuación (1) podemos considerar otra generalización de la siguiente manera:

$$Z^{(h)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau \, (t-\tau)^{\alpha-1} \, y(\tau) \tag{27}$$

$$m-1 < \alpha \leq m, \ m \in I\!N$$

Ahora, consideremos el caso

$$y = \phi(Z) = -\lambda Z^{(n)}(t), \ n < m, \ h < m,$$
$$n < \alpha, \ h < \alpha, \ n, h = 0, 1, 2, . \tag{28}$$

sustituyendo en (21) resulta:

$$Z^{(h)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{k!} t^k - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau \, (t-\tau)^{\alpha-1} \, Z^{(n)}(\tau) \tag{29}$$

Aplicando la transformada de Laplace [2,3,9]

$$\tilde{\tilde{Z}}(p)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_k\,p^{\alpha-k-1}}{p^{\alpha+h}+\lambda p^{n}}+\sum_{r=0}^{h-1}\frac{C_r\,p^{\alpha+h-r-1}}{p^{\alpha+h}+\lambda p^{n}}$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda C_i\,p^{n-i-1}}{p^{\alpha+h}+\lambda p^{n}} \qquad (30)$$

Aplicando la relación Mellin-Laplace, (Ec. (8)) resulta:

$$\tilde{\tilde{Z}}(s)=\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}dp\,p^{-s}\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_k\,p^{\alpha-k-1}}{p^{\alpha+h}+\lambda p^{n}}\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{h-1}\frac{C_r\,p^{\alpha+h-r-1}}{p^{\alpha+h}+\lambda p^{n}}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda C_i\,p^{n-i-1}}{p^{\alpha+h}+\lambda p^{n}}\right\} \qquad (31)$$

Cambiando el orden de la integral y la suma en base a la convergencia absoluta y factorizando:

$$\tilde{\tilde{Z}}(s)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_k}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{p^{\alpha-k-s-n-1}}{\lambda\left(1+\frac{p^{\alpha+h-n}}{\lambda}\right)}dp$$

$$+\sum_{r=0}^{h-1}\frac{C_r}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{p^{\alpha+h-r-s-n-1}}{\lambda\left(1+\frac{p^{\alpha+h-n}}{\lambda}\right)}dp$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_i}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,p^{-i-s-1}}{\lambda\left(1+\frac{p^{\alpha+h-n}}{\lambda}\right)}dp \qquad (32)$$

Haciendo cambio de variable, resulta:

$$\hat{Z}(s)=(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_k\,\lambda^{\frac{-(k+s+h)}{\alpha+h-n}}}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{-(k+s+h)}{\alpha+h-n}}}{(1+x)}dx$$

$$+(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{r=0}^{h-1}\frac{C_r\,\lambda^{\frac{-(s+r)}{\alpha+h-n}}}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{-(s+r)}{\alpha+h-n}}}{(1+x)}dx$$

$$+(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_i\,\lambda^{\frac{-(s+i)}{\alpha+h-n}}}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{-(s+i)}{\alpha+h-n}-1}}{(1+x)}dx \qquad (33)$$

Expresando este resultado en términos de la función Gamma [4]:

$$\hat{Z}(s)=(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}C_k\,\lambda^{\frac{-(k+s+h)}{\alpha+h-n}}$$

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{(k+s+h)}{\alpha+h-n}\right)\Gamma\left(\frac{k+s+h}{\alpha+h-n}\right)}{\Gamma(1-s)}$$

$$+(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{r=0}^{h-1}C_r\,\lambda^{\frac{-(s+r)}{\alpha+h-n}}\frac{\Gamma\left(1-\frac{(s+r)}{\alpha+h-n}\right)\Gamma\left(\frac{s+r}{\alpha+h-n}\right)}{\Gamma(1-s)}.$$

$$+(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}C_i\,\lambda^{\frac{-(s+i)}{\alpha+h-n}}\frac{\Gamma\left(1+\frac{(s+i)}{\alpha+h-n}\right)\Gamma\left(\frac{-(s+i)}{\alpha+h-n}\right)}{\Gamma(1-s)}$$

donde $\frac{k+s+h}{\alpha+h-n}\neq 1,2,3,\ldots,\ \frac{s+r}{\alpha+h-n}\neq 1,2,3,\ldots$ y $\frac{s+i}{\alpha+h-n}\neq 0,1,2,\ldots$ respectivamente.

