

## Calculations of terminal velocity for particles of any sphericity

César García y Carmen Sarmiento

División de Postgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia  
Maracaibo, Venezuela. Apdo. 526

### Abstract

The knowledge of terminal velocity in fluid-solid systems is important for engineering design of equipment separations such as settling, hydraulic classification, fluidized beds, and others.

The present technical note provides a straightforward calculation of terminal velocity when the physical properties are known for the fluid-solid system at the operating conditions. The proposed method results valid for the Reynolds Number between 0.1 and 10.000 and sphericity factors between 1.0 and 0.125.

**Key words:** Terminal velocity, settling, fluidization.

## Cálculo de velocidades terminales para partículas de cualquier esfericidad

### Resumen

El conocimiento de la velocidad terminal en sistemas fluido-sólido es de importancia en la Ingeniería de Diseño de equipos de separación - cámaras de sedimentación, lechos fluidizados, clasificación hidráulica, y otros. La presente nota técnica permite de manera directa el cálculo de la velocidad terminal conocidas las propiedades físicas del sistema fluido-sólido a las condiciones de operación. El método propuesto resulta válido para el rango del Número de Reynolds entre 0.1 y 10.000 y factores de esfericidad entre 1 y 0.125.

**Palabras claves:** Velocidad terminal, sedimentación, fluidización.

### Introducción

La velocidad terminal es un parámetro de interés en el diseño de equipos de separación de particulados presentes en mezclas fluido-particulado. La relación de longitud [1] y altura (h) de un sedimentador puede expresarse por el cociente de velocidad de entrada del fluido ( $U_{\infty}$ ) y la velocidad terminal del particulado ( $v_t$ ), así  $1/h = U_{\infty}/v_t$ . De igual modo, la longitud teórica de recorrido de particulado (x) descargado desde una chimenea de altura (H) y con velocidad de los vientos ( $U_{\infty}$ ) puede calcularse así

$$x = (h/v_t)u_{\infty}$$

donde  $v_t$  es la velocidad terminal.

La caída de una partícula de diámetro ( $D$ ) y densidad ( $\rho_s$ ) en un campo gravitacional ( $g$ ) y a través de un fluido de densidad  $\rho_f$  y viscosidad  $\mu$ , genera el siguiente balance de fuerzas:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3 C_D y^2 \rho_f}{4 \rho_s D_p} + g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad (1)$$

