Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 18, No. 2, 163-169, 1995

Some results involving generalized Hermite polynomials $H_{2n+r,\alpha}(x)$

Claudio Segundo Hurtado Petit y Beatriz González Matos

División de Postgrado, Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia . Apdo 526 Maracaibo, Venezuela

Abstract

In a recent paper, González B. and Kalla S. defined a generalization of the Hermite polynomials in terms of the confluent hypergeometric function Φ:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n (2n+r)!\,(2x)^r}{n!}\,\Phi(-n;\alpha+1:x^2)$$

and proved the orthogonality properties in $(-\infty,\infty)$, with respect to the weight function

$$w(x,\alpha,r) = e^{-x^2}(x^2)^{\alpha-r+1/2}$$

This paper presents other results involving the polynomials the $H_{2n+r,\alpha}(x)$ such as new recurrence relationships, differential equations, one Laplace transform and relationship between these polynomials and the Jacobi polynomials. It was found that some known results on Hermite polynomials can be obtained as particular cases of those presented here.

Key words: Orthogonal polynomials, confluent hypergeometric function, recurrence relations.

Algunos resultados que involucran a los polinomios generalizados de Hermite $H_{2n+r,\alpha}(x)$

Resumen

En un reciente trabajo, González B. y Kalla S. definieron una generalización de los polinomios de Hermite en términos de la función hipergeométrica confluente Φ:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n (2n+r)!\,(2x)^r}{n!}\,\Phi(-n;\alpha+1:x^2)$$

y demostraron la ortogonalidad de éstos en $(-\infty,\infty)$ respecto de la función de peso

$$w(x,\alpha,r) = e^{-x^2}(x^2)^{\alpha-r+1/2}$$

En esta investigación obtenemos otros resultados que involucran a los polinomios $H_{2n+r,\alpha}(x)$, tales como relaciones de recurrencia, ecuaciones diferenciales, una transformada de Laplace y la relación de estos polinomios con los polinomios de Jacobi. Algunos resultados conocidos relacionados con los polinomios de Hermite resultan como casos particulares de los aquí deducidos.

Palabras claves: Polinomios ortogonales, función hipergeométrica confluente , relaciones de recurrencia.

Introducción

La importancia que tiene en las matemáticas aplicadas el estudio de los polinomios ortogonales está en el hecho de que hay una gran variedad de problemas de ingeniería y de físico-matemática cuyas soluciones se obtienen y están dadas en términos de estos polinomios. Recientemente, los estudios se han orientado hacia la generalización de estos polinomios, en especial los clásicos, tal es el caso de la generalización de los polinomios de Hermite, dada por González B. y Kalla S. [1]:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n (2n+r)!\,(2x)^r}{n!}\,\Phi(-n;\alpha+1:x^2) \quad (1)$$

r es un entero no negativo (fijo), n=0,1,2,3......; $\alpha > -1$; $x \in \mathbb{R}$.

Los polinomios $H_{2n+r,\alpha}(x)$ son ortogonales en $(-\infty,\infty)$ respecto a $e^{-x^2}(x^2)^{\alpha-r+1/2}$ y al sustituir los parámetros r=0 y $\alpha=-1/2$ ó r=1, $\alpha=1/2$ en (1); se obtiene como caso particular los polinomios de Hermite de orden par e impar respectivamente.

En esta investigación deducimos otros resultados que involucran a los polinomios $H_{2n+r,\alpha}(x)$ y obtenemos como casos particulares otros relacionados con los polinomios de Hermite.

Relaciones de Recurrencia y Fórmulas de Diferenciación

a) Si derivamos (1) con respecto de la variable x y utilizamos nuevamente (1), tenemos:

$$\frac{d}{dx}H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{r}{x}H_{2n+r,\alpha}(x) +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2x(2n+r)\,(2n+r-1)\,(2n-2+r)!\,(2x)^r}{(n-1)!\,(\alpha+1)}$$

$$\Phi(1-n;\alpha+2:x^2);$$

de donde finalmente resulta:

$$\frac{d}{dx}H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{r}{x}H_{2n+r,\alpha}(x) + \frac{2x(2n+r)(2n+r-1)}{\alpha+1}$$

$$H_{2(n-1)+r,\alpha+1}(x) \quad (2)$$

n = 1,2,3,....; $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

b) Del resultado [1, P. 145 (16)]:

$$(2n+r-1)\,H_{2(n-1)+r,\alpha+1}(x) = \frac{\alpha+1}{2n+r}H_{2n+r,\alpha}(x) -$$

