Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 17, No. 3, 139-143, 1994

Some results involving the hypergeometric function Φ_2

Ana Isólina Prieto y Leda Galué

Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.)
Facultad de Ingeniería, Apartado 526. Universidad del Zulia. Maracaibo - Venezuela

Abstract

In this work first integrals containing the product of hypergeometric functions Φ_2 are defined. Then, by deriving with respect to parameter λ, the modified moments of the weight function $x^{\lambda} e^{-px} (\ln x)^t$, $t = 1,2$, on $[0,\infty)$ are obtaining. Several known result are obtained as particular cases.

Key words: Integrals, hypergeometric function Φ_2, modified moments.

Algunos resultados que involucran la función hipergeométrica Φ_2

Resumen

En este trabajo, primeramente se definen integrales que contienen el producto de funciones hipergeométricas Φ_2. Seguidamente, derivando respecto al parámetro λ se obtienen los momentos modificados de la función de peso $x^{\lambda} e^{-px} (\ln x)^t$, $t = 1,2$, sobre $[0,\infty)$. Varios resultados conocidos se obtienen como casos particulares de los aquí presentados.

Palabras claves: Integrales, función hipergeométrica Φ_2, momentos modificados.

Introducción

Muchos investigadores han estudiado integrales con polinomios ortogonales, funciones generalizadas de Laguerre y funciones hipergeométricas, esto se debe a que algunos problemas computacionales en el campo de integración numérica pueden ser resueltos por procedimientos que requieren de momentos modificados [1,2].

Así, Gatteschi [3], Kalla y Conde [4,5] han estudiado integrales con polinomios de Jacobi y Laguerre; por otro lado, tenemos que Pittaluga y Sacripante [6] estudian los momentos modificados de la función de peso $x^{\rho+\alpha+\beta} e^{-\alpha x} (\ln x)^p$, $(p = 1,2)$ sobre $[0,\infty)$, con respecto al producto de los polinomios generalizados de Laguerre $L_m^{(\alpha)}(x)$ y $L_n^{(\beta)}(x)$.

Aular y Kalla [7] evalúan integrales que involucran funciones hipergeométricas confluentes, obteniendo como casos particulares algunos resultados de Pittaluga y Sacripante.

Recientemente, González y Kalla [8] han evaluado los momentos modificados de la función de peso $x^{\rho} e^{-ax} (\ln x)^p$, $(p = 1,2)$ sobre $[0,\infty)$ con respecto al producto de funciones generalizadas de Laguerre.

En este trabajo, primeraménte se definen integrales que contienen el producto de funciones hipergeométricas Φ_2. Seguidamente, derivando respecto al parámetro λ se obtienen los momentos modificados de la función de peso $x^{\lambda} e^{-px} (\ln x)^t$, $t = 1,2$, sobre $[0,\infty)$. Generalizando los resultados obtenidos por González y Kalla.

Integrales que involucran funciones hipergeométricas Φ_2

Consideremos la integral

$$I^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx)\cdot \Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)\, dx \quad (1)$$

donde, $c, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, \lambda > -1$; $p>0$; a,b,α,β,q,r,z, reales, $\Phi_2(a,b;c;qx,zx)$ y $\Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)$ son funciones hipergeométricas definidas por [9]

$$\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^\infty \frac{(\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \quad (2)$$

$|x| < \infty$, $|y| < \infty$.

Para evaluar la integral (1), sustituimos $\Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)$ usando (2), así

$$I^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx)\cdot \Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx) \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\beta)_j (rx)^k (zx)^j}{(\gamma)_{k+j}\, k!\, j!}\, dx. \quad (3)$$

Intercambiando el orden de la suma y la integral (posible por la convergencia absoluta), obtenemos la expresión

$$I^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\beta)_j (r)^k (z)^j}{(\gamma)_{k+j}\, k!\, j!}.$$

$$\cdot \int_0^\infty x^{\lambda+k+j}\, e^{-px}\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx)\, dx \quad (4)$$

$c,\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, \lambda > -1$; $p>0$; a,b,α,β,q,r,z, reales.

