Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 17, No. 1, 37-42, 1994

A study of Struve's incomplete cylindrical function

Magdely Valbuena M.

Centro de Investigación de Matemática Aplicada
Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia

Abstract

Cylindrical functions are among the most important special functions, having many diverse applications in physics, engineering, mathematical analysis, astronomy, and so on. This paper centers on Struve's Incomplete Cylindrical Function $H_\upsilon(w,z)$: its definition and representations in series in terms of the Hypergeometric Functions and of Kampé de Fériet Generalized Hipergeometric Function. Some relations of recurrence and various integral transforms are then calculated, arriving at some known specific cases. An asymptotic expansion is provided for $H_0(\theta,z)$.

Key words: Struve's Function, integral transforms, asymptotic expansion.

Un estudio sobre la función cilíndrica incompleta de Struve

Resumen

Las Funciones Cilíndricas están entre las más importantes funciones especiales, con muy diversas aplicaciones en física, ingeniería, análisis matemático, astronomía, etc. El presente trabajo se centra en la Función Cilíndrica Incompleta de Struve $H_\upsilon(w,z)$: su definición y representaciones en serie en términos de la Función Hipergeométrica y de la Función Hipergeométrica Generalizada de Kampé de Fériet. Se calculan algunas relaciones de recurrencia, varias transformadas integrales y se obtienen algunos casos particulares conocidos. Finalmente se presenta un desarrollo asintótico para $H_0(\theta,z)$.

Palabras claves: Función de Struve, transformadas integrales, desarrollo asintótico.

Introducción

Las Funciones Cilíndricas aparecen en problemas de movimiento de líquidos viscosos, elasticidad, electrostática, hidrodinámica, ingeniería nuclear, problemas de valores de contorno en electro-magnetismo y transferencia de calor, problemas de valores propios en mecánica cuántica y hasta en ingeniería biomédica y en economía. Dichas funciones tienen representaciones integrales en la forma de Poisson y Bessel para las cuales los contornos de integración están completamente determinados. Sin embargo en la práctica, frecuentemente es necesario estudiar integrales análogas en las cuales los contornos no están determinados. Tales integrales se denominan funciones cilíndricas incompletas; de allí la necesidad de su estudio [1, 2, 3]. En este trabajo nos concretamos a la Función Cilíndrica Incompleta de Struve $H_\upsilon(w,z)$.

Definición y representación en serie de $H_\upsilon(w,z)$

La función incompleta de Struve en la forma Poisson se define como:

$$H_\upsilon(w,z)=\frac{2z^\upsilon}{A_\upsilon}\int_0^w sen(zcos\theta)sen^{2\nu}\theta d\theta \qquad (1)$$

donde $A_\upsilon = 2^\upsilon\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $Re(\upsilon+\frac{1}{2})>0$.

Usando en (1) la representación en serie de sen(zcosθ), intercambiando la integración con la serie y resolviendo la integral tenemos

$$H_\upsilon(w,z)=\frac{z^\upsilon}{A_\upsilon}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\beta_{sen^2w}(\upsilon+\frac{1}{2},\ m+1)\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \qquad (2)$$

donde β_x (a,b) es la función beta incompleta.

De la relación [4, fórmula 6.6.8, pg. 263]

$$\beta_x(a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt=$$

$$a^{-1}x^a{}_2F_1(a,1-b;a+1:x) \qquad (3)$$

$$H_\upsilon(w,z)=\frac{z^\upsilon}{A_\upsilon}\frac{sen^{2\upsilon+1}w}{\upsilon+½}\sum_{m=0}^{\infty}$$

$${}_2F_1(\upsilon+\frac{1}{2},-m;\ \upsilon+\frac{3}{2}:sen^2w)$$

$$(-1)^m\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \qquad (4)$$

De (4) usando las relaciones conocidas para ${}_2F_1$ (α,β,γ:z) ecuaciones (9.5.3), (9.5.7) y (9.8.1) de [5], obtenemos que:

$$H_\upsilon(w,z)=H_\upsilon(z)-\frac{z^{\upsilon+1}}{A_\upsilon}sen^{2\upsilon-1}w\cos^2 w.$$

$$F^{0:1;2}_{1:1;0}\left(\begin{matrix}-:1;-\upsilon+\frac{1}{2},1 \\ 2:\frac{3}{2};\ \text{——}\end{matrix}:-\left(\frac{zcosw}{2}\right)^2,-ctg^2w\right) \qquad (5)$$

$$Re(\upsilon+\frac{1}{2})>0,\ |zcosw|<2,\ |ctgw|<1$$

donde:

$F^{p:r;u}_{q:s;v}$ denota una serie hipergeométrica generalizada de Kampé de Fériet [6], la cual converge en los siguientes casos:

1) p+r<q+s+1, p+u<q+v+1, |x|<∞, |y|< ∞

2) p+r=q+s+1, p+u=q+v+1 y

i) $|x|^{1/(p-q)}+|y|^{1/(p-q)}<1$ si p>q

ii) máx {|x|,|y|}<1 si p≤q

3) p+r+u<q+s+v+1 ∀x

4) p+r+u=q+s+v+1

i) p=q |x|<1, |y|<1

ii) p-q<0, |x|<1, |y|<1

iii) p-q>u>0, $|x^{1/u}|+|y^{1/u}|<1$.

Relaciones de recurrencia de $H_\upsilon(w,z)$

Algunas relaciones de recurrencia para la Función Cilíndrica Incompleta de Struve son:

$$\frac{d}{dz}\left(z^\upsilon H_\upsilon(w,z)\right)=z^\upsilon H_{\upsilon-1}(w,z)-$$

$$\frac{2z^{2\upsilon-1}}{A_\upsilon}sen^{2\upsilon-1}w\ cosw\ sen(zcosw) \qquad (6)$$

Para llegar a este resultado, reemplazamos a $H_\upsilon(w,z)$ por su representación integral, derivando luego respecto a z e integramos por partes.

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-\upsilon}H_\upsilon(w,z)\right)=\frac{2}{A_{\upsilon+1}}sen^{2\upsilon+1}w\ .$$

$$\cos(zcosw)-z^{-\upsilon}H_{\upsilon+1}(w,z) \qquad (7)$$

Haciendo un procedimiento similar al explicado para calcular (6) obtenemos el resultado (7).

$$H_{\upsilon-1}(w,z)-\frac{2\upsilon}{z}H_\upsilon(w,z)+H_{\upsilon+1}(w,z)=$$

$$\frac{2z^{\upsilon-1}}{A_\upsilon}sen^{2\upsilon-1}w\ cosw\ sen(zcosw)$$

$$+\frac{2z^\upsilon}{A_{\upsilon+1}}sen^{2\upsilon+1}w\ cos(zcosw) \qquad (8)$$

Para obtener este resultado desarrollamos la derivada en (6) y multiplicamos por $z^{-\upsilon}$ y en (7) desarrollamos la derivada y multiplicamos por z^{υ} restando luego el primer resultado del segundo.

$$H_{\upsilon-1}(w,z) - 2H'_{\upsilon}(w,z)-H_{\upsilon+1}(w,z) =$$

$$\frac{2z^{\upsilon-1}}{A_{\upsilon}}sen^{2\upsilon-1}w \cos w\, sen(z\cos w)$$

$$-\frac{2z^{\upsilon}}{A_{\upsilon+1}}sen^{2\upsilon+1}w\, cos(z\cos w) \qquad (9)$$

Hacemos igual procedimiento al explicado para obtener (8) pero sumando el primer resultado al segundo obtenemos el resultado dado en la ecuación (9).

Si $w=\frac{\pi}{2}$ obtenemos las fórmulas de recurrencia conocidas para la Función Asociada de Struve [7].

Transformadas integrales de H_{υ} (a,bx)

Presentamos algunas transformadas integrales de $H_{\upsilon}(a,bx)$ tales como la de Laplace, β-integral, transformada K, integral tipo Weber y algunos casos particulares.