(34)

Usando la expresión de la transformada de Mellin de la función H de Fox e invirtiendo [6,12]

$$Z(t)=(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}C_k\,\lambda^{\frac{-(k+h)}{\alpha+h-n}}$$

$$H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha+h-n}}\,t\left|\begin{matrix}\left(\frac{k+h}{\alpha+h-n},\frac{1}{\alpha+h-n}\right)\\ \left(\frac{k+h}{\alpha+h-n},\frac{1}{\alpha+h-n}\right),(0,1)\end{matrix}\right.\right)$$

$$+(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{r=0}^{h-1}C_r\,\lambda^{\frac{-r}{\alpha+h-n}}$$

$$H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha+h-n}}\,t\left|\begin{matrix}\left(\frac{r}{\alpha+h-n},\frac{1}{\alpha+h-n}\right)\\ \left(\frac{r}{\alpha+h-n},\frac{1}{\alpha+h-n}\right),(0,1)\end{matrix}\right.\right)$$

$$+(\alpha+h-n)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}C_i\,\lambda^{\frac{-i}{\alpha+h-n}}$$

$$H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha+h-n}}\,t\left|\begin{matrix}\left(1+\frac{i}{\alpha+h-n},\frac{1}{\alpha+h-n}\right)\\ \left(1+\frac{i}{\alpha+h-n},\frac{1}{\alpha+h-n}\right),(0,1)\end{matrix}\right.\right) \qquad (35)$$

Usando la propiedad (14) con σ= -(k+h), σ= -r y σ= -i respectivamente, tenemos:

$$
\begin{aligned}
Z(t) = {} & (\alpha + h - n)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} C_k \, t^{k+h} \\
& H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha+h-n}} \, t \left| \begin{matrix} \left(0, \frac{1}{\alpha+h-n}\right) \\ \left(0, \frac{1}{\alpha+h-n}\right), (-k-h, 1) \end{matrix} \right. \right) \\
& + (\alpha + h - n)^{-1} \sum_{r=0}^{h-1} C_r \, t^{r} \\
& H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha+h-n}} \, t \left| \begin{matrix} \left(0, \frac{1}{\alpha+h-n}\right) \\ \left(0, \frac{1}{\alpha+h-n}\right), (-r, 1) \end{matrix} \right. \right) \\
& + (\alpha + h - n)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i \, t^{i} \\
& H^{11}_{12}\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha+h-n}} \, t \left| \begin{matrix} \left(1, \frac{1}{\alpha+h-n}\right) \\ \left(1, \frac{1}{\alpha+h-n}\right), (-i, 1) \end{matrix} \right. \right)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Introduciendo la representación en serie de la función H de Fox, obtenemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
Z(t) = {} & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_k (-\lambda)^j \, t^{[k+h+j(\alpha+h-n)]}}{\Gamma(1+k+h+j(\alpha+h-n))} \\
& + \sum_{r=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_r (-\lambda)^j \, t^{[r+j(\alpha+h-n)]}}{\Gamma(1+r+j(\alpha+h-n))} \\
& - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_i (-\lambda)^{j+1} \, t^{[i+(j+1)(\alpha+h-n)]}}{\Gamma(1+i+(j+1)(\alpha+h-n))}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$\alpha > h, \ \alpha > n, \ \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Si $\alpha + h - n = \frac{p}{2}$, p= 2, 3, 4, ... aplicando el procedimiento utilizado en la Ec. (17), la Ec. (37) nos queda expresada en términos de la función hipergeométrica generalizada de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Z(t) = {} & \sum_{k=0}^{m-1} C_k \left(\frac{t}{p}\right)^{k+h} (2\pi)^{(p-1)/2} \, p^{-1/2} \\
& \left[\frac{1}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\alpha_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1; \alpha_\upsilon; \lambda^2 \left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda (t/p)^{p/2}}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\beta_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1; \beta_\upsilon : \lambda^2 \left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right] \\
& + \sum_{r=0}^{h-1} C_r \left(\frac{t}{p}\right)^{r} (2\pi)^{(p-1)/2} \, p^{-1/2} \\
& \left[\frac{1}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\gamma_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1; \gamma_\upsilon; \lambda^2 \left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda (t/p)^{p/2}}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\delta_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1; \delta_\upsilon : \lambda^2 \left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right] \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda C_i \left(\frac{t}{p}\right)^{i+p/2} (2\pi)^{(p-1)/2} \, p^{-1/2} \\
& \left[\frac{1}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\sigma_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1; \sigma_\upsilon; \lambda^2 \left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda (t/p)^{p/2}}{\prod_{\upsilon=0}^{p-1} \Gamma(\varphi_\upsilon)} \, {}_1F_p\left(1; \varphi_\upsilon : \lambda^2 \left(\frac{t}{p}\right)^p\right) \right]
\end{aligned}
\tag{38}
$$

