Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 17, No. 1, 47-50, 1994

On generalized finite Hankel transform

Bermúdez, Misvely
Ciclo Básico, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia

Abstract

In this paper, a generalized finite Hankel transform is defined by using the Theory of Finite Sturm-Liouville Transform. The inversion formula and some properties are given. Additionally, it is applied to the solution of the boundary problem related to atmospheric pollution. The finite Hankel transform is obtained for a particular case.

Key words: Transforms, finite, generalized, Hankel.

Sobre una transformada finita generalizada de Hankel

Resumen

En el presente trabajo se define una transformada finita generalizada de Hankel adecuada a ciertas condiciones de contorno, usando la Teoría de Sturm-Liouville. Se da su fórmula de inversión, algunas propiedades y se aplica dicha transformada en la solución de un problema de contorno relativo a contaminación ambiental. Como caso particular se obtiene la transformada finita de Hankel.

Palabras claves: Transformada, finita, generalizada, Hankel.

Introducción

Las transformadas cuyos núcleos son las funciones de Bessel se llaman transformadas de Hankel. En el presente trabajo se utiliza una forma general de la ecuación diferencial de Bessel [1],

$$\frac{1}{z^{2\gamma-2}}\frac{d^2\phi}{dz^2}+\frac{(1-2\alpha)}{z^{2\gamma-1}}\frac{d\phi}{dz}+$$

$$\left(\beta^2\gamma^2+\frac{\alpha^2-\upsilon^2\gamma^2}{z^{2\gamma}}\right)\phi=0, \qquad (1)$$

con parámetros β, γ, α y υ, para definir una transformada finita generalizada de Hankel usando la Teoría de las Transformadas Finitas de Sturm-Liouville [2,3]. Se presenta su fórmula de inversión, algunas propiedades y su aplicación a un problema de difusión.

Transformada finita generalizada de Hankel

Definición

La transformada finita correspondiente al operador lineal

$$L=N_\upsilon(\alpha,\gamma)\equiv\frac{1}{\gamma^2 z^{2\gamma-2}}\frac{d^2}{dz^2}+$$

$$\frac{(1-2\alpha)}{\gamma^2 z^{2\gamma-1}}\frac{d}{dz}+\frac{\alpha^2-\upsilon^2\gamma^2}{\gamma^2 z^{2\gamma}} \qquad (2)$$

el cual tiene la forma autoadjunta

$$L\equiv\frac{1}{\gamma^2 z^{2\gamma-2\alpha-1}}\left[\frac{d}{dz}\left(z^{1-2\alpha}\frac{d}{dz}\right)\right]+\frac{\alpha^2-\upsilon^2\gamma^2}{\gamma^2 z^{2\gamma}}$$

α, γ reales; $\gamma\neq 0$

se le llamará *transformada finita generalizada de Hankel.*

La solución general de (1) es [2]

$$b_{\alpha,\gamma}(\beta,z) = z^{\alpha} Z_{\upsilon}(\beta z^{\gamma}) \tag{3}$$

donde $Z_{\upsilon}(\beta z^{\gamma})$ es una combinación lineal de funciones cilíndricas.

Sea

$$\phi_{\alpha,\gamma}(\beta,z) = c_1 z^{\alpha} J_{\upsilon}(\beta z^{\gamma}) + c_2 z^{\alpha} Y_{\upsilon}(\beta z^{\gamma}) \tag{4}$$

y los operadores de contorno P y Q definidos por las ecuaciones

$$Pf = a_1 f(x,a) + a_2 \frac{\partial f}{\partial z}(x,a),$$

$$Qf = b_1 f(x,b) + b_2 \frac{\partial f}{\partial z}(x,b) \tag{5}$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes.

Consideremos el caso especial:

$0 \le z \le a$, $Qf = f(x,a)$

La solución de la ecuación (1) en este caso es

$$\phi_{\alpha,\gamma}(\beta_m,z) = z^{\alpha} J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma}), \quad \upsilon \ge 0 \tag{6}$$

donde $\beta_1, \beta_2, \ldots$ son las raíces positivas de la ecuación trascendental

$$J_{\upsilon}(\beta_m a^{\gamma}) = 0, \quad \upsilon \ge 0$$

La transformada finita definida por

$$\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{1,\upsilon}(x,m) = H_{1,\upsilon}[f(x,z);\alpha,\gamma,m]$$

$$= \gamma^2 \int_0^a z^{2\gamma-\alpha-1} f(x,z) J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma}) dz \quad \gamma \ne 0 \tag{7}$$

la llamaremos *transformada finita generalizada de Hankel de primera clase.*

Fórmula de Inversión

Como las funciones de Bessel de primera clase satisfacen la propiedad de ortogonalidad [4]

$$\int_0^a z^{2\gamma-1} J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma}) J_{\upsilon}(\beta_n z^{\gamma}) dz$$

$$= \frac{a^{2\gamma}}{2\gamma}[J_{\upsilon+1}(\beta_m a^{\gamma})]^2 \delta_{mn}, \tag{8}$$

donde $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \ne n \\ 1, & m = n. \end{cases}$