Usando el resultado [10, p. 340 (2.22.7.3)]

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-px}\, \Phi_2(b,b';c;wx,zx)\, dx =$$

$$\Gamma(\alpha) p^{-\alpha} F_1(\alpha,b,b';c;\frac{w}{p},\frac{z}{p}) \quad (5)$$

donde, Re α, Re p, Re(p-w), Re(p-z) > 0 y F_1 es una función de Appell,

obtenemos de (3) y (4),

$$I^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx)\cdot \Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}} \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\lambda+1)_{k+j} (\alpha)_k (\beta)_j (r/p)^k (z/p)^j}{(\gamma)_{k+j}\, k!\, j!}.$$

$$\cdot\, F_1[\lambda+k+j+1, a, b; c; \frac{q}{p}, \frac{z}{p}] \quad (6)$$

$\lambda+1 > 0$; $p > 0$; Re(p-q), Re(p-z) > 0; $c,\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$; a,b,α,β,q,r,z, reales.

Sea

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{t,-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \frac{\partial^t}{\partial\lambda^t} I^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z}$$

$$= \int_0^\infty x^\lambda e^{-px} (\ln x)^t\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx)\, \Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)\, dx \quad (7)$$

$\lambda+1 > 0$; $p > 0$; Re(p-q), Re(p-z) > 0; $c,\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$; a,b,α,β,q,r,z, reales; t = 1,2.

Por otro lado, de (6) y (7) con t = 1, se tiene

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{1,-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\beta)_j (r/p)^k (z/p)^j}{(\gamma)_{k+j}\, k!\, j!} \cdot$$

$$\sum_{m,n=0}^\infty \frac{(a)_m (b)_n (q/p)^m (z/p)^n}{(c)_{m+n}\, m!\, n!} \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}} (\lambda+1)_{k+j} (\lambda+k+j+1)_{m+n}\right]; \quad (8)$$

donde hemos expresado la función F_1 de Appell [9] en su desarrollo en serie, esto es,

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{1,-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px} \ln x\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx)\cdot \Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)\, dx$$

$$= \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\beta)_j (r/p)^k (z/p)^j}{(\gamma)_{k+j}\, k!\, j!} \sum_{m,n=0}^\infty \frac{(a)_m (b)_n (q/p)^m (z/p)^n}{(c)_{m+n}\, m!\, n!}$$

$$\cdot\, \frac{\Gamma(\lambda+k+j+m+n+1)}{p^{\lambda+1}} \{\psi(\lambda+k+j+m+n+1) - \ln p\} \quad (9)$$

$\lambda+1 > 0$; $p > 0$; Re(p-q), Re(p-z) > 0; $c,\gamma \neq 0, -1,-2,....$; a,b,α,β,q,r,z, reales;

donde $\psi(x)$ es la derivada logarítmica de la función gamma.

Con t = 2 en (7) y usando (9),

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{2,-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,z} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px} (\ln x)^2\, \Phi_2(a,b;c;qx,zx) \cdot \Phi_2(\alpha,\beta;\gamma;rx,zx)\, dx$$

$$= \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\beta)_j (r/p)^k (z/p)^j}{(\gamma)_{k+j}\, k!\, j!} \sum_{m,n=0}^\infty \frac{(a)_m (b)_n (q/p)^m (z/p)^n}{(c)_{m+n}\, m!\, n!} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+k+j+m+n+1)}{p^{\lambda+1}} \cdot \left\{[\psi(\lambda+k+j+m+n+1) - \ln p]^2 + \psi'(\lambda+k+j+m+n+1)\right\} \quad (10)$$

$\lambda+1 > 0$; $p > 0$; Re(p-q), Re(p-z) > 0; $c,\gamma \neq 0, -1,-2,....$; a,b,α,β,q,r,z, reales.

Casos Particulares

Consideremos el caso en que z = 0.

Sea

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,0} \equiv L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,-\alpha,p,q,r} \quad (11)$$

i) De (6) y el resultado

$$\Phi_2(\beta,\beta';\gamma;x,0) = \Phi(\beta;\gamma;x) \quad (12)$$

se tiene

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,-\alpha,p,q,r} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi(a;c;qx)\Phi(\alpha;\gamma;rx)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\lambda+1)_k (r/p)^k}{(\gamma)_k\, k!} F_1[\lambda+k+1,a,b;c;q/p,0] \quad (13)$$

Usando [10, p. 452 (58)]

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,-\alpha,p,q,r} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\lambda+1)_k (r/p)^k}{(\gamma)_k\, k!} \cdot {}_2F_1(\lambda+k+1,a;c;q/p) \quad (14)$$

esto es,

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,-\alpha,p,q,r} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi(a;c;qx)\Phi(\alpha;\gamma;rx)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}} \sum_{k,j=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (a)_j (\lambda+1)_{k+j} (r/p)^k (q/p)^j}{(\gamma)_k (c)_j\, k!\, j!} \quad (15)$$

$c,\gamma \neq 0,-1,-2,....$, $\lambda>-1$; $p > 0$; Re(p-q) > 0; a,α,q,r, reales.