$$\frac{\alpha+n+1}{2n+r}H_{2n+r,\alpha+1}(x) \quad (3)$$

la cual, al ser sustituida en (2), proporciona la relación:

$$\frac{d}{dx}H_{2n+r,\alpha}(x) = \left(\frac{r}{x}+2x\right)H_{2n+r,\alpha}(x) -$$

$$\frac{2x}{\alpha+1}(\alpha+n+1)\,H_{2n+r,\alpha+1}(x) \quad (4)$$

n = 1,2,3,....; $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

c) La expresión en serie de $H_{2n+r,\alpha}(x)$ [1, P. 144 (4)] se escribe como:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r)!(2x)^r}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,x^{2k}}{(\alpha+1)_k\,k!} \quad (5)$$

de donde obtenemos la expresión:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r)!(2x)^r}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k-(n+1)]\,(-(n+1))_k}{-(n+1)(\alpha+1)_k\,k!}x^{2k}$$

de la cual al separar sumas y simplificar, podemos escribir:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r)!(2x)^r\,x^2}{n!(\alpha+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-n)_{k-1}\, x^{2(k-1)}}{(\alpha+2)_{k-1}\,(k-1)!} - \frac{(-1)^{n-1}(2n+r)!(2x)^r}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-(n+1))_k}{(\alpha+1)_k\, k!}\, x^{2k}$$

Si cambiamos k-1 por s en la primera sumatoria, y luego sumamos y restamos el término, $\frac{(-1)^n(2n+r)!(2x)^r(-n)_n\, x^{2n+2}}{n!\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)_n\, n!}$, resulta:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r)!(2x)^r x^2}{n!\,(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\, x^{2k}}{(\alpha+2)_k\, k!} -$$

$$-\frac{(-1)^{n+1}[2(n+1)+r]!(n+1)(2x)^r}{(2n+2+r)(2n+r+1)(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-(n+1))_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^{2k}}{k!}$$

y si utilizamos (5):

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{x^2}{\alpha+1} H_{2n+r,\alpha+1}(x) -$$

$$\frac{n+1}{(2n+r+2)(2n+r+1)} H_{2(n+1)+r,\alpha}(x) \qquad (6)$$

n = 1,2,3,....; $\alpha > -1$; $r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$.

d) Si despejamos $x\frac{d}{dx} H_{2n+r,\alpha}(x)$ del resultado [1, P. 145 (15)], resulta:

$$x\frac{d}{dx} H_{2n+r,\alpha}(x) = (2n+r)\, H_{2n+r,\alpha}(x) +$$

$$2(2n+r)(2n+r-1)\, H_{2(n-1)+r,\alpha}(x) \qquad (7)$$

y si igualamos con (2)

$$n\, H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{x^2(2n+r)(2n+r-1)}{\alpha+1} H_{2(n-1)+r,\alpha+1}(x) -$$

$$-(2n+r)(2n+r-1)\, H_{2(n-1)+r,\alpha}(x) \qquad (8)$$

n = 1,2,3,....; $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$.

e) Al igualar (3) y (8), y simplificar se tiene:

$$\frac{(x^2-n)(2n+r)(2n+r-1)}{n(\alpha+1)} H_{2(n-1)+r,\alpha+1}(x) =$$

$$\frac{(2n+r)(2n+r-1)}{n} H_{2(n-1)+r,\alpha}(x) +$$

$$\frac{\alpha+1+n}{\alpha+1} H_{2n+r,\alpha+1}(x) \qquad (9)$$

n = 1,2,3,....; $\alpha > -1$; $r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$.

f) De las relaciones (4) y (7):

$$(x^2-n)H_{2n+r,\alpha}(x) = (2n+r)(2n+r-1)\, H_{2(n+1)+r,\alpha}(x) +$$

$$+\frac{x^2(\alpha+n+1)}{\alpha+1} H_{2n+r,\alpha+1}(x) \qquad (10)$$

n = 1,2,3,....; $\alpha > -1$; $r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$.

g) De los resultados [2, P. 190 (23 y 24)], se tiene la relación

$$(n+\alpha)\, L_n^{\alpha-1}(x^2) - (\alpha+x^2)\, L_n^{\alpha}(x^2) + x^2 L_n^{\alpha+1}(x^2) = 0 \qquad (11)$$