La fórmula de inversión de la transformada (7) es

$$f(x,z) = H^{-1}_{1,\upsilon}[\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{1,\upsilon}(x,m),z]$$

$$= \frac{2}{\gamma a^{2\gamma}} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}^{\alpha,\gamma}_{1,\upsilon}(x,m) \frac{z^{\alpha} J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma})}{[J_{\upsilon+1}(\beta_m a^{\gamma})]^2} \quad \upsilon \ge 0. \tag{9}$$

De manera análoga al teorema clásico en la teoría de series de Fourier-Bessel [7], se puede demostrar la convergencia de esta serie.

Propiedades del Operador $H_{1,\upsilon}$

1.- Transformada finita generalizada de Hankel de la primera derivada

Usando la definición (7) e integrando por partes, se obtiene

$$H_{1,\upsilon}\left[\frac{\partial f}{\partial z};\alpha,\gamma,m\right] = \gamma^2 z^{2\gamma-\alpha-1} f(x,z) J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma}) \Big|_0^a$$

$$- \gamma^2 \int_0^a f(x,z) \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma-\alpha-1} J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma})\right] dz.$$

Como consideramos $\upsilon \ge 0$, entonces $z^{2\gamma-\alpha-1} J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma}) \to 0$ cuando $z \to 0$, si $2\gamma-\alpha-1+\upsilon\gamma > 0$ y si asumimos que $f(x,z)$ es finita en $z=0$, entonces $z^{2\gamma-\alpha-1} f(x,z) J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma}) \to 0$ en $z \to 0$. También será cero en $z=a$, ya que $J_{\upsilon}(\beta_m a^{\gamma}) = 0$; siempre que $f(x,z)$ sea finita.

Usando la relación de recurrencia

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma-\alpha-1} J_{\upsilon}(\beta_m z^{\gamma})\right] =$$

$$\beta_m z^{3\gamma-\alpha-2}\left[\frac{(\upsilon\gamma+2\gamma-\alpha-1)}{2\upsilon} J_{\upsilon-1}(\beta_m z^{\gamma}) - \frac{(\upsilon\gamma-(2\gamma-\alpha-1))}{2\upsilon} J_{\upsilon+1}(\beta_m z^{\gamma})\right], \quad \upsilon \ne 0 \tag{10}$$

se obtiene

$$H_{1,\upsilon}\left[\frac{\partial f(x,z)}{\partial z};\alpha,\gamma,m\right] = -\frac{\beta_m}{2\upsilon}[((\upsilon+2)\gamma-\alpha-1) \times$$

$$H_{1,\upsilon-1}\left[z^{\gamma-1} f(x,z);\alpha,\gamma,m\right] - ((\upsilon-2)\gamma+\alpha+1) \times$$

$$\left[H_{1,\upsilon+1}\left[z^{\gamma-1} f(x,z);\alpha,\gamma,m\right]\right], \quad \upsilon \ne 0 \tag{11}$$

En el caso $\upsilon=0$, usamos la relación

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{2\gamma-\alpha-1} J_0(\beta_m z^\gamma)\right]=$$

$$z^{2\gamma-\alpha-2}[(2\gamma-\alpha-1) J_0(\beta_m z^\gamma)-\beta_m\gamma z^\gamma J_1(\beta_m z^\gamma)]$$

entonces

$$H_{1,0}\left[\frac{\partial f(x,z)}{\partial z};\ \alpha,\gamma,m\right]=$$

$$-(2\gamma-\alpha-1)\ H_{1,0}\left[\frac{f(x,z)}{z};\ \alpha,\gamma,m\right]+$$

$$\beta_m\gamma H_{1,1}\left[z^{\gamma-1} f(x,z);\ \alpha,\gamma,m\right]. \qquad (12)$$

2. Transformada finita generalizada de primera clase de $\frac{f(x,z)}{z^\gamma}$

De la relación de recurrencia

$$\frac{J_\upsilon(\beta_m z^\gamma)}{\beta_m z^\gamma}=\frac{J_{\upsilon-1}(\beta_m z^\gamma)}{2\upsilon}+\frac{J_{\upsilon+1}(\beta_m z^\gamma)}{2\upsilon}$$

se obtiene la relación

$$H_{1,\upsilon}\left[\frac{f(x,z)}{z^\gamma};\ \alpha,\gamma,m\right]=\frac{\beta_m}{2\upsilon}\Big[H_{1,\upsilon-1}[f(x,z);\ \alpha,\gamma,m]$$

$$+\ H_{1,\upsilon+1}[f(x,z);\ \alpha,\gamma,m]\Big],\quad \upsilon\neq 0 \qquad (13)$$

