Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 21, Nº 1, 67-73, 1998

Evaluation of fractional integrals involving Fox's H-Function

Rafael Luque* and Leda Galué**

** Centro de Estudios Matemáticos (CEM), Facultad de Humanidades y Educación Universidad del Zulia, Apartado 526.*

***Centro de Investigación de Matemáticas Aplicadas (CIMA), Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia, Apartado postal 10482. Maracaibo, Venezuela*

Abstract

In this paper we evaluate some fractional integrals involving the Fox's H-function of different arguments. To this end we use the multiple Wright-Erdélyi-Kober operators of Riemann-Liouville and Weyl type, defined and studied by L. Galué, S. L. Kalla and H. M. Srivastava.

These operators are further generalization of the multiple Erdélyi-Kober operators, introduced and studied by V. Kiryakova and S. Kalla and involving H-functions of same nature as kernel.

Fractional integrals containing the Fox's H-function have been also evaluated by M. Saigo, R. K. Saxena and J. Ram using the operators defined by M. Saigo.

Key words: Fractional integrals, Fox's H-function, multiple Erdélyi-Kober operators, multiple Wright-Erdélyi-Kober operators.

Evaluación de integrales fraccionales que involucran la Función H de Fox

Resumen

En este trabajo evaluamos algunas integrales fraccionales que involucran la función H de Fox de diferentes argumentos. Para este fin usamos los operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Riemann-Liouville y de tipo Weyl, definidos y estudiados por L. Galué, S. L. Kalla y H. M. Srivastava.

Estos operadores son además generalizaciones de los operadores múltiples de Erdélyi-Kober, introducidos y estudiados por V. Kiryakova y S. Kalla, los cuales involucran funciones H de la misma naturaleza como núcleo.

Integrales fraccionales que contienen la función H de Fox han sido evaluadas también por M. Saigo, R. K. Sexena y J. Ram usando los operadores definidos por M. Saigo.

Palabras clave: Integrales fraccionales, función H de Fox, operadores múltiples de Erdélyi-Kober, operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober.

Introducción

El cálculo fraccional se refiere a derivadas e integrales de orden arbitrario, extendiendo así el significado de la expresión $\frac{d^n y}{dx^n}$, para "n" arbitrario (real o complejo). Por esta razón es usual encontrar en la literatura la notación $\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$; donde ν es arbitrario.

Desde sus inicios el cálculo fraccional ha tenido aplicación en muchos campos de las ciencias, tal es el caso de la aplicación que le dio Oliver Heaviside en la teoría de circuitos eléctricos.

El cálculo fraccional ha sido aplicado exitosamente en varios campos nuevos tales como: reología, biología cuantitativa, electro-química, teoría de dispersión, difusión, entre otros [1, 2, 3, 4]. En estos momentos la aplicación en la ingeniería se encuentra en etapa de germinación, sin embargo, se tiene por ejemplo que desempeña un papel importante en la descripción empírica de fenómenos que no son fácilmente descritos por la diferenciación e integración tradicional, como son la viscoelasticidad y la electro-química de corrosión, entre otros [5].

Entre los operadores con mayor aplicación se encuentran los de Erdélyi-Kober, que junto a muchas de sus generalizaciones han sido aplicados en diversos campos.

Operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Riemann-Liouville

Definición

Sea $m \geq 1$ un entero, $\beta_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $\delta_k \geq 0$ y γ_k, $k = 1,2,\ldots,m$ números reales. Se definen los operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Riemann-Liouville como [6]:

$$If(x) = I^{(\gamma_k),(\delta_k)}_{(\beta_k),(\lambda_k),m} f(x) =$$

$$\begin{cases} x^{-1} \int_0^x H^{m,0}_{m,m}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}\left(\gamma_k+\delta_k+1-\frac{1}{\beta_k},\frac{1}{\beta_k}\right)_1^m \\ \left(\gamma_k+1-\frac{1}{\lambda_k},\frac{1}{\lambda_k}\right)_1^m\end{matrix}\right.\right] f(t)dt, & \text{si } \sum_1^m \delta_k > 0, \\ f(x) \; si \; \delta_k = 0, \lambda_k = \beta_k, k = 1,2,\ldots,m & \end{cases} \tag{1}$$

donde $H^{M,N}_{P,Q}\left[x\left|\begin{matrix}(a_k, A_k)_1^P \\ (b_k, B_k)_1^Q\end{matrix}\right.\right]$ es la función H de Fox,