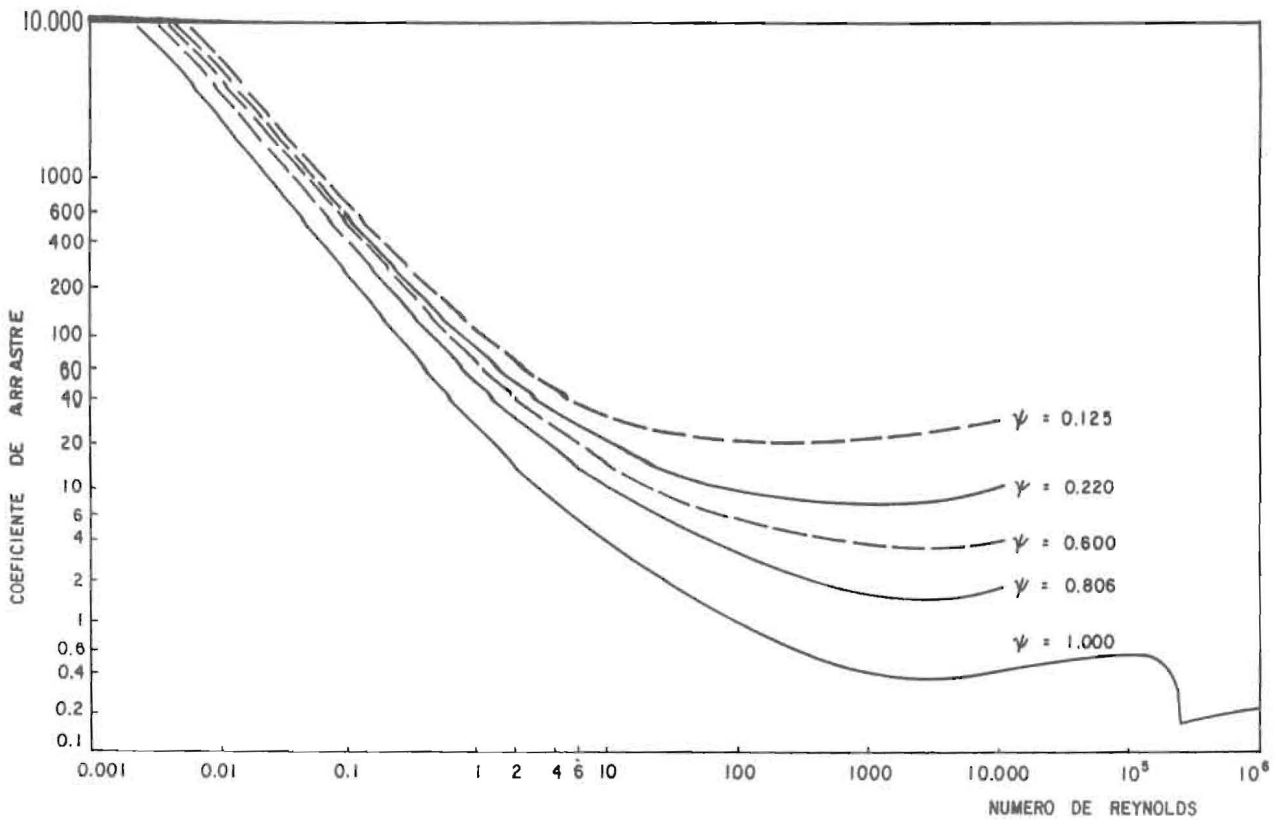


Figura 1. Coeficiente de arrastre como función del Número de Reynolds y esfericidad (2).

En su trayectoria, la partícula incrementa su velocidad hasta alcanzar un valor terminal constante, llamado velocidad terminal. Para  $t > 0$ ,  $dy/dt = 0$ ,  $y = v_t$ , resulta de la Ec(1):

$$C_D = \frac{4gD_p(\rho_s - \rho_f)}{3\rho_f v_t^2} \tag{2}$$

en general,  $C_D$ , el coeficiente de arrastre es función del Número de Reynolds y de la esfericidad, tal como se muestra en la Figura 1[1,2] donde:

$$R_e = v_t \rho_f D_p / \mu, \quad \Psi = 4.836 v_t^{2/3} / A_p \tag{3}$$

el factor de forma  $\Psi$  toma el valor de 1 para particulado esférico, y  $0 < \Psi < 1$  para cualquier otra geometría,  $v_t$  es el volumen de la partícula y  $A$  el área de la partícula.

### Métodos de Cálculos

#### Método de Foust y otros [2]

De la ecuación (2) en forma logarítmica, y separando la velocidad terminal

$$\log C_D = \log \left[ \frac{4gD_p(\rho_s - \rho_f)}{3\rho_f} \right] - 2 \log v_t \tag{4}$$

Expresando el Número de Reynolds en forma logarítmica y separando la velocidad terminal.

$$\log R_e = \log \left( \frac{\rho_f D_p}{\mu} \right) + \log v_t \tag{5}$$

eliminando la velocidad terminal, resulta

$$\log C_D = -2 \log R_e + \log \left[ \frac{4gD_p^3 \rho_f (\rho_s - \rho_f)}{3 \mu^2} \right] \tag{6}$$

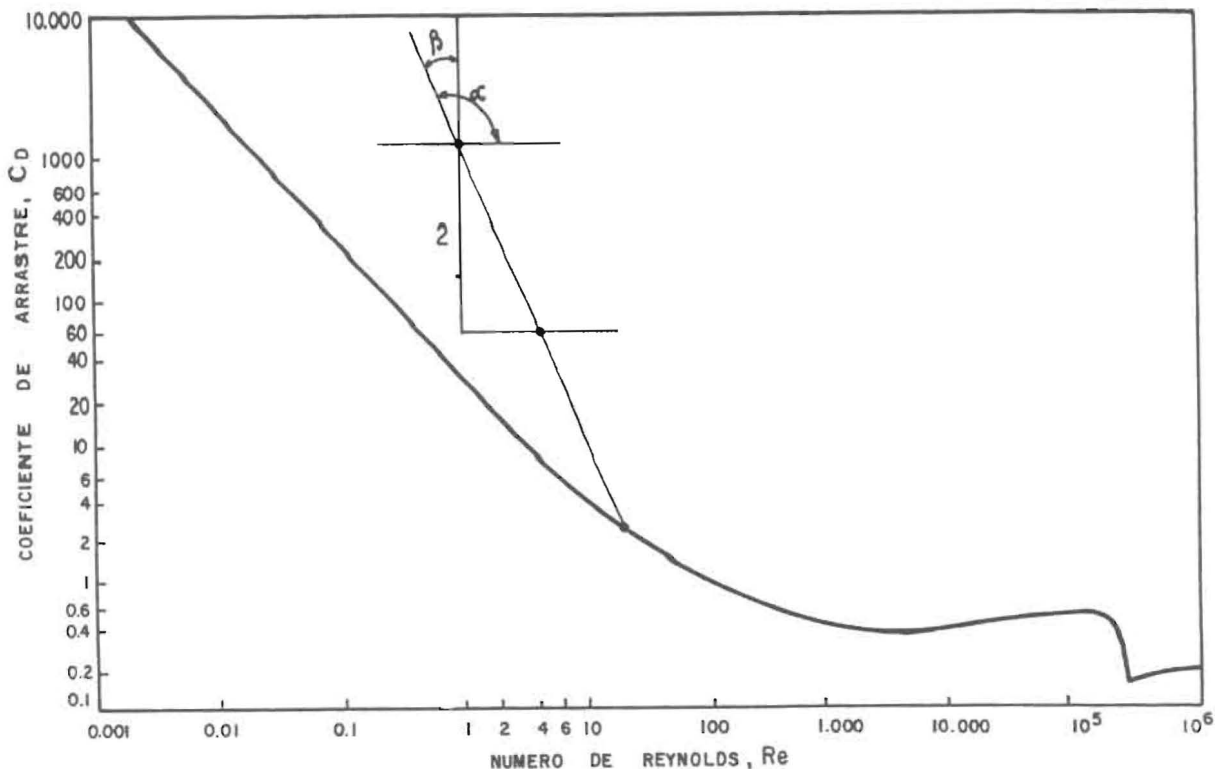


Figura 2. Trazado para el Método de Intersección de Foust.