La fórmula (15) puede ser expresada en términos de la función F_2 de Appell [9] en la forma siguiente,

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{a,-\alpha,p,q,r} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}} F_2(\lambda+1,\alpha,a;\gamma,c;r/p,q/p) \quad (16)$$

De (16) y [10, p. 452 (71)]

$$L^{\lambda,\lambda,\lambda}_{a,-\alpha,p,q,r} = \frac{\Gamma(\lambda+1)\,(p-r)^{-\alpha}\,(p-q)^{-a}}{p^{\lambda+1-\alpha-a}} \cdot {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,a\\ \lambda+1\end{matrix}; \frac{rq}{(p-r)(p-q)}\right] \quad (17)$$

$\lambda>-1$; $p > 0$; Re(p-q) > 0; a,α,q,r, reales.

Consideremos

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{t,-a,b,-\alpha,\beta,p,q,r,0} \equiv N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{t,-a,-\alpha,p,q,r} \quad (18)$$

ii) De (9) y z = 0, tenemos

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{1,-a,-\alpha,p,q,r} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px} \ln x\, \Phi(a;c;qx)\Phi(\alpha;\gamma;rx)\, dx$$

$$= p^{-(\lambda+1)} \sum_{k,m=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (a)_m \Gamma(\lambda+k+m+1) (r/p)^k (q/p)^m}{(\gamma)_k (c)_m\, k!\, m!} [\psi(\lambda+k+m+1) - \ln p] \quad (19)$$

$\lambda>-1$; $c,\gamma \neq 0,-1,-2,....$, $p > 0$; Re(p-q) > 0; a,α,q,r, reales.

De (10) y z = 0, obtenemos

$$N^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{2,-a,-\alpha,p,q,r} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px} (\ln x)^2\, \Phi(a;c;qx)\Phi(\alpha;\gamma;rx)\, dx$$

$$= \sum_{k,m=0} \frac{(\alpha)_k (a)_m (r/p)^k (q/p)^m}{(\gamma)_k (c)_m\, k!\, m!\, p^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda+k+m+1)\,.$$

$$.\left\{[\psi(\lambda+k+m+1) - \ln p]^2 + \psi'(\lambda+k+m+1)\right\} \quad (20)$$

$\lambda>-1$; $c,\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$, $p>0$; $\mathrm{Re}(p-q)>0$; a,α,q,r, reales.

iii) Si $q = p$ y $z = 0$ en (6), usando los resultados [10, p. 449 (16)], [10, p. 453 (60)] y (12), resulta

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{-a,-\alpha,p,p,r} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi(a;c;px)\Phi(\alpha;\gamma;rx)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(c)}{p^{\lambda+1}\,\Gamma(c-a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_k (\alpha)_k (r/p)^k\, \Gamma(c-\lambda-k-1-a)}{(\gamma)_k\, k!\, \Gamma(c-\lambda-k-1)} \quad (21)$$

De la relación [11, p. 3 (4)]

$$\frac{\Gamma(-z+k)}{\Gamma(-z)} = \frac{(-1)^k\, \Gamma(z+1)}{\Gamma(z-k+1)} \quad (22)$$

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{-a,-\alpha,p,p,r} = \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, \Phi(a;c;px)\Phi(\alpha;\gamma;rx)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(c)\,\Gamma(c-\lambda-1-a)}{p^{\lambda+1}\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-\lambda-1)}\; {}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha,\lambda+1,\lambda+2-c\\ \gamma,\lambda+2+a-c\end{matrix};\frac{r}{p}\right] \quad (23)$$

$c,\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$, $\lambda>-1$; $p>0$; a,α,r, reales.