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_k} \geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{\beta_k},\; f(x) \in C_\alpha,\; \text{y } \alpha \geq \max_{1\leq k\leq m}\left[-\lambda_k(\gamma_k+1)\right],$$

$$\text{con } C_\alpha = \left\{f(x) = x^p \tilde{f}(x); p > \alpha, \tilde{f} \in C[0,\infty)\right\}. \tag{2}$$

Entre las propiedades de este operador se encuentra [6]

$$I^{(\gamma_k),(\delta_k)}_{(\beta_k),(\lambda_k),m} x^\rho = \prod_{k=1}^m \frac{\Gamma\left(\gamma_k+1+\frac{\rho}{\lambda_k}\right)}{\Gamma\left(\gamma_k+\delta_k+1+\frac{\rho}{\beta_k}\right)} x^\rho. \tag{3}$$

Operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Weyl

Definición

Sea $n \geq 1$ un entero, $\varepsilon_k > 0$, $\xi_k > 0$, $\alpha_k \geq 0$ y τ_k, $k = 1,2,\ldots,n$ números reales. Se definen los operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Weyl como [6]:

$$Kf(x) = K^{(\tau_k),(\alpha_k)}_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n} f(x) =$$

$$\begin{cases} x^{-1} \int_x^\infty H^{n,0}_{n,n}\left[\frac{x}{t}\left|\begin{matrix}\left(\tau_k+\alpha_k+\frac{1}{\varepsilon_k},\frac{1}{\varepsilon_k}\right)_1^n \\ \left(\tau_k+\frac{1}{\xi_k},\frac{1}{\xi_k}\right)_1^n\end{matrix}\right.\right] f(t)dt, & \text{si } \sum_1^n \alpha_k > 0 \\ f(x) \quad si \quad \alpha_k = 0, \quad \varepsilon_k = \xi_k, \quad k = 1,2,\ldots,n & \end{cases} \tag{4}$$

$$\text{con } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\xi_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon_k} > 0,\; f(x) \in C^*_{\alpha^*},\; \alpha^* \leq \min_{1\leq k\leq n}(\xi_k \tau_k),$$

$$\text{y } C^*_{\alpha^*} = \left\{f(x) = x^q g(x); q < \alpha^*, g \in C(0,\infty), |g| \leq A_g\right\}. \tag{5}$$

Entre las propiedades de este operador está [6]

$$K^{(\tau_k),(\alpha_k)}_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n} x^\lambda = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma\left(\tau_k-\frac{\lambda}{\xi_k}\right)}{\Gamma\left(\tau_k+\alpha_k-\frac{\lambda}{\varepsilon_k}\right)} x^\lambda. \tag{6}$$

Prácticamente, los operadores generalizados de integración fraccional (1) y (4), son modificaciones de los así llamados "integrales fraccionales generalizadas, u operadores múltiples de Erdélyi-Kober" de tipo Riemann-Liouville y de tipo Weyl, introducidos en trabajos previos de V. Kiryakova [7] y en un trabajo común de S. Kalla y V. Kiryakova [8]. Estos operadores, obtenidos de (1) y (4) cuando $\beta_k = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, m$, son representables no sólo por integrales de la forma (1) y (4), involucrando funciones H (o funciones G), sino también como composiciones de operadores de Erdélyi-Kober de tipo Riemann-Liouville o Weyl, respectivamente. Cabe mencionar, que los operadores (1) y (4) son también composiciones de operadores de integración fraccional más simples ([6],[9]) pero que no son los usualmente llamados operadores de Erdélyi-Kober.

Todas las propiedades de (1) y (4) se deducen fácilmente en la misma forma como para el caso especial mencionado, desarrollado por Kalla y Kiryakova [8], Kiryakova [7] y además aplicado a la teoría de las funciones especiales [10]. A saber, en [10] ha sido demostrado que casi todas las funciones especiales (incluyendo las funciones ${}_pF_q$ y las funciones hipergeométricas generalizadas de Wright ${}_p\psi_q$) son representables como integrales fraccionales generalizadas de la forma (1) de tres funciones elementales básicas.

La Función H de Fox

La función H de Fox se define en términos de una integral de tipo Mellin-Barnes en la forma [11, 12]

$$H_{P,Q}^{M,N}(x) \equiv H_{P,Q}^{M,N}\left[x\begin{matrix}(a_j,A_j)_1^P\\(b_j,B_j)_1^Q\end{matrix}\right] \equiv H_{P,Q}^{M,N}\left[x\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_P,A_P)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_Q,B_Q)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c X(s)x^s ds, \tag{7}$$

donde $i=\sqrt{-1}$ y los polos del integrando, son asumidos como simples.