la ecuación (6) representa la ecuación de una línea recta de pendiente  $d(\log C_D)/d(\log R_e) = -2$ . Para el valor del Número de Reynolds igual a 1, de la ecuación (6), se obtiene el coeficiente de arrastre  $C_D^o$  dado por:

$$R_e^o = 1, C_D^o = \frac{4gD_p^3 \rho_f (\rho_s - \rho_f)}{3 \mu^2} \quad (7)$$

El valor de la velocidad terminal se encuentra por la intersección de la referida línea recta con la curva apropiada a la esfericidad del particulado.

**Ilustración:** Determinar la velocidad terminal para particulado esférico de densidad 64.10 lbm/ft<sup>3</sup>, diámetro 1.31 10<sup>-3</sup> ft, cayendo a través del aire a 300°F y 1 atm con los valores de densidad  $\rho_f = 0.0524$  lbm/ft<sup>3</sup>, viscosidad = 1.75.10<sup>-5</sup> lbm/fts. Evaluando el punto ( $R_e^o = 1, C_D = C_D^o$ ):

$$C_D^o = \frac{4gD_p^3 \rho_f (\rho_s - \rho_f)}{3 \mu^2} = \frac{(4) (32.174) (1.31 \cdot 10^{-3})^3 (0.0524) (64.10 - 0.052)}{3(1.75 \cdot 10^{-5})^2}$$

resulta  $C_D^o = 1056.8$  para  $R_e^o = 1$

la pendiente,

$$\text{tg} \alpha = \frac{d(\log C_D)}{d(\log R_e)} = \text{tg}(90 + \beta) = -\text{ctg} \beta = -2$$

con  $R_e^o = 1$  y  $C_D^o = 1056.8$  se traza una recta de pendiente -2 o  $\text{ctg} \beta = 2$ , según la Figura 2, hasta intersectar la curva  $C_D$  vs  $R_e$  para  $\Psi = 1.0$ , de la intersección se obtiene:

$$R_{e_t} = 20 = v_t \rho_f D_p / \mu_f$$

la velocidad terminal

$$v_t = \frac{(20) (1.75 \cdot 10^{-5})}{(1.31 \cdot 10^{-3}) (0.0524)} = 5.1 \text{ ft/s}$$

### Método de Theodore - Buonjcore [3]

Para partículas esféricas, la variación del coeficiente de arrastre con el Número de Reynolds puede expresarse así:

$C_D = 24/R_e$ , válida para  $R_e < 2$   
Régimen de Stokes

$C_D = 18.5/R_e^{0.6}$ , válida para  $2 < R_e < 500$

Régimen Intermedio

$C_D = 0.44$ , válida para  $500 < R_e < 200.000$   
Régimen de Newton

las expresiones anteriores se corresponden genéricamente por

$$C_D = \alpha R_e^\beta \quad (8)$$

donde

$\alpha = 24.0$  y  $\beta = 1$  para Régimen de Stokes  
 $\alpha = 18.5$  y  $\beta = 0.60$  para Régimen Intermedio  
 $\alpha = 0.44$  y  $\beta = 0$  para Régimen de Newton

la fuerza de arrastre  $F_D$  por definición:

$$F_D = \frac{\pi D_p^2 v_t^2 \rho_f}{8} C_D \quad (9)$$

Sustituyendo la expresión genérica de  $C_D$  dada por la ecuación (8), resulta:

$$F_D = \alpha \pi v_t^{2-\beta} D_p^{2-\beta} \rho_f^{1-\beta} \mu_f^\beta / 8 \quad (10)$$

Del balance de fuerzas dado por la ecuación (1) y re-escribiendo así:

$$m\dot{y} = -F_D + mg \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \quad (11)$$

para la condición estacionaria y considerando  $\rho_f \ll \rho_s$ , con  $m = \rho_s \pi D_p^3 / 6$ , resulta

$$F_D = mg = \rho_s \frac{\pi D_p^3}{6} g \quad (12)$$

Igualando con la ecuación (10), se obtiene la expresión genérica

$$v_t^{2-\beta} = \frac{4g}{3} \frac{D_p^{1+\beta} \rho_f^{\beta-1}}{\alpha \mu_f^\beta} \rho_s \quad (13)$$

