Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 18, No. 2, 171-174, 1995

A note on generalized finite Hankel transforms of the second and third kind

Misvely Bermúdez

Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Apdo.526 Maracaibo, Venezuela

Abstract

In this paper generalized Hankel finite transforms of the second and third kind are defined by using the Sturm-Liouville finite transform theory. Its inversion formulas are given and their application to a problem related to atmospherical pollution.

Key words: Finite, transforms, generalized, Hankel.

Una nota sobre unas transformadas finitas generalizadas de Hankel de segunda y tercera clase

Resumen

En este trabajo se definen unas transformadas finitas de Hankel de segunda y tercera clase usando la teoría de transformadas finitas de Sturm-Liouville. Se dan sus correspondientes fórmulas de inversión y algunas aplicaciones relacionadas con un problema de contaminación ambiental.

Palabras claves: Finita, transformada, generalizada, Hankel.

Introducción

En un trabajo anterior [1], el autor utiliza una forma general de la ecuación diferencial de Bessel [2, p.106]

$$\frac{1}{z^{2\gamma-2}}\frac{d^2\phi}{dz^2}+\frac{(1-2\alpha)}{z^{2\gamma-1}}\frac{d\phi}{dz}+\left(\beta^2\gamma^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{z^{2\gamma}}\right)\phi=0 \qquad (1)$$

con parámetros β, γ, α y ν, para definir la transformada finita generalizada de Hankel de primera clase, usando la teoria de las Transformadas Finitas de Sturm-Liouville [3], en el intervalo $0 \le z \le a$ y con la condición de contorno $Qf = f(x,a)$. En este trabajo se presentan las transformadas finitas generalizadas de Hankel de segunda y tercera clase, adecuadas a nuevas condiciones de contorno, con sus correspondientes fórmulas de inversión y aplicaciones. Las propiedades de estas transformadas se obtienen de manera idéntica a las de la transformada finita generalizada de Hankel de primera clase $H_{1,\nu}$.

Transformada Finita Generalizada de Hankel de Segunda Clase

Definición:

La solución de la ecuación (1) viene dada por

$$\phi_{\alpha,\gamma}(\beta,z) = c_1 z^{\alpha} J_{\nu}(\beta_m z^{\gamma}) + c_2 z^{\alpha} Y_{\nu}(\beta_m z^{\gamma}) \qquad (2)$$

Si consideramos el caso

$$0\leq z\leq A,\ Pf=\frac{\partial f}{\partial z}(x,a)+hf(x,a) \qquad (3)$$

la solución requerida de la ecuación (1) en este caso es:

$$\phi_{\alpha,\gamma}(\beta,z)=z^{\alpha}J_{\nu}(\beta_m z^{\gamma}),\ \nu\geq 0 \qquad (4)$$

donde $\beta_1, \beta_2, \ldots$ son las raíces positivas de la ecuación trascendental

$$a^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{a}+h\right)J_{\nu}(\beta_m a^{\gamma})+\gamma\,\beta_m a^{\gamma+\alpha-1}J'_{\nu}(\beta_m a^{\gamma})=0 \qquad (5)$$

Definimos la transformada finita generalizada de Hankel de segunda clase por

$$\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{2,\nu}(x,m)=H_{2,\nu}[f(x,z);\ \alpha,\gamma,m]$$
$$=\gamma^2\int_o^a z^{2\gamma-\alpha-1}f(x,z)\,J_{\nu}(\beta_m z^{\gamma})\,dz \qquad (6)$$

donde β_m es la raíz emésima positiva de la ecuación (5).

Fórmula de Inversión

Ya que las funciones de Bessel [4] satisfacen en este caso la relación de ortogonalidad

$$\int_o^a z^{2\gamma-1}J_{\nu}(\beta_m z^{\gamma})\,J_{\nu}(\beta_n z^{\gamma})\,dz=$$
$$\left[\frac{a^2}{2\gamma^3\beta_m^2}\left(\frac{\alpha}{a}+h\right)^2+\frac{1}{2\gamma}\left(a^{2\gamma}-\frac{\nu^2}{\beta_m^2}\right)\right]J_{\nu}^2(\beta_m a^{\gamma})\,\delta_{mn}$$
$$\operatorname{Re}\nu>-1 \qquad (7)$$

donde $=\delta_{mn}=\left\{\begin{matrix}0\ ,\ m\neq n\\ 1\ ,\ m=n\end{matrix}\right\}$,

la fórmula de inversión para el operador $H_{2,\nu}$ es

$$f(x,z)\equiv H_{2,\nu}^{-1}[\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{2,\nu}(x,m)\ ;\ z]$$
$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{2,\nu}(x,m)\,z^{\alpha}J_{\nu}(\beta_m z^{\gamma})}{\left[\frac{a^2}{\gamma\beta_m^2}\left(\frac{\alpha}{a}+h\right)^2+\gamma\left(a^{2\gamma}-\frac{\nu^2}{\beta_m^2}\right)\right]J_{\nu}^2(\beta_m a^{\gamma})} \qquad (8)$$