Aquí,

$$X(s)=\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+A_js)}{\prod_{j=N+1}^{P}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_j+B_js)}, \tag{8}$$

donde M, N, P y Q son enteros no negativos tales que $0\le N\le P$, $1\le M\le Q$.

$$A_j(j=1,2,\ldots\ldots,P),\quad B_j(j=1,2,\ldots\ldots,Q),$$

son números positivos,

$$a_j(j=1,2,\ldots\ldots,P),\quad b_j(j=1,2,\ldots\ldots,Q),$$

son números complejos tales que

$$A_j(b_h+u)\neq B_h(a_j-\lambda-1) \text{ para}$$

$$u,\lambda=0,1,2,\ldots;h=1,2,\ldots\ldots,M;j=1,2,\ldots,N.$$

C es un contorno apropiado separando los polos de $\Gamma(b_j-B_js)$, $j=1,\ldots,M$, de los polos de $\Gamma(1-a_j+A_js)$, $j=1,\ldots,N$.

La expresión $x^s=\exp\left[s\{\operatorname{Log}|x|+i\arg(x)\}\right]$. $\operatorname{Log}|x|$ representa el logaritmo natural de $|x|$ y $\arg(x)$ no es necesariamente el valor principal.

En este trabajo evaluamos algunas integrales fraccionales que involucran la función H de Fox de diferentes argumentos. Para tal fin usamos los operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Riemann-Liouville y de tipo Weyl, definidos y estudiados por L. Galué, S.L. Kalla y H.M. Srivastava [6].

Integrales fraccionales que contienen la función H de Fox han sido evaluadas también por M. Saigo, R.K. Saxena y J. Ram [13], usando los operadores definidos por M. Saigo.

Evaluación de integrales fraccionales que involucran la Función H de Fox usando los operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Riemann-Liouville

Si $h_1(t;x)=t^\sigma H_{P,Q}^{M,N}\left[zt^\mu(x-t)^\nu\left|\begin{matrix}(a_k,A_k)_1^P\\(b_k,B_k)_1^Q\end{matrix}\right.\right]$,

donde $\sigma\in C,\mu,\nu\in R^+$

de la definición (1), se tiene que

$$Ih_1(t;x)=I_{(\beta_k),(\lambda_k),m}^{(\gamma_k),(\delta_k)}h_1(t;x)=$$

$$x^{-1}\int_0^x H_{m,m}^{m,0}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}\left(\gamma_k+\delta_k+1-\frac{1}{\beta_k},\frac{1}{\beta_k}\right)_1^m\\\left(\gamma_k+1-\frac{1}{\lambda_k},\frac{1}{\lambda_k}\right)_1^m\end{matrix}\right.\right].$$

$$t^\sigma H_{P,Q}^{M,N}\left[zt^\mu(x-t)^\nu\left|\begin{matrix}(a_k,A_k)_1^P\\(b_k,B_k)_1^Q\end{matrix}\right.\right]dt \tag{9}$$

aplicando la definición de la función H de Fox (7), se puede escribir

$$Ih_1(t;x)=x^{-1}\int_0^x H_{m,m}^{m,0}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}\left(\gamma_k+\delta_k+1-\frac{1}{\beta_k},\frac{1}{\beta_k}\right)_1^m\\\left(\gamma_k+1-\frac{1}{\lambda_k},\frac{1}{\lambda_k}\right)_1^m\end{matrix}\right.\right].$$

$$t^{\sigma}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c}X(s)\;z^{s}t^{\mu s}(x-t)^{s\nu}\,ds\right\}dt, \qquad (10)$$

intercambiando el orden de integración, en base a la convergencia uniforme, se tiene

$$Ih_1(t;x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}X(s)z^{s}\left\{x^{-1}\int_0^x H^{m,0}_{m,m}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}\left(\gamma_k+\delta_k+1-\frac{1}{\beta_k},\frac{1}{\beta_k}\right)_1^m\\ \left(\gamma_k+1-\frac{1}{\lambda_k},\frac{1}{\lambda_k}\right)_1^m\end{matrix}\right.\right]\right.$$

$$\left. t^{\sigma+\mu s}(x-t)^{s\nu}\,dt\right\}ds \qquad (11)$$

donde usando el desarrollo del binomio e intercambiando el orden entre la integral que depende de t y la sumatoria, se tiene