Al sustituir los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación (8), se obtienen:

$$v_t = \frac{g D_p^2 \rho_s}{18 \mu_f}, \text{ Régimen de Stokes} \quad (14)$$

$$v_t = 0.153 g^{0.714} D_p^{1.14} \rho_s^{0.714} / \mu_f^{0.43} \rho_f^{0.29}, \text{ Régimen Intermedio} \quad (15)$$

$$v_t = 1.74 (g D_p \rho_s / \rho_f)^{0.50}, \text{ Régimen de Newton} \quad (16)$$

para establecer un criterio sustitutivo al Número de Reynolds en la aplicación de las ecuaciones (14 - 16), se introduce el parámetro  $K$  así: Multiplicando las ecuaciones (14) y (16) por  $D_p \rho_f / \mu_f$ , en la ecuación (14)

$$R_{e_t} = \frac{D_p \rho_f}{\mu_f} = \frac{D_p \rho_f g D_p^2 \rho_s}{\mu_f 18 \mu_f}$$

$$\text{ó} \quad R_{e_t} = k^3 / 18 \text{ donde } k = D_p (g \rho_s \rho_f / \mu_f^2)^{1/3} \quad (17)$$

si la expresión anterior es válida para  $R_{e_t} < 2$ ,

entonces  $k < [18(2)]^{1/3}$ , esto es  $k < 3.3$

En la ecuación (16):

$$R_{e_t} = \frac{D_p \rho_f}{\mu_f} = 1.74 \frac{D_p \rho_f}{\mu_f} \left( \frac{g D_p \rho_s}{\rho_f} \right)^{1/2}$$

$$\text{ó} \quad R_{e_t} = 1.74 k^{1.5} \quad (18)$$

si la extensión anterior es válida para  $500 < R_e < 200,000$ , entonces  $(500/1.74)^{2/3} < k < (200,000/1.74)^{2/3}$ , esto es  $43.6 < k < 2,364$ . De esta manera, la validez de las ecuaciones 14-16 resulta para

$$k < 3.3$$

Régimen de Stokes - ecuación (14)

$$3.3 < k < 43.6$$

Régimen Intermedio - ecuación (15)

$$43.7 < k < 2,364$$

Régimen de Newton - ecuación (16)

**Ilustración:** Determinar la velocidad terminal para particulado esférico de densidad  $64.10 \text{ lbm/ft}^3$ , diámetro  $1.31 \cdot 10^{-3} \text{ ft}$ , cayendo a través del aire a  $300^\circ\text{F}$ , 1 atm, con  $\rho_f = 0.0524 \text{ lbm/ft}^3$ , viscosidad  $\mu_f = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ lbm/ft}\cdot\text{s}$

Evaluando el parámetro k, por definición

$$k = D_p \left( \frac{g \rho_s \rho_f}{\mu_f^2} \right)^{1/3} = 9.26$$

por ubicarse  $3.3 < k < 43.6$ , la expresión de velocidad terminal correspondiente es la ecuación (15), sustituyendo valores  $v_t = 0.153(32.174)^{0.71} (1.31 \cdot 10^{-3})^{1.14} (64.10)^{0.71} / (1.75 \cdot 10^{-5})^{0.43} (0.0524)^{0.29}$ , resulta  $v_t = 4.66 \text{ ft/s}$ .

**Método directo de estimación gráfica**

El método propuesto en esta nota técnica utiliza los datos experimentales de los valores coeficientes de arrastre ( $C_D$ ) y Número de Reynolds ( $R_e$ ), contenidos en la Figura 1, para transformarlas en coordenadas de Fitch [4] que permiten conocer la velocidad terminal en función del diámetro y esfericidad de la partícula. Así, por definición:

Coefficiente de Arrastre

$$C_D = \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{g D_p}{v_t^2} \tag{2}$$

Número de Reynolds

$$R_e = \frac{\rho_f v_t D_p}{\mu_f} \tag{3}$$

i) Eliminando la velocidad terminal según el producto

$$C_D \cdot R_e^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{g D_p}{v_t^2} \left( \frac{\rho_f v_t D_p}{\mu_f} \right)^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho_f (\rho_s - \rho_f)}{\mu_f^2} g D_p^3$$

evaluando el factor

$$\left( \frac{3}{4} C_D \cdot R_e^2 \right)^{1/3} = \left[ \delta \left( \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \right) \left( \frac{\rho_f}{\mu_f} \right)^2 \right]^{1/3} D_p$$

re-arreglando el factor

$$\left( \frac{3}{4} C_D \cdot R_e^2 \right)^{1/3} = \left[ g \left( \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \right) \left( \frac{\rho_f}{\mu_f} \right)^2 \left( \frac{\rho_f}{\mu_f} \right) \right]^{1/3} D_p$$

ó también

$$\left( \frac{3}{4} C_D \cdot R_e^2 \right)^{1/3} = \frac{\rho_f D_p}{\mu_f} \left[ g \left( \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \right) \left( \frac{\mu_f}{\rho_f} \right) \right]^{1/3}$$

definiendo como

$$A = \left[ g \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{\mu_f}{\rho_f} \right]^{1/3}$$

entonces puede escribirse así:

$$\left( \frac{3}{4} C_D \cdot R_e^2 \right)^{1/3} = \frac{\rho_f A D_p}{\mu_f} \tag{19}$$

ii) Eliminando el diámetro promedio de la partícula según el coeficiente  $R_e / C_D$