Sea $H_{\upsilon}(a,bx)$ definida por (5)

Transformada de Laplace

$$L\left[x^{\lambda}H_{\upsilon}(a,bx);p\right] =$$

$$\frac{b^{\upsilon+1}\,\Gamma(\lambda+\upsilon+2)}{p^{\lambda+\upsilon+2}}\,\frac{1}{2^{\upsilon}\Gamma(1/2)\Gamma(\upsilon+3/2)}$$

$${}_3F_2\left(1,\frac{\lambda+\upsilon+2}{2},\frac{\lambda+\upsilon+3}{2};\upsilon+\frac{3}{2},\frac{3}{2};-\frac{b^2}{p^2}\right)$$

$$-\frac{sen^{2\upsilon-1}a\cos^2 a}{A_{\upsilon}}.$$

$$F^{0,3,2}_{1,1,0}\left[\begin{matrix} - : 1,\frac{\lambda+\upsilon+2}{2},\frac{\lambda+\upsilon+3}{2}; -\upsilon+\frac{1}{2},1 \\ 2 : \quad \frac{3}{2} \quad ;\text{——} \end{matrix} : -\frac{b^2\cos^2 a}{p^2}, -ctg^2 a\right] \qquad (10)$$

$$Re(\lambda+\upsilon)>-2,\ Re\,|p|>|Imb|,$$

$$máx\left\{\left|\frac{b^2\cos^2 a}{p^2}\right|,\ |ctg a|\right\}<1.$$

Transformada K

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda}K_{\mu}(px)H_{\upsilon}(a,bx)dx = \frac{2^{\lambda}b^{\upsilon+1}}{\sqrt{\pi}\,p^{\lambda+\upsilon+2}}\cdot$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\upsilon-\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\upsilon+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma(\upsilon+1/2)}\cdot$$

$$\left\{\frac{1}{\upsilon+\frac{1}{2}}\cdot{}_3F_2\left(1,\frac{\lambda+\upsilon-\mu+2}{2},\frac{\lambda+\upsilon+\mu+2}{2};\upsilon+\frac{3}{2},\frac{3}{2};-\frac{b^2}{p^2}\right)\right.$$

$$-sen^{2\upsilon-1}a\cos^2 a\,.$$

$$\left.F^{0,3,2}_{1,1,0}\left[\begin{matrix} - : 1,\frac{\lambda+\upsilon-\mu+2}{2},\frac{\lambda+\upsilon+\mu+3}{2}; -\upsilon+\frac{1}{2},1 \\ 2 : \quad \frac{3}{2} \quad ;\text{——} \end{matrix} : -\frac{b^2\cos^2 a}{p^2}, -ctg^2 a\right]\right\} \qquad (11)$$

$$Re(p)>|Imb|,\ Re\lambda>|Re\mu|-Re\upsilon-2,$$

$$máx\left\{\left|\frac{b^2\cos^2 a}{p^2}\right|,\ |ctg a|\right\}<1.$$

Integral Tipo Weber

$$\int_0^{\infty} e^{-px^2}xH_{\upsilon}(a,bx)dx = \frac{b^{\upsilon+1}}{2A_{\upsilon}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\upsilon+2}{2}\right)}{p^{\frac{\lambda+\upsilon+2}{2}}}\cdot$$

$$\left\{\frac{1}{\upsilon+\frac{1}{2}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{\upsilon+\lambda+2}{2};\frac{3}{2},\upsilon+\frac{3}{2};-\frac{b^2}{4p}\right)\right.$$

$$-sen^{2\upsilon-1}a\cos^2 a\,.$$

$$F^{0,1,2}_{1,1,0}\left[\begin{matrix} -:1;-\upsilon+\frac{1}{2},1 \\ 2:\frac{3}{2};\_\_\_ \end{matrix} : -\frac{b^2\cos^2 a}{4p}, -ctg^2 a\right]\Bigg\} \quad (12)$$