$$Ih_1(t;x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}X(s)z^{s}x^{s\nu}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{(-s\nu)_r}{r!\,x^{r}}\cdot$$

$$\left\{x^{-1}\int_0^x H^{m,0}_{m,m}\left[\frac{t}{x}\left|\begin{matrix}\left(\gamma_k+\delta_k+1-\frac{1}{\beta_k},\frac{1}{\beta_k}\right)_1^m\\ \left(\gamma_k+1-\frac{1}{\lambda_k},\frac{1}{\lambda_k}\right)_1^m\end{matrix}\right.\right] t^{\sigma+\mu s+r}\,dt\right\}ds \qquad (12)$$

de (3) este resultado puede ser escrito como:

$$Ih_1(t;x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}X(s)\;z^{s}x^{s\nu}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(r-\nu s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\nu s)}\cdot$$

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{\Gamma\left(\gamma_k+1+\dfrac{\sigma+\mu s+r}{\lambda_k}\right)}{\Gamma\left(\gamma_k+\delta_k+1+\dfrac{\sigma+\mu s+r}{\beta_k}\right)}x^{\sigma+\mu s}ds. \qquad (13)$$

Intercambiando el orden de la integral y la sumatoria, y usando (8), se tiene que

$$Ih_1(t;x)=x^{\sigma}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{\prod_{k=1}^{M}\Gamma(b_k-B_ks)\prod_{k=1}^{N}\Gamma(1-a_k+A_ks)\Gamma(r-\nu s)}{\prod_{k=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_k+B_ks)\prod_{k=N+1}^{P}\Gamma(a_k-A_ks)\Gamma(-\nu s)}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{\prod_{k=1}^{m}\Gamma\left(\gamma_k+1+\dfrac{\sigma}{\lambda_k}+\dfrac{r}{\lambda_k}+\dfrac{\mu s}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\Gamma\left(\gamma_k+\delta_k+1+\dfrac{\sigma}{\beta_k}+\dfrac{r}{\beta_k}+\dfrac{\mu s}{\beta_k}\right)}\left(x^{\mu+\nu}z\right)^{s}ds\right\} \qquad (14)$$

el cual, al tomar en cuenta la definición de la función H de Fox, equivale a

$$Ih_1(t;x)=I^{(\gamma_k),(\delta_k)}_{(\beta_k),(\lambda_k),m}h_1(t;x)=$$

$$x^{\sigma}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}H^{M+1,\;N+m}_{P+m+1,Q+m+1}\left[zx^{\mu+\nu}\left|\begin{matrix}\left(-\gamma_k-\frac{(\sigma+r)}{\lambda_k},\frac{\mu}{\lambda_k}\right)_1^m,(a_k,A_k)_1^P,(0,\nu)\\ (r,\nu),(b_k,B_k)_1^Q,\left(-\gamma_k-\delta_k-\frac{(\sigma+r)}{\beta_k},\frac{\mu}{\beta_k}\right)_1^m\end{matrix}\right.\right] \qquad (15)$$

con $\min\limits_{1\le k\le M}\operatorname{Re}\left(\dfrac{b_k}{B_k}\right)>\max\left[-\dfrac{1}{\nu},-\left(\operatorname{Re}\left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right)+\min\limits_{1\le k\le m}\left(\dfrac{\gamma_k\lambda_k+\lambda_k}{\mu}\right)\right)\right]$,

$\sum_{k=1}^{m}\delta_k>0,\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{\lambda_k}\ge\sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{\beta_k}$, μ y $\nu\in R^{+}$, $\sigma\in C$

donde para establecer estas condiciones se utilizó el comportamiento asintótico de la función H de Fox [14].

De manera análoga se pueden obtener los siguientes resultados:

Si $h_2(t;x)=t^{\sigma}H^{M,N}_{P,Q}\left[zt^{-\mu}(x-t)^{-\nu}\left|\begin{matrix}(a_k,A_k)_1^P\\(b_k,B_k)_1^Q\end{matrix}\right.\right]$,