La transformada finita generalizada de Hankel de segunda clase, correspondiente al operador

$$N_{\nu}(\alpha,\gamma)\equiv\frac{1}{\gamma^2 z^{2\gamma-2}}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{(1-2\alpha)}{\gamma^2 z^{2\gamma-1}}\frac{d}{dz}+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{\gamma^2 z^{2\gamma}} \qquad (9)$$

es

$$H_{2,\nu}[N_{\nu}f(x,z)\ ;\ \alpha,\gamma\ ;\ m]=$$
$$-\beta_m^2\bar{f}^{\alpha,\gamma}_{2,\nu}(x,m)+a^{1-\alpha}J_{\nu}(\beta_m a^{\gamma})\left[\left.\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\right|_{z=a}+hf(x,a)\right] \qquad (10)$$

Aplicación de la Transformada Finita Generalizada de Hankel de Segunda Clase

Para ilustrar el uso de la transformada finita generalizada de Hankel de segunda clase, consideremos el problema de difusión [5]

$$\frac{1}{z^{n-1}}\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}+\frac{k_1+w}{k_1 z^n}\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{u_1}{k_1}\frac{\partial q}{\partial x},\quad \begin{matrix}0\leq x\leq 1,\\ 0\leq z\leq a,\end{matrix} \qquad (11)$$

con las condiciones de contorno

$$q(0,z)=f(z)\ ,\ 0\leq z\leq a$$
$$-\left(\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{w}{k_1 z}q\right)_{z=a}=0\ ,\ 0\leq x\leq 1 \qquad (12)$$

Introduzcamos la transformada

$$\bar{q}(x,m)=H_{2,\nu}\left[q(x,z);\ -\frac{w}{2k_1},\ \frac{n+1}{2},\ m\right] \qquad (13)$$

donde $\nu=\dfrac{w}{k_1(1+n)}$

Aplicando transformada a ambos miembros de (11) y usando el resultado (10) se obtiene

$$-\frac{\beta_m^2}{\gamma^2}\bar{q}(x,m)=\frac{\partial\bar{q}(x,m)}{\partial x}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\beta_m^2}{\gamma^2}\right)\bar{q}(x,m)=0 \qquad (14)$$

con la condición

$$\bar{q}(0,m) = H_{2,\nu}\left[f(z), -\frac{w}{2k_1}, \frac{n+1}{2}, m\right] \quad (15)$$

La solución de la ecuación (14) es

$$\bar{q}(x,m) = \bar{q}(0,m)\, e^{-\frac{\beta_m^2}{\gamma}x}$$

Usando la fórmula de inversión (8)

$$q(x,z) = \frac{8}{(n+1)^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-\frac{w}{2k_1}} J_\nu(\beta_m z^{\frac{n+1}{2}})\, e^{-\frac{4\beta_m^2}{(n+1)^2}}}{\left[\frac{2a^2}{\beta_m^2(n+1)}\left(\frac{w}{2k_1 a}\right)^2 + \frac{n+1}{4}\left(a^{n+1} - \frac{\nu^2}{\beta_m}\right)\right] J_\nu^2\left(\beta_m a^{(n+1)/2}\right)}$$

$$\cdot\int_0^a z^{n-\frac{w}{2k_1}} f(z)\, J_\nu\left(\beta_m z^{(n+1)/2}\right) dz. \quad (16)$$

Transformada Finita Generalizada de Hankel de Tercera Clase

Definición

Considerando el caso $a \le z \le b$,

$$Pf = f(x,a),\ Qf = f(x,b) \quad (17)$$

En este caso la solución de la ecuación (1), considerada de la forma (2), es

$$\Phi_{\alpha,\gamma}(\beta,z) = z^\alpha J_\nu(\beta_m z^\gamma)Y_\nu(\beta_m a^\gamma) - z^\alpha J_\nu(\beta_m a^\gamma)Y_\nu(\beta_m z^\gamma) \quad (18)$$

donde ahora β_m es una raíz de la ecuación trascendental

$$J_\nu(\beta_m b^\gamma)Y_\nu(\beta_m a^\gamma) - J_\nu(\beta_m a^\gamma)Y_\nu(\beta_m b^\gamma) = 0 \quad (19)$$