3. Transformada finita generalizada de Hankel del operador $N_\upsilon(\alpha,\gamma)$

$$H_{1,\upsilon}\left[N_\upsilon f(x,z);\ \alpha,\gamma,m\right]$$

$$=-\beta_m^2\,\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{1,\upsilon}(x,m)+\gamma\beta_m\, f(x,a)a^{\gamma-\alpha}J_{\upsilon+1}(\beta_m a^\gamma). \qquad (14)$$

4. Casos Particulares

Si hacemos $\alpha=0$, $\gamma=1$

a) En (7)

$$H_{1,\upsilon}[f(x,z);\ 0,1,m]=\int_0^a z f(x,z)\ J_\upsilon(\beta_m z)\,dz$$

$$=h_{1,\upsilon}[f(x,z);\ m]$$

que es la transformada finita de Hankel de primera clase

b) En (11)

$$H_{1,\upsilon}\left[\frac{\partial f(x,z)}{\partial z};\ 0,1,m\right]$$

$$=-\frac{\beta_m(\upsilon+1)}{2\upsilon}H_{1,\upsilon-1}[f(x,z);\ 0,1,m]$$

$$+\frac{\beta_m(\upsilon-1)}{2\upsilon}H_{1,\upsilon+1}[f(x,z);\ 0,1,m]$$

$$h_{1,\upsilon}\left[\frac{\partial f(x,z)}{\partial z};\ m\right]=-\frac{\beta_m(\upsilon+1)}{2\upsilon}h_{1,\upsilon-1}[f(x,z);\ m]$$

$$+\frac{\beta_m(\upsilon-1)}{2\upsilon}h_{1,\upsilon+1}[f(x,z);\ m],\quad \upsilon\neq 0$$

que coincide con la transformada finita de Hankel de primera clase de la primera derivada.

De manera análoga en (12)

$$H_{1,0}\left[\frac{\partial f(x,z)}{\partial z};\ 0,1,m\right]=h_{1,0}\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x,z);\ m\right]=$$

$$-\ h_{1,0}\left[\frac{f(x,z)}{z};\ m\right]+\beta_m\ h_{1,1}[f(x,z);\ m].$$

c) En (13)

$$H_{1,\upsilon}\left[\frac{f(z)}{z};\ 0,1,m\right]=\frac{\beta_m}{2\upsilon}\Big[H_{1,\upsilon-1}[f(x,z);\ 0,1,m]$$

$$+\ H_{1,\upsilon+1}[f(x,z);\ 0,1,m]\Big]$$

$$h_{1,\upsilon}\left[\frac{f(z)}{z};\ m\right]=\frac{\beta_m}{2\upsilon}\Big[h_{1,\upsilon-1}[f(x,z);\ m]$$

$$+\Big[h_{1,\upsilon+1}[f(x,z);\ m]\Big].\quad \upsilon\neq 0$$

d) En (14)

$$H_{1,\upsilon}\left[N_\upsilon f(x,z);\ 0,1,m\right]=h_{1,\upsilon}\left[\beta_\upsilon f(x,z);\ m\right]$$

$$=-\beta_m^2\,\bar{f}^{0,1}_{1,\upsilon}(x,m)+\beta_m\, f(x,a)a\ J_{\upsilon+1}(\beta_m a)$$

$$h_{1,\upsilon}\left[\beta_\upsilon f(x,z);\ m\right]$$

$$=-\beta_m^2\,\bar{f}_{1,\upsilon}(x,m)+\beta_m f(x,a)a\ J_{\upsilon+1}(\beta_m a).$$

Aplicación de la transformada finita generalizada de Hankel de primera clase

Como aplicación de la transformada finita generalizada de Hankel de primera clase consideremos un problema de difusión de polvo [3,6] a través de la atmósfera a una altura determinada y el cual consiste en encontrar la solución de la ecuación.

$$\frac{1}{z^{n-1}}\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}+\frac{k_1+w}{k_1 z^n}\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{u_1}{k_1}\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (0\leq z\leq a,\ o\leq x\leq 1) \qquad (15)$$

con las condiciones de borde

$$q(0,z) = 0 \quad , \quad 0\leq z\leq a$$

$$q(x,a) = h(x) \quad , \quad 0\leq x\leq 1 \qquad (16)$$

Al comparar con (1) se encuentra que

$$\alpha=\frac{-w}{2k_1},\ \gamma=\frac{n+1}{2},\ \upsilon=\theta=\frac{w}{k_1(1+n)}.$$