La expresión [1, P. 143 (2)] se puede escribir como:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = C_{n,\alpha,r}\, x^r\, L_n^{\alpha}(x^2) \qquad (12)$$

donde

$$C_{n,\alpha,r} = \frac{(-1)^n(2n+r)!\; 2r}{(\alpha+1)_n}$$

Al despejar $L_n^{\alpha}(x^2)$ en (11), sustituir en (12), usar de nuevo (12) y arreglar la expresión, resulta la relación de recurrencia:

$(\alpha+1)(\alpha+x^2)\, H_{2n+r,\alpha}(x) =$

$(\alpha+n+1)x^2\, H_{2n+r,\alpha+1}(x)+\alpha(\alpha+1)\, H_{2n+r,\alpha-1}(x)$ (13)

$n = 0,1,2,3,....;\ \alpha > 0,\ r \in \mathbb{N}$ (fijo); $x \in \mathbb{R}$.

h) De las relaciones [2, P.190 (24 y 25)]:

$(n+1)\, L_{n+1}^{\alpha}(x^2) - (2n+\alpha-x^2+1)\, L_n^{\alpha}(x^2) +$

$(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x^2) = 0$

Si despejamos $L_n^{\alpha}(x^2)$, sustituimos en (12) y arreglamos la expresión, se tiene el siguiente resultado:

$\dfrac{(n+1)(\alpha+n+1)}{(2n+2+r)(2n+1+r)}\, H_{2(n+1)+r,\alpha}(x) +$

$(2n+\alpha-x^2+1)\, H_{2n+r,\alpha}(x) +$

$+(2n+r)(2n+r-1)\, H_{2(n-1)+r,\alpha}(x) = 0$ (14)

$n = 1,2,3,....;\ \alpha > -1,\ r \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}$.

i) De (12):

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r+1)!(2x)^{r+1}}{(2n+r+1)(2x)(\alpha+1)_n}\, L_n^{\alpha}(x^2)$$

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{(-1)^n(2n+r)(2n+r-1)!(2x)}{(\alpha+1)_n}\,(2x)^{r-1}\, L_n^{\alpha}(x^2)$$

Luego, utilizando nuevamente (12), se tienen los resultados:

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = \frac{1}{2x(2n+r+1)}\, H_{2n+(r+1),\alpha}(x) \quad (15)$$

$n \in \mathbb{N};\ r = 0, 1,2,3,....;\ \alpha > -1;\ x \in \mathbb{R};\ x \neq 0$

$$H_{2n+r,\alpha}(x) = 2x(2n+r)\, H_{2n+(r-1),\alpha}(x) \quad (16)$$

$n \in \mathbb{N};\ r = 0, 1,2,3,....;\ \alpha > -1;\ x \in \mathbb{R}$.

j) De (12):

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha-r/2}\, H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,)\right] =$$

$$C_{n,\alpha,r}\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}\, L_n^{\alpha}(x)\right].$$

Utilizando $D\left[x^{\alpha}L_n^{\alpha}(x)\right] = (n+\alpha)\, x^{\alpha-1}\, L_n^{\alpha-1}(x)$ obtenida de [2,Pág.190(27)], y nuevamente (12) tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha-r/2}\, H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,)\right] =$$

$$\alpha\, x^{\alpha-1-r/2}\, H_{2n+r,\alpha-1}(\sqrt{x}\,);$$

y al hacer el cambio $t = \sqrt{x}$, resulta finalmente

$$D\left[t^{2\alpha-r}\, H_{2n+r,\alpha}(t)\right] = 2\alpha t^{2\alpha-1-r}\, H_{2n+r,\alpha-1}(t) \quad (17)$$

donde

$D = \dfrac{d}{dt}$; $r,\ n \in \mathbb{N};\ \alpha > 0;\ t > 0$.

La expresión (17) puede escribirse de otra manera si utilizamos (16)

$$D\left[t^{2\alpha-r}\, H_{2n+r,\alpha}(t)\right] = 4\alpha(2n+r)\, t^{2\alpha-r}\, H_{2n+r-1,\alpha-1}(t) \quad (18)$$

$n \in \mathbb{N};\ r \in \mathbb{N},\ r > 1;\ \alpha > 0$.

Si en (18) se hace $\alpha = 1/2$, $r = 1$, se obtiene el conocido resultado [2, Pág. 193 (14)] para los polinomios de Hermite de orden impar.