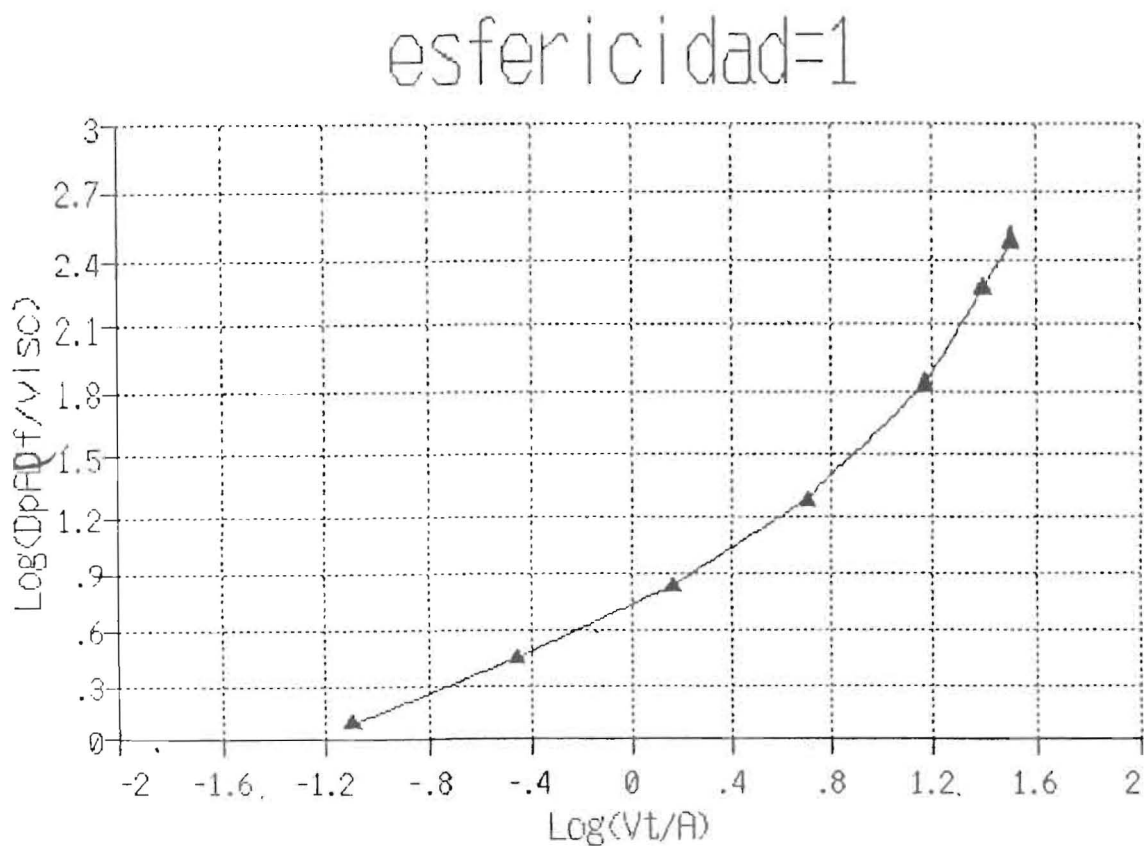


Figura 3. Relación entre diámetro de partícula y velocidad terminal para  $\Psi = 1.0$ .