donde

$$\alpha_\upsilon = \frac{1+k+h+\upsilon}{p} \ ; \quad \beta_\upsilon = \frac{1+k+h+p/2+\upsilon}{p} \ ;$$

$$\gamma_\upsilon = \frac{1+r+\upsilon}{p} \ ; \quad \delta_\upsilon = \frac{1+r+p/2+\upsilon}{p} \ ; \quad \sigma_\upsilon = \frac{1+i+p/2+\upsilon}{p} \ ;$$

$$\varphi_\upsilon = \frac{1+i+p+\upsilon}{p}$$

Casos Particulares

- Si h = 0 y n = 0 en (37) se tiene el resultado (22), igual al obtenido por Wyss y Schneider [10].

- Si h = 0 y n = 1 obtenemos el resultado (25).

- Si h = 1 y n = 0 obtenemos para la ecuación:

$$Z'(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{K!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau\, (t-\tau)^{\alpha-1}\, y(\tau) \tag{39}$$

$$y = -\lambda Z(t),\ \lambda \in \mathbb{R}+$$

el siguiente resultado:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_k (-\lambda)^j\, t^{[k+1+j(\alpha-1)]}}{\Gamma(2+k+j(\alpha+1))} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_0 (-\lambda)^j\, t^{j(\alpha-1)}}{\Gamma(1+j(\alpha+1))} \tag{40}$$

- Tomando n = 0 obtenemos para la ecuación

$$Z^{(h)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k}{K!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t d\tau\, (t-\tau)^{\alpha-1}\, y(\tau)$$

$$m-1 < \alpha \le m,\ m \in \mathbb{N},\ h < m,\ h = 0, 1, 2, \ldots \tag{41}$$

$$y = -\lambda Z(t),\ \lambda \in \mathbb{R}+$$

el siguiente resultado:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_k (-\lambda)^j\, t^{[k+h+j(\alpha+h)]}}{\Gamma(1+k+h+j(\alpha+h))} + \sum_{r=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_k (-\lambda)^j\, t^{[r+j(\alpha+h)]}}{\Gamma(1+r+j(\alpha+h))} \tag{42}$$

- Para h = 0 obtenemos el resultado (16).

De esta manera, tomando valores particulares de h y n se pueden conseguir varios casos especiales.

Referencias

[1] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: "Conduction of Heat in Solids": Oxford University Press. 1959.

[2] Davies, B.: "Integral Transforms and their Applications". Applied Mathematical Sciences. Volume 25, Springer Verlag. New York Inc. 1978.

[3] Erdelyi, A. Editor: "Tables of Integral Transforms", Vol. I, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. 1954.

[4] Gradsteyn, I.S., Ryzhik, I.M.: "Tables of Integrals, Series and Products". Corrected and Enlarged Edition. Academic Press. Inc. 1980.

[5] Hill, J. and Dewynne, J.: "Heat Conduction". Blackwell Scientific Publications. 1987.

[6] Mathai, A.M., Saxena, R.K.: "The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines" John Wiley and Sons, Inc. New York. 1978.

[7] Nigmatullin, R.R.: "The Realization of the Generalized Transfer Equation in a Medium with Fractal Geometry" Phys. Status. Solidi B 133, 425. (1986).

[8] Oberhettinger, F.: "Tables of Mellin Transforms". Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1974.

[9] Oberhettinger, F. and Badii, L.: "Tables of Laplace Transform". Springer-Verlag. New York-Heidelberg-Berlin. 1973.

[10] Schneider, W.R. and Wyss, W.: "Fractional Diffusion and Wave Equations". J. Math. Phys. 30 (1). January 1989, 134-144.

[11] Schneider, W.R.: "Fractional Diffusion". Dynamics and Stochastic Processes, Theory and Applications. Lecture Notes in Physics, Vol. 355, Springer, Heidelberg, 1990, 276-286.

[12] Srivastava, H.M., Gupta, K.C. and Goyal, S.P.: "The H-Functions of One and Two Variables with Applications". South Asia Publishers, New Delhi, 1982.

[13] Wyss, W.: "The Fractional Diffusion Equation". J. Math. Phys 27 (11). November 1986, 2782-2785.

Recibido el 22 de Abril de 1992

En forma revisada el 30 de Octubre de 1992