$b>0, Re(p)>0, Re(\upsilon+\lambda)>-2,$

$|ctg a|<1, Re(2\sqrt{p})>|Re(b\cos a)|$

β-Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{s-1}H_\upsilon(a,bx)dx =$$

$$b^{\upsilon+1}\,\beta(p+\upsilon+1,s)\left\{\frac{1}{2^\upsilon\Gamma(\upsilon+\frac{3}{2})\sqrt{\pi}}\right..$$

$${}_3F_4\left(\frac{p+\upsilon+1}{2},\frac{p+\upsilon+2}{2},1;\frac{3}{2},\upsilon+\frac{3}{2},\frac{p+s+\upsilon+1}{2},\frac{p+s+\upsilon+2}{2};-\frac{b^2}{4}\right)$$

$$-\frac{sen^{2\upsilon-1}a\cos^2 a}{A_\upsilon}.$$

$$F^{0,3,2}_{1,3,0}\left[\begin{matrix} -:1,\frac{p+\upsilon+1}{2},\frac{p+\upsilon+2}{2};-\upsilon+\frac{1}{2},1 \\ 2:\frac{3}{2},\frac{p+\upsilon+s+1}{2},\frac{p+\upsilon+s+2}{2};\_\_\_ \end{matrix} :\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b\cos a}{2}\right)^2,-ctg^2 a\right]\Bigg\} \quad (13)$$

$Re(p+\upsilon)>-1, |ctg a|<1, Re|b\cos a|<2.$

Cálculo de la función incompleta de Struve $H_0(\theta,z)$ para valores grandes de "z"

Función $H_0(\theta,z)$

Si en la ecuación (1) hacemos υ=o obtenemos:

$$H_o(\theta,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta sen(z\cos\varphi)d\varphi \quad (14)$$

Existen dos métodos desarrollados por Fettis en [8] para hallar la expansión asintótica de la función $j_0(z,\theta)$, los cuales son aplicables cuando z es grande. Uno de esos es el desarrollo como una serie asintótica, mientras el segundo es una transformación a una representación integral en la cual el integrando no es oscilatorio para $H_0(\theta,z)$.

Consideremos a $\theta<\pi/2$.

$$H_o(\theta,z)=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} sen(z\cos\varphi)d\varphi-\int_\theta^{\pi/2} sen(z\cos\varphi)d\varphi\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[H_o(z)-\frac{1}{2i}\int_\theta^{\pi/2}(e^{iz\cos\varphi}-e^{-iz\cos\varphi})d\varphi\right] \quad (15)$$

si hacemos x=cosθ y t=cosφ en la ecuación (15) nos queda:

$$H_o(\theta,z)=\frac{2}{\pi}\{H_o(z)+$$

$$\frac{i}{2}\left[\int_0^x \frac{e^{izt}}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int_0^x\frac{e^{-izt}}{\sqrt{1-t^2}}dt\right] \quad (16)$$

Transformación de la función Ho(θ,z) a una integral no oscilatoria

La integral (14) puede ser transformada a una forma adecuada para evaluarla por cuadratura cuando z es grande, y la cual no está restringida en su uso para los valores de θ. Esto se logra por la distorsión en la trayectoria de integración de tal manera que se obtiene un integrando no oscilatorio.

Consideremos la integral

$$\oint_\Gamma \frac{e^{izw}}{\sqrt{1-w^2}}dw$$

la trayectoria de integración en el plano complejo w(=u+iv) es el rectángulo Γ con vértices (0,0), (x,0), (x,N), (0,N) con x<1 y N>0. Ya que el integrando no tiene polos dentro del contorno y permanece monovaluada en todo el rectángulo, la integral de línea total es cero. Si hacemos tender N a infinito, la contribución del segmento {(0,N)-(x,N)} se anula y encontramos que

$$\int_0^x \frac{e^{izu}}{\sqrt{1-u^2}}du=i\int_0^\infty\frac{e^{-zv}}{\sqrt{1+v^2}}dv$$

$$-ie^{izx}\int_0^\infty\frac{e^{-zv}}{\sqrt{v^2-2ivx+(1-x^2)}}dv \quad (17)$$

Evaluando la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-zv}}{\sqrt{1+v^2}} dv$$

por un procedimiento análogo al utilizado por Fettis, Henry E. en [8] tenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-zv}}{\sqrt{1+v^2}} dv \sim -\frac{\pi}{2}\left[E_o(z)+Y_o(z)\right] \tag{18}$$

sustituyendo (18) en (17) nos queda

$$\int_0^{x} \frac{e^{izu}}{\sqrt{1-u^2}} du \sim -i\frac{\pi}{2}\left[E_o(z)+Y_o(z)\right]$$