Dos Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

a) De la relación (12)

$$H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) = C_{n,\alpha,r}\, x^{r/2}\, L_n^{\alpha}(x),\ x > 0 \quad (19)$$

Si derivamos (19) con respecto de x:

$$\frac{d}{dx} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) = \frac{C_{n,\alpha,r}}{2}\, r\, x^{(r/2)-1} L_n^{\alpha}(x) +$$

$$C_{n,\alpha,r}\, x^{r/2} \left[L_n^{\alpha}(x)\right] \tag{20}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) = C_{n,\alpha,r} \frac{r(r-2)}{4} x^{(r/2)-2} L_n^{\alpha}(x) +$$

$$C_{n,\alpha,r}\, r\, x^{(r/2)-1} \left(L_n^{\alpha}(x)\right)' + C_{n,\alpha,r}\, x^{(r/2)} \left(L_n^{\alpha}(x)\right)'' \tag{21}$$

y utilizando $xy'' + (\alpha+1-x)\, y' + ny = 0$ con $y = L_n^{\alpha}(x)$ de [2,p.188(10)], y (20) se obtiene:

$$\frac{d^2}{dx^2} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) = C_{n,\alpha,r} \frac{r(r-2)x^{(r/2)-2}}{4} L_n^{\alpha}(x) +$$

$$+ \frac{r}{x}\left[\frac{d}{dx} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) - \frac{C_{n,\alpha,r}}{2}\, r x^{(r/2)-1} L_n^{\alpha}(x)\right] +$$

$$+ C_{n,\alpha,r}\, x^{r/2}\left[-\frac{\alpha+1-x}{x}\left(L_n^{\alpha}(x)\right)' - \frac{n}{x} L_n^{\alpha}(x)\right].$$

Luego, utilizando de nuevo (20), (19) y simplificando

$$\frac{d^2}{dx^2} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) - \frac{r-(\alpha+1-x)}{x} \frac{d}{dx} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) -$$

$$- \frac{2r(\alpha-x)-(r^2+4xn)}{4x^2} H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,) = 0$$

Haciendo el cambio $t = \sqrt{x}$, resulta finalmente:

$$t^2 y'' - t\left[1+2(r-\alpha-1+t^2)\right] y' - \left[2r(\alpha-t^2)-(r^2+4t^2 n)\right] y = 0 \tag{22}$$

donde

$y = H_{2n+r,\alpha}(t);\ t > 0;\ \alpha > -1$

Es de hacer notar que la ecuación [2, Pág. 193 (12)] es un caso particular de (22) cuando $r = 0$, $\alpha = -1/2$ ó $r = 1$, $\alpha = 1/2$. Así (22) es una generalización de la ecuación diferencial de Hermite.

b) Consideremos la función

$w = e^{-x/2}\, x^{(2\alpha-2r+1)/4}\, H_{2n+r,\alpha}(\sqrt{x}\,)$.

Según (19), $w = C_{n,\alpha,r}\, x^{1/4}\, z$ con

$z = e^{-x/2}\, x^{\alpha/2}\, L_n^{\alpha}(x)$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{4} C_{n,\alpha,r}\, x^{-3/4} z + C_{n,\alpha,r}\, x^{1/4} z' \tag{23}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{3}{16} C_{n,\alpha,r}\, x^{-7/4} z + \frac{1}{2} C_{n,\alpha,r}\, x^{-3/4} z' +$$

$$C_{n,\alpha,r}\, x^{1/4} z'' \tag{24}$$

De [2, Pág. 188 (11)]:

$$xz'' = -z' + \left(\frac{\alpha^2}{4x} + \frac{x}{4} - n - \frac{\alpha+1}{2}\right) z \tag{25}$$

De (24) y (25):

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{3}{16} C_{n,\alpha,r}\, x^{-7/4} z + \frac{1}{2} C_{n,\alpha,r}\, x^{-3/4} z' +$$

$$+ C_{n,\alpha,r}\, x^{-3/4}\left[-z' + \left(\frac{\alpha^2}{4x} + \frac{x}{4} - n - \frac{\alpha+1}{2}\right) z\right].$$

Si agrupamos términos y usamos (23)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left[\frac{4\alpha^2 + 4x^2 - 16xn - 8x\alpha - 8x - 1}{16x^2}\right] w - \frac{1}{2x}\frac{dw}{dx},$$

y si hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{x}$, obtenemos:

$$w'' - \left[\frac{4\alpha^2 + 4t^2(t^2-4n-2\alpha-2) - 1}{4t^2}\right] w = 0 \tag{26}$$

con $w = e^{-t^2/2}\, t^{\alpha-r+1/2} H_{2n+r,\alpha}(t)$ y $w'' = \dfrac{d^2 w}{dt^2}$

Si en (26) se hace $r = 0$, $\alpha = -1/2$ ó $r = 1$, $\alpha = 1/2$, se obtiene la ecuación diferencial [2, Pág. 193 (13)], la cual tiene a $H_n(x)$ como solución para n par e impar.