Definimos la transformada finita generalizada de Hankel de tercera clase por la ecuación

$$\bar{f}_{3,\nu}^{\alpha,\gamma}(x,m) = H_{3,\nu}[f(x,z);\ \alpha,\gamma;\ m]$$
$$= \gamma^2\int_a^b z^{2\gamma-\alpha-1} f(x,z)$$
$$\left[J_\nu(\beta_m z^\gamma)Y_\nu(\beta_m a^\gamma) - Y_\nu(\beta_m z^\gamma)J_\nu(\beta_m a^\gamma)\right] dz \quad (20)$$
$$\gamma \neq 0$$

Fórmula de Inversión

Ya que las funciones de Bessel satisfacen en este caso la condición de ortogonalidad

$$\int_a^b z^{2\gamma-1}\left[J_\nu(\beta_m z^\gamma)Y_\nu(\beta_m a^\gamma) - J_\nu(\beta_m a^\gamma)Y_\nu(\beta_m z^\gamma)\right]\times$$
$$\times\left[J_\nu(\beta_n z^\gamma)Y_\nu(\beta_n a^\gamma) - J_\nu(\beta_n a^\gamma)Y_\nu(\beta_n z^\gamma)\right] dz =$$
$$= \frac{2}{\gamma\pi^2\beta_m^2}\left[\frac{J_\nu^2(\beta_m a^\gamma) - J_\nu^2(\beta_m b^\gamma)}{J_\nu^2(\beta_m b^\gamma)}\right]\delta_{m,n} \quad (21)$$

donde $\delta_{m,n} = \begin{Bmatrix} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{Bmatrix}$,

la fórmula de inversión para el operador $H_{3,\nu}$ es

$$f(x,z) = H_{3,\nu}^{-1}[\bar{f}_{3,\nu}^{\alpha,\gamma}(x,m);\ z]$$
$$= \frac{\pi^2}{2\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m^2 \bar{f}_{3,\nu}^{\alpha,\gamma}(x,m)\, J_\nu^2(\beta_m b^\gamma)}{[J_\nu^2(\beta_m a^\gamma) - J_\nu^2(\beta_m b^\gamma)]}\times$$
$$\times z^\alpha J_\nu(\beta_m z^\gamma)Y_\nu(\beta_m a^\gamma) - z^\alpha J_\nu(\beta_m a^\gamma)Y_\nu(\beta_m z^\gamma) \quad (22)$$

donde la suma se extiende sobre las raíces positivas de la ecuación trascendental.

Transformada Finita Generalizada de Hankel de Tercera Clase del Operador $N_\nu(\alpha,\gamma)$

$$H_{3,\nu}[N_\nu f(x,z);\ \alpha,\gamma;\ m] = \frac{2}{\pi\beta_m b^{\gamma+\alpha-1}}\left[\frac{J_\nu(\beta_m a^\gamma)}{J_\nu(\beta_m b^\gamma)}\right] f(x,b)$$
$$- \frac{2}{\pi\beta_m a^{\gamma+\alpha-1}} f(x,a) - \beta_m^2\, \bar{f}_{3,\nu}^{\alpha,\gamma}(x,m) \quad (23)$$

Agradecimiento

Agradecemos al C.O.N.D.E.S. el soporte económico brindado para la realización de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

1. BERMUDEZ, M.E.: "Sobre una Transformada Finita Generalizada de Hankel", Rev. Téc. Fac. de Ing. Univ. Zulia, Vol. 17, No. 1, (1994) 47-50.
2. LEBEDEV, N.N.: "Special Functions and their Applications", Dover Publications, Inc. New York, 1972.
3. SNEDDON, I.N.: "The Use of Integral Transforms", Mc Graw Hill, New York, 1972.
4. WATSON, G.N.: "A Treatise on the theory of Bessel Functions". 2nd Edition, Cambridge University Press, 1980.
5. ONIKUL, R.I. and KHURSHUDYAN, L.G: "The diffusion of dust from its ground-level areal sources". Fluid Mechanics-Soviet Research, Vol. 13, No. 6, (1984), 64-74.

Recibido el 21 de Junio de 1994
En forma revisada el 21 de Febrero de 1995