Si definimos

$$\bar{q}(x,m)=H_{1,\theta}\left[q(x,z);\frac{-w}{2k_1},\frac{n+1}{2};m\right]$$

$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\int_0^a z^{n+\frac{w}{2k_1}}q(x,z)\,J_\theta\left(\beta_m z^{\frac{n+1}{2}}\right)dz.$$

Aplicando transformada a ambos miembros de (15) se tiene

$$H_{1,\theta}\left[\left(\frac{2}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{z^{n-1}}\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}+\frac{k_1+w}{k_1}\frac{1}{z^n}\frac{\partial q}{\partial z}\right);-\frac{w}{2k_1},\frac{n+1}{2},m\right]$$

$$=\frac{2^2}{(n+1)^2}\frac{u_1}{k_1}H_{1,\theta}\left[\frac{\partial q}{\partial x};-\frac{w}{2k_1},\frac{n+1}{2},m\right].$$

Usando el resultado (14)

$$H_{1,\theta}\left[\left(\frac{2}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{z^{n-1}}\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}+\frac{k_1+w}{k_1}\frac{1}{z^n}\frac{\partial q}{\partial z}\right);-\frac{w}{2k_1},\frac{n+1}{2},m\right]$$

$$=-\beta_m^2\,\bar{q}(x,m)+\beta_m\frac{(n+1)}{2}h(x)a^{\frac{1}{2}(n+1+\frac{w}{k_1})}J_{\theta+1}\left(\beta_m a^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

Luego

$$\frac{d}{dx}\bar{q}+\left[\frac{(n+1)\beta_m}{2}\right]^2\frac{k_1}{u_1}\bar{q}=\frac{k_1}{u_1}\beta_m\left(\frac{n+1}{2}\right)^3 h(x)$$

$$a^{\frac{1}{2}(n+1+\frac{w}{k_1})}J_{\theta+1}\left(\beta_m\, a^{\frac{n+1}{2}}\right) \qquad (17)$$

con la condición

$$\bar{q}(o,m)=0$$

La ecuación (17) es una ecuación diferencial lineal cuya solución es

$$\bar{q}(x,m)=\frac{k_1}{u_1}\beta_m\left(\frac{n+1}{2}\right)^3 a^{\frac{1}{2}(n+\frac{w}{k_1}+1)}\ J_{\theta+1}\left(\beta_m a^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$\int_0^x h(u)\,e^{-\frac{k_1}{u_1}\left[\frac{(n+1)}{2}\beta_m\right]^2(x-u)}du$$

que podemos escribir como

$$\bar{q}(x,m)=\frac{k_1}{u_1}\beta_m\left(\frac{n+1}{2}\right)^3 a^{\frac{1}{2}(n+\frac{w}{k_1}+1)}J_{\theta+1}\left(\beta_m a^{\frac{n+1}{2}}\right)B_m(x)$$

donde

$$B_m(x)=\int_0^x h(u)\,e^{-\frac{k_1}{u_1}\left[\frac{(n+1)}{2}\beta_m\right]^2(x-u)}du$$

Usando la fórmula de inversión (9) se obtiene la solución

$$q(x,z)=2\frac{k_1}{u_1}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^{\frac{1}{2}(\frac{w}{k_1}-n-1)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m z^{-\frac{w}{2k_1}}J_\theta\left(\beta_m z^{\frac{n+1}{2}}\right)}{J_{\theta+1}\left(\beta_m a^{\frac{n+1}{2}}\right)}B_m(x)$$

Agradecimiento

Al CONDES por su financiamiento parcial.

Referencias Bibliográficas

1. Lebedev, N.N.: "Special Functions and Their Applications". Dover Publications, Inc. New York, 1972.
2. Churchill, R.: "Series de Fourier y Problemas de Contorno". McGraw-Hill, New York, 1978.
3. Sneddon, I.N.: "The Use of Integral Transforms". McGraw-Hill, New York, 1972.
4. Prudnikov, A., Brychkov, YU., Marichev, O.: "Integrals and Series". Vol. 2, Special Functions, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
5. Watson, G. N.: "A Treatise on the Theory of Bessel Functions". 2nd Edition, Cambridge Univ. Press. 1980.
6. Onikul, R.I. and Khurshudyan, L.G.: "The Diffusion of dust from its ground-level areal sources". Fluid Mechanics-Soviet Research, Vol. 13, No. 6, November-December (1984), 64-74.
7. Urribarrí, E.: "Transformada Generalizada de Hankel y sus Aplicaciones". Tesis de Magister. Facultad de Ingeniería. División de Postgrado. Universidad del Zulia, 1990.

Recibido el 16 de Noviembre de 1991
En forma revisada el 6 de Diciembre de 1993