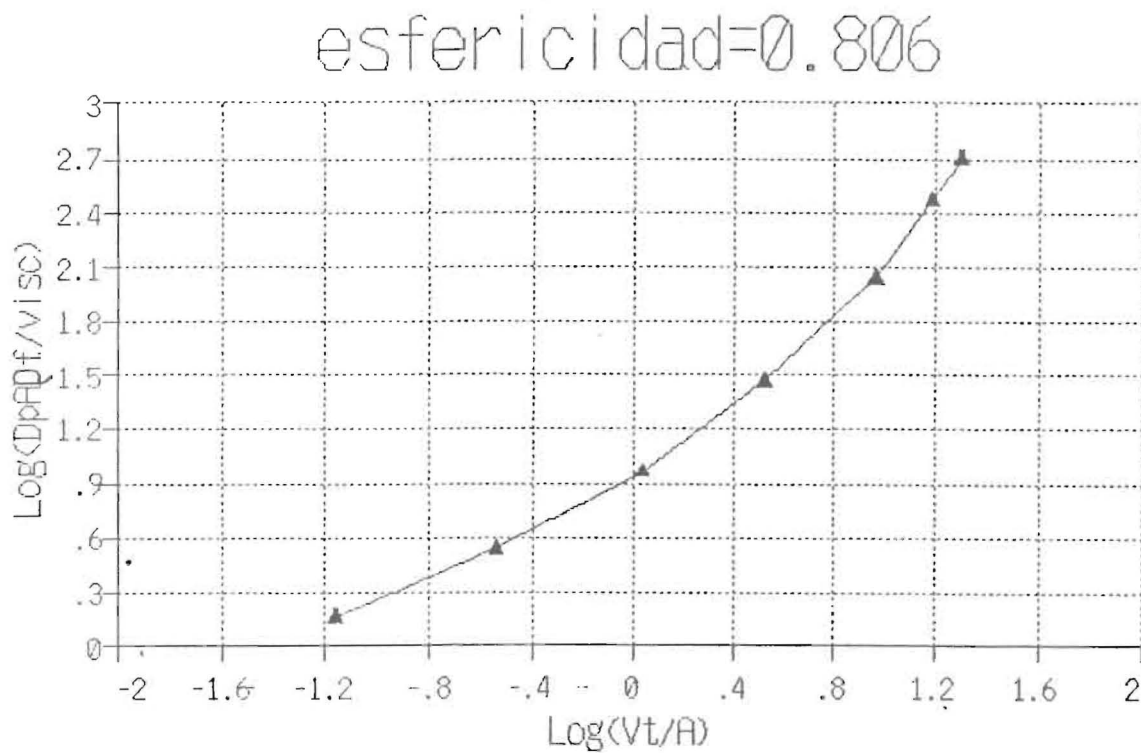


Figura 4. Relación entre diámetro de partícula y velocidad terminal para  $\Psi = 0.806$

esfericidad=0.600

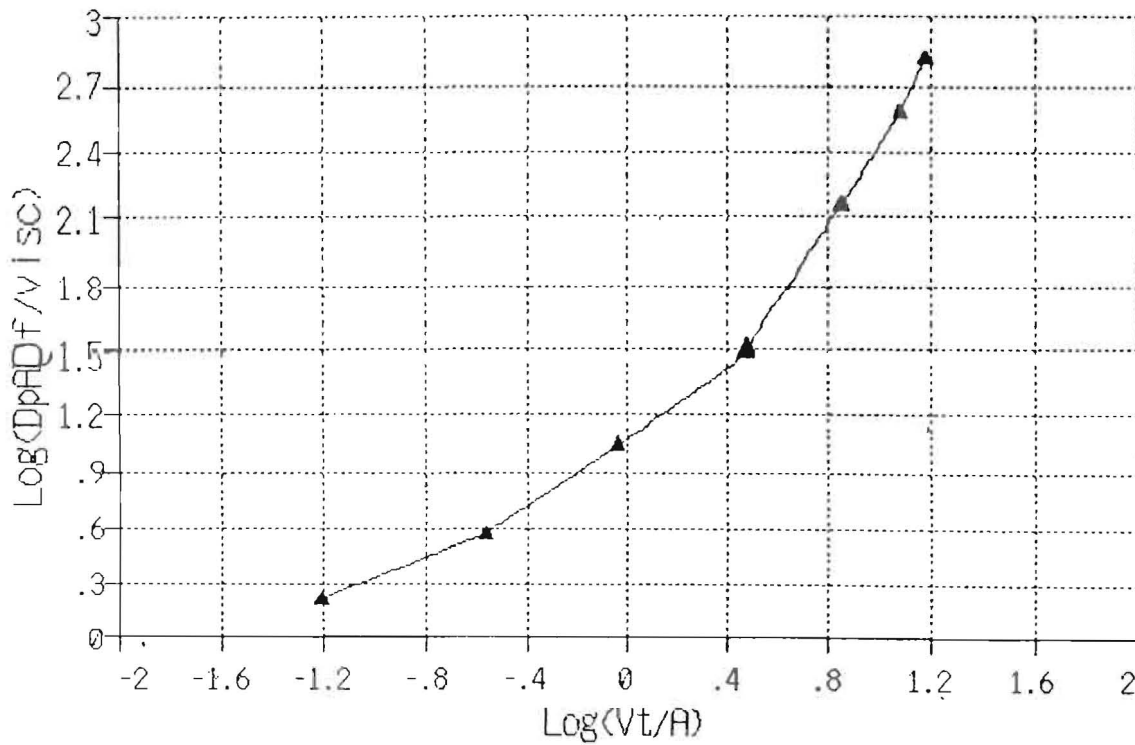


Figura 5. Relación entre diámetro de partícula y velocidad terminal para  $\Psi = 0.100$ .

$$\frac{R_{e_t}}{C_D} = \frac{\rho_f v_t D_p}{\mu_f} / \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{g D_p}{v_t^2} = \frac{3}{4} \frac{\rho_f^2 v_t^3}{g(\rho_s - \rho_f) \mu_f} \quad \left(\frac{4}{3} \frac{R_{e_t}}{C_D}\right)^{1/3} = \frac{v_t}{A} \quad (20)$$

evaluando el factor  $\left(\frac{4}{3} \frac{R_{e_t}}{C_D}\right)^{1/3}$

$$\left(\frac{4}{3} \frac{R_{e_t}}{C_D}\right)^{1/3} = \left[\frac{\rho_f^2 v_t^3}{g(\rho_s - \rho_f) \mu_f}\right]^{1/3}$$

re-arreglando el factor

$$\left(\frac{4}{3} \frac{R_{e_t}}{C_D}\right)^{1/3} = \frac{v_t}{\left[\frac{g(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f} \frac{\mu_f}{\rho_f}\right]^{1/3}}$$

finalmente puede escribirse así:

En las Figuras 3-7 se presentan las relaciones

$$v_t / A = (4 R_{e_t} / 3 C_D)^{1/3} \text{ y}$$

$$D_p A \rho_f / \mu_f = (3 C_D \cdot R_{e_t}^2 / 4)^{1/3}$$

para los factores de esfericidad  $\Psi = 1, 0.806, 0.600, 0.220$  y  $0.125$  respectivamente, válidas para un rango del Número de Reynolds entre 0.1 hasta 10.000.