Transformada de Laplace para la Función $t^\rho\ H_{2n+r,\alpha}\ (t)$

Al usar la definición de la transformada de Laplace [3, Pág. 1142], las relaciones (1) y (5)

$$L\left[t^\rho H_{2n+r,\alpha}(t);\ s\right] = \frac{(-1)^n(2n+r)!2^r}{n!}\int_0^\infty t^{\rho+r}e^{-st}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{t^{2k}}{k!}dt,$$

con $\rho \geq 0$; $\alpha > -1$; n = 0,1,2,3,.... y con intercambio en orden de integración y suma

$$L\left[t^\rho H_{2n+r,\alpha}(t);\ s\right] = \frac{(-1)^n(2n+r)!2^r}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k k!}$$

$$\int_0^\infty t^{\rho+r+2k}e^{-st}dt,$$

y utilizando [3, Pág. 317 (4)] y [4, P. 3(1.2.3)], se tiene

$$L\left[t^\rho H_{2n+r,\alpha}(t);\ s\right] = \frac{(-1)^n(2n+r)!\Gamma(\rho+r+1)2^r}{n!\ s^{\rho+r+1}}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\left(\frac{\rho+r+1}{2}\right)_k\left(\frac{\rho+r+2}{2}\right)_k}{(\alpha+1)_k\ k!}\left(\frac{4}{s^2}\right)^k$$

y en términos de la función hipergeométrica generalizada ${}_3F_1$:

$$L\left[t^\rho H_{2n+r,\alpha}(t);\ s\right] = \frac{(-1)^n(2n+r)!\Gamma(\rho+r+1)}{n!\ s^{\rho+r+1}}2^r \cdot \tag{27}$$

$$\cdot {}_3F_1\left[\begin{matrix}-n,\frac{\rho+r+1}{2},\frac{\rho+r+2}{2}; & \\ & \frac{4}{s_2} \\ \alpha+1; & \end{matrix}\right]$$

$\rho \geq 0$, $\alpha > -1$, r, n $\in$ N

Si en (27) $\rho = 0$, se obtiene la transformada de Laplace de los polinomios $H_{2n+r,\alpha}$ (t):

$$L\left[H_{2n+r,\alpha}(t);\ s\right] = \frac{(-1)^n(2n+r)!\Gamma(r+1)2^r}{n!\ s^{r+1}}$$

$$\cdot {}_3F_1\left[\begin{matrix}-n,\frac{r+1}{2},\frac{r+2}{2}; & \\ & \frac{4}{s_2} \\ \alpha+1; & \end{matrix}\right] \tag{28}$$

$\alpha > -1$; r , n $\in$ N

Si en (28), r = 0, $\alpha = -1/2$ ó r = 1, $\alpha = 1/2$, se obtiene la transformada de Laplace para los polinomios de Hermite, como puede verificarse en [5, Pág. 486 (2.20.3-1)].

Relación con los Polinomios de Jacobi

Si utilizamos la relación de los polinomios de Laguerre con los polinomios de Jacobi [2, P. 191 (35)] y el resultado (12), obtenemos la relación de los polinomios $H_{2n+r,\alpha}$ (x) con los polinomios de Jacobi:

$$\frac{(-1)^n(\alpha+1)_n}{(2n+r)!\ (2x)^r}H_{2n+r,\alpha}(x) = \lim_{\beta\to\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x^2}{\beta}\right) \tag{29}$$

Agradecimiento

Agradecemos la colaboración y apoyo prestados por el Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.).

Referencias Bibliográficas

1. González, B. y Kalla, S.: Una generalización de los polinomios de Hermite. Rev. Téc. Ing.

Univ. del Zulia. Vol. 15, No. 2, (1992), 143-145.

2. Erdélyi, A.: Higher Transcendental Functions. Vol. II. Mac. Graw-Hill Book Company, Inc. New York (1954).

3 Gradsthteyn, I. S. and Ryzhik, I. M.: Table of Integrals, Series and Products. Academic Press, Inc. U.S.A. (1980).

4. Lebedev, N. N.: Special Functions and Their Applications. Dover Pubblications, Inc. New York (1972).

5. Prudnikov, A. P.; Brychkov, Yu A. and Marichev, O. I.: Integrals and Series. Volume 2. Gordon and Breach Science Publishers. Amsterdam. (1986).

Recibido el 11 de Octubre de 1994
En forma revisada el 17 de Abril de 1995