$$-ie^{izx}\int_0^{\infty} \frac{e^{-zv}}{\sqrt{v^2-2ivx+(1-x^2)}} dv \tag{19}$$

Similarmente si consideramos la integral

$$\oint \frac{e^{-izw}}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

obtenemos

$$\int_0^{x} \frac{e^{-izu}}{\sqrt{1-u^2}} du = i\int_0^{\infty} \frac{e^{zv}}{\sqrt{1+v^2}} dv$$

$$-ie^{-izx}\int_0^{\infty} \frac{e^{zv}}{\sqrt{v^2-2ivx+(1-x^2)}} dv \tag{20}$$

siendo

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{zv}}{\sqrt{1+v^2}} dv \sim \frac{\pi}{2}\left[E_o(z)+Y_o(z)\right] \tag{21}$$

sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (20) tenemos:

$$\int_0^{x} \frac{e^{-izu}}{\sqrt{1-u^2}} du \sim i\frac{\pi}{2}\left[E_o(z)+Y_o(z)\right]$$

$$-ie^{-izx}\int_0^{\infty} \frac{e^{zv}}{\sqrt{v^2-2ivx+(1-x^2)}} dv \tag{22}$$

reemplazando la ecuación (22) y la ecuación (19) en la ecuación (16) resulta

$$H_o(\theta,z) \sim \frac{2}{\pi}\Big\{H_o(z) + \frac{\pi}{2}\left[Y_o(z)-H_o(z)\right] +$$

$$\frac{1}{2}\Big[e^{izx}\int_0^{\infty} \frac{e^{-zv}}{\sqrt{v^2-2ivx+(1-x^2)}} dv$$

$$-\frac{1}{2}e^{-izx}\int_0^{\infty} \frac{e^{zv}}{\sqrt{v^2-2ivx+(1-x^2)}} dv\Big]\Big\} \tag{23}$$

donde:

$$E_o(z) = -H_o(z) \tag{24}$$

puesto que

$$H_o(z) = Y_o(z) + \frac{2}{\pi z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right],$$

$$|\arg z| < \pi \text{ y } |z| \text{ grande} \tag{25}$$

y

$$Y_o(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} sen(z-\pi/4)\left\{1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\} \tag{26}$$

y además para las representaciones integrales en la ecuación (23) puede observarse que para valores muy grandes de z y θ>o se tiene que:

$$H_o(\theta,z) \sim \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{2/\pi z}\; sen(z-\pi/4) + \frac{2}{\pi z} - \frac{1}{z}\right)$$

$$\left\{1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{z\,sen\theta}\right) + O\left(\frac{1}{z\,sen\theta}\right) \tag{27}$$

luego si z » csc² θ

$$H_0(\theta,z) \sim \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{2/\pi z}\; sen(z-\pi/4) + \frac{2}{\pi z} - \frac{1}{z}\right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{z\,sen\theta}\right) \tag{28}$$

Referencias Bibliográficas

1. Agrest, M.M. and Maksimov, M.S.: "Theory of Incomplete Cylindrical Functions and their Applications". Springer-Verlag, New York, 1971.
2. Al-Saqabi, B. and Kalla, S.L.: "Some results on incomplete cylindrical functions". Anal.

Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. Nat., Buenos Aires, 40 (1988-90), 217-224.
3. Zamora, M.G. and Kalla, S.L.: "Un estudio de las funciones cilindricas incompletas". Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia, Vol. 14, No. 1 (1991), 35-40.
4. Abramowitz, M. and Stegun, I.: "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publications, INC, New York, 1972.
5. Lebedev, N. N.: " Special Functions and their Applications". Dover Publications, INC, New York, 1972.
6. Srivastava, H.M. and Karlsson Per, W.: "Multiple Gaussian Hypergeometric Series". Ellis Horwood Limited, New York, 1985.
7. Watson, G.N. "A Treatise on the Theory of Bessel Functions". Cambridge, University Press, 1966.
8. Fettis, Henry E. "On the Calculation of The Function $J_o(z,o)$ for large values of "z".

Recibido en forma revisada
el 18 de Febrero de 1994