Las referidas curvas evitan el cálculo gráfico de Foust, la limitación del parámetro  $k$  de Theodore-Buonjocore para  $\Psi = 1.0$ ; de igual manera la determinación del diámetro de la partícula resulta directamente para cada valor de la esfericidad.

esfericidad=0.220

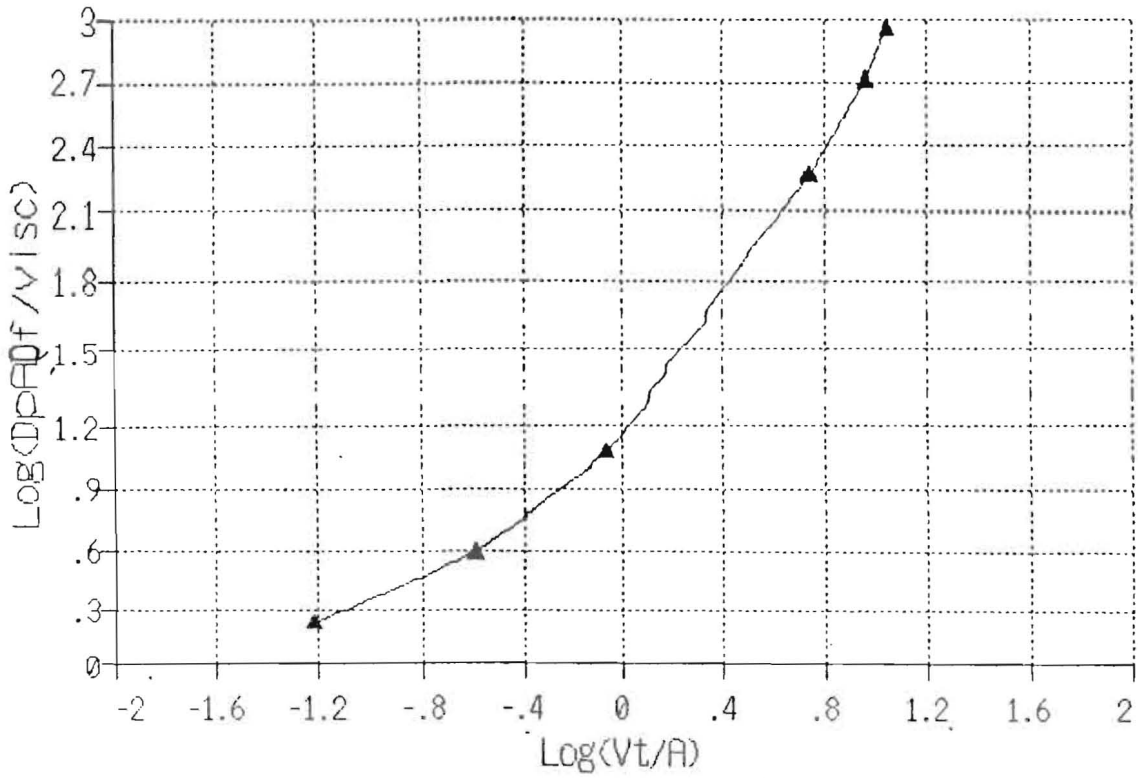


Figura 6. Relación entre diámetro de partícula y velocidad terminal para  $\Psi = 0.220$ .