Si usamos [12, p. 1037], se obtiene la expresión equivalente,

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{-a,-\alpha,p,p,r} = \binom{c-a-1}{-a}^{-1} \binom{\gamma-\alpha-1}{-\alpha}^{-1} \int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\, L^{c-1}_{-a}(px)\, L^{\gamma-1}_{-\alpha}(rx)\, dx$$

donde $L^{c-1}_{-a}(px)$ y $L^{\gamma-1}_{-\alpha}(rx)$ son funciones generalizadas de Laguerre.

$$L^{c-1,\gamma-1,\lambda}_{-a,-\alpha,p,p,r} = \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(c)\,\Gamma(c-\lambda-1-a)}{p^{\lambda+1}\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-\lambda-1)}\; {}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha,\lambda+1,\lambda+2-c\\ \gamma,\lambda+2+a-c\end{matrix};\frac{r}{p}\right] \quad (24)$$

$c,\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$, $\lambda>-1$; $p>0$; a,α,r, reales; $|r|<p$.

Considerando $\lambda = \gamma-2$, $r = p$, $a = -m$ y $\alpha = -n$ en (24) con m y n enteros no-negativos,

$$L^{c-1,\gamma-1,\gamma-2}_{m,n,p,p,p} = \binom{c+m-1}{m}^{-1} \binom{\gamma+n-1}{n}^{-1} \int_0^\infty x^{\gamma-2} e^{-px}\, L^{c-1}_{m}(px)\, L^{\gamma-1}_{n}(px)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma-1)\,(c-\gamma+1)_m}{p^{\gamma-1}\,(c)_m}\; {}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,\gamma-1,\gamma-c\\ \gamma,\gamma-m-c\end{matrix};1\right] \quad (25)$$

y del resultado [10, p. 539 (95)]

$$L^{c-1,\gamma-1,\gamma-2}_{m,n,p,p,p} = \frac{\Gamma(\gamma-1)\, n!}{p^{\gamma-1}\,(\gamma)_n} \quad (26)$$

$\gamma > 1$, $p > 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

$$\int_0^\infty x^{\gamma-2} e^{-px}\, L^{c-1}_{m}(px)\, L^{\gamma-1}_{n}(px)\, dx = \frac{(c)_m\, \Gamma(\gamma-1)}{m!\, p^{\gamma-1}}\,, \quad (27)$$

al considerar en esta expresión $\gamma - 1 = \beta$, $p = a$ y $c = \alpha + 1$ se obtiene el resultado (18) de [8].

Haciendo $\lambda = \rho$, $p = a$, $a = -\nu$, $c = \alpha + 1$, $q = b$, $\alpha = -\mu$, $\gamma = \beta + 1$, $r = c$, en (15), (16) y (19), (20), se obtienen resultados dados por González y Kalla [8].

Referencias Bibliográficas

1. Gautschi, W.: On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments. Math. Comp. 24 (1970), 245-260.
2. Gautschi, W.: Questions of numerical condition related to polynomials, in Symposium on Recent Advances in Numerical Analysis, (C. de Boor and G. H. Golub, eds.), Academic Press, New York, (1978), 45-72.
3. Gatteschi, L.: On some orthogonal polynomial Integrals. Math. Comp. 35. (1980), 1291-1298.
4. Kalla, S. L. y Conde, S.: Algunos resultados sobre polinomios ortogonales. Colección Premio Andrés Bello. Edit. Universidad del Zu-

lia. Maracaibo. 1984.

5. Kalla, S. L. and Conde, S.: Integral of generalized Laguerre polynomials. Serdica 9 (1983), 230-234.
6. Pittaluga, G. and Sacripante, L.: Some results on Laguerre polynomials. Tamkang Jour. Math. Vol. 20 (1989), 67-74.
7. Aular de Durán, J. y Kalla, S.L.: Relaciones funcionales con funciones hipergeométricas y digammas. Rev. Técn. Ing. Univ. del Zulia. Vol. 14. No. 2 (1991), 147-152.
8. González, B. and Kalla, S.L.: Some results involving generalized Laguerre functions. Ganita Sandesh. Vol. 6. No. 2 (1992), 118-124.
9. Srivastava, H. M. and Karlsson, P.W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Limited, New York, 1985.
10. Prudnikov, A. P.; Brichkov, J. and Marichev, O.: Integrals and Series: More Special Functions. Vol. 3. Gordon and Breach Science Publishers. New York. 1988.
11. Erdélyi, A. and Bateman, H.: Higher Transcendental Functions. Vol. I. Mc. Graw-Hill. New York. 1953.
12. Gradshteyn, I. S.: Tables of Integrals Series and Products. Academic Press. New York, 1965.

Recibido el 31/05/94
En forma revisada el 12/09/94