esfericidad=0.125

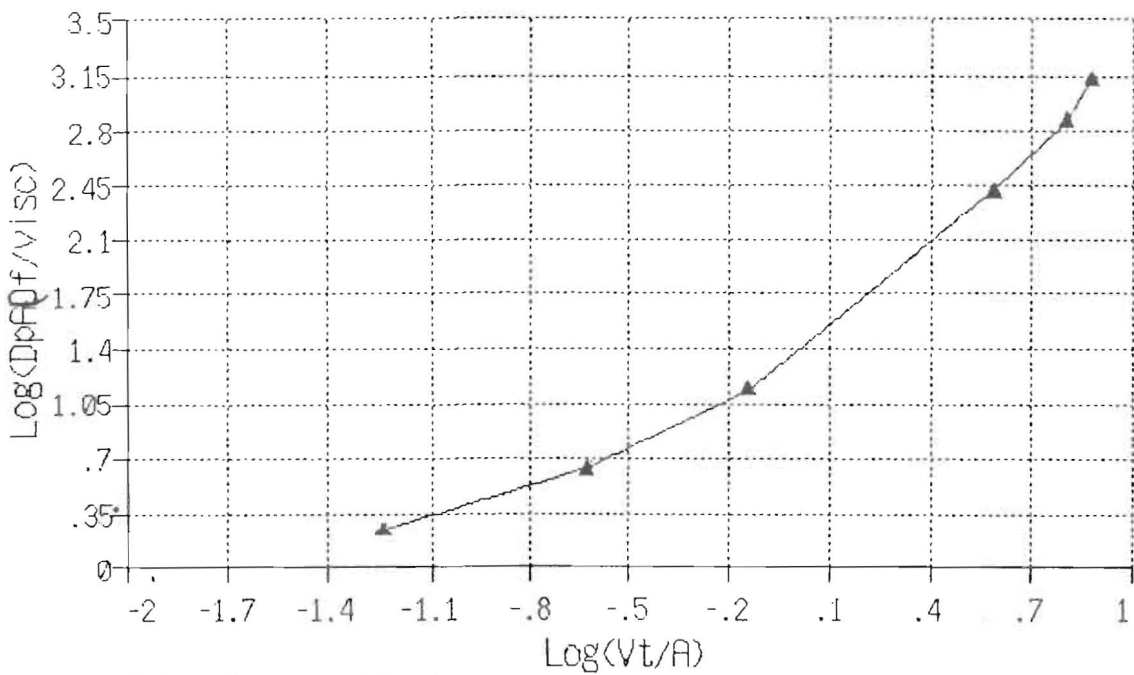


Figura 7. Relación entre diámetro de partícula y velocidad terminal para  $\Psi = 0.125$ .



**Ilustración:** Determinar la velocidad terminal para particulado esférico de densidad  $64.10 \text{ lbm/ft}^3$ , diámetro  $1.31 \cdot 10^{-3} \text{ ft}$ , cayendo a través del aire a  $300^\circ\text{F}$ ,  $1 \text{ atm}$ , con  $\rho_f = 0.0524 \text{ lbm/ft}^3$ , viscosidad  $\mu_f = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ lbm/ft}\cdot\text{s}$

Evaluando el parámetro A, por definición

$$A = \left( g \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \frac{\mu_f}{\rho_f} \right)^{1/3}$$

$$= \left( 32.174 \frac{64.10 - 0.0524}{0.0524} \frac{1.75 \cdot 10^{-5}}{0.0524} \right)^{1/3}$$

$$= 2.36 \text{ ft/s}$$

Evaluando  $D_p A \rho_f / \mu_f$

$$= \frac{(1.31 \cdot 10^{-3}) (2.36) (0.0524)}{1.75 \cdot 10^{-5}} = 9.25$$

De la Figura 3 para esfericidad  $\Psi = 1.0$ , interceptando la curva con  $\log(9.25) = 0.966$  resulta

$$\log \frac{v_t}{A} = 0.288$$

esto es  $v_t/A = 1.945$ , la velocidad terminal

$$v_t = 1.945(2.36) = 4.58 \text{ ft/s, para } \Psi = 1.0$$

si el particulado presenta  $\Psi = 0.806$ , resulta  $v_t = 2.36 \text{ ft/s}$ , mientras para  $\Psi = 0.600$  resulta  $v_t = 1.92 \text{ ft/s}$

### Consideraciones Finales

El método propuesto resuelve de manera directa el cálculo de la velocidad terminal, o diámetro de partícula de cualquier esfericidad, en el rango de flujo entre Números de Reynolds de 0.1 hasta 10.000. Desde el punto de vista de Ingeniería, se obvia el procedimiento de ensayo y error para las diferentes aplicaciones de diseño de equipos de separación fluido-sólido.

### Nomenclatura

A	Parámetro de velocidad según ecuación 19	m/s
$C_D$	Coefficiente de Arrastre según ecuación 2	-
$D, D_p$	Diámetro promedio de partícula	m
g	Aceleración de la gravedad	$\text{m/s}^2$
k	Parámetro adimensional según ecuación 19	-
$F_D$	Fuerza de Arrastre según ecuación 9	N
m	Masa de partícula,	kg
$v_p$	Volumen de la partícula	$\text{m}^3$
$v_t$	Velocidad terminal	m/s
$\rho_f$	Densidad de fluido	$\text{kg/m}^3$
$\rho_s$	Densidad de la partícula	$\text{kg/m}^3$
$\mu, \mu_f$	Viscosidad de fluido	$\text{kg/m}\cdot\text{s}$
$Re, Re_t$	Número de Reynolds	-
y	Trayectoria de la partícula	m
$\alpha$	Parámetro adimensional según ecuación 8	-
$\beta$	Parámetro adimensional según ecuación 8	-
$\Psi$	Factor de esfericidad según ecuación 3	-

### Referencias Bibliográficas

- 1 Brown, G.G. and Associates: "Unit Operations", John Wiley and Sons, New York, 1950, Chapter 18.
- 2 Foust, A.S. and Associates: "Principles of Unit Operations", John Wiley and Sons, New York, 1964, Chapter 20.
- 3 Theodore L. and Buonjcore A.: "Industrial Air Pollution Control Equipment for Particulates", CRC Press Inc., Ohio, 1976, Chapter 2.
- 4 Fitch, B.: "Calculating terminal settling rates in sedimentation", Calculation and Shortcut Deskbook, Chemical Engineering, McGraw-Hill Inc., New York, 1974; pages 6-7.

Recibido el 10 de Marzo de 1994

En forma revisada el 28 de Junio de 1994