$\sigma\in C,\ \mu,\nu\in R^{+}$

entonces

$$Ih_2(t;x)=I^{(\gamma_k),(\delta_k)}_{(\beta_k),(\lambda_k),m}h_2(t;x)=$$

$$x^{\sigma}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}H^{M+m,\;N+1}_{P+m+1,Q+m+1}\left[zx^{-\mu-\nu}\left|\begin{matrix}(1-r,\nu),(a_k,A_k)_1^P,\left(\gamma_k+\delta_k+1+\frac{\sigma+r}{\beta_k},\frac{\mu}{\beta_k}\right)_1^m\\ \left(\gamma_k+1+\frac{\sigma+r}{\lambda_k},\frac{\mu}{\lambda_k}\right)_1^m,(b_k,B_k)_1^Q,(1,\nu)\end{matrix}\right.\right] \qquad (16)$$

con $\max\limits_{1\le k\le N}\operatorname{Re}\left(\dfrac{a_k-1}{A_k}\right)<\min\left[\min\limits_{1\le k\le m}\left(\dfrac{\gamma_k\lambda_k+\lambda_k}{\mu}\right)+\operatorname{Re}\left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right),\dfrac{1}{\nu}\right]$,

$\sum_{k=1}^{m}\delta_k>0,\ \ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{\lambda_k}\ge\sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{\beta_k}$, μ y $\nu\in R^{+}$, $\sigma\in C$.

Si $h_3(t;x)=t^{\sigma}H^{M,N}_{P,Q}\left[zt^{\mu}(x-t)^{-\nu}\left|\begin{matrix}(a_k,A_k)_1^P\\(b_k,B_k)_1^Q\end{matrix}\right.\right]$

con $\sigma\in C,\ \mu,\nu\in R^{+}$, entonces

$$Ih_3(t;x)=I^{(\gamma_k),(\delta_k)}_{(\beta_k),(\lambda_k),m}h_3(t;x)=$$

$$x^{\sigma}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}H^{M,N+m+1}_{P+m+1,Q+m+1}\left[zx^{\mu-\nu}\left|\begin{matrix}(1-r,\nu)\left(-\gamma_k-\frac{(\sigma+r)}{\lambda_k},\frac{\mu}{\lambda_k}\right)_1^m,(a_k,A_k)_1^P\\ (b_k,B_k)_1^Q,\left(-\gamma_k-\delta_k-\frac{(\sigma+r)}{\beta_k},\frac{\mu}{\beta_k}\right)_1^m,(1,\nu)\end{matrix}\right.\right] \qquad (17)$$

con $\min\limits_{1\le k\le M}\operatorname{Re}\left(\dfrac{b_k}{B_k}\right)>-\operatorname{Re}\left(\dfrac{\sigma}{\mu}\right)-\min\limits_{1\le k\le m}\left(\dfrac{\lambda_k\gamma_k+\lambda_k}{\mu}\right),\ \max\limits_{1\le k\le N}\operatorname{Re}\left(\dfrac{a_k-1}{A_k}\right)<\dfrac{1}{\nu}$,

$\sum_{k=1}^{m}\delta_k>0,\ \sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{\lambda_k}\ge\sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{\beta_k}$, μ y $\nu\in R^{+}$, $\sigma\in C$.

$$\text{Si } h_4(t;x) = t^{\sigma} H^{M,N}_{P,Q}\left[zt^{-\mu}(x-t)^{\nu} \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^P \\ (b_k, B_k)_1^Q \end{matrix} \right. \right],$$

con $\sigma \in C$, $\mu, \nu \in R^+$, se tiene que

$$Ih_4(t;x) = I^{(\gamma_k),(\delta_k)}_{(\beta_k),(\lambda_k),m} h_4(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H^{M+m+1,N}_{P+m+1,Q+m+1}\left[zx^{\nu-\mu} \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^P, (0,\nu), \left(\gamma_k + \delta_k + 1 + \frac{(\sigma+r)}{\beta_k}, \frac{\mu}{\beta_k}\right)_1^m \\ (r,\nu), \left(\gamma_k + 1 + \frac{(\sigma+r)}{\lambda_k}, \frac{\mu}{\lambda_k}\right)_1^m, (b_k, B_k)_1^Q \end{matrix} \right. \right] \quad (18)$$

con $\min_{1\le k\le m}\left(\frac{\lambda_k \gamma_k + \lambda_k}{\mu}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma}{\mu}\right) > \max_{1\le k\le N} \mathrm{Re}\left(\frac{a_k - 1}{A_k}\right)$, $\min_{1\le k\le M} \mathrm{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > -\frac{1}{\nu}$

$\sum_{k=1}^{m} \delta_k > 0$, $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda_k} \ge \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\beta_k}$, μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

Evaluación de Integrales Fraccionales que Involucran la Función H de Fox Usando los Operadores Múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Weyl

Siguiendo el procedimiento señalado en la sección anterior pueden establecerse los siguientes resultados utilizando los operadores múltiples de Wright-Erdélyi-Kober de tipo Weyl.

$$\text{Si } h_5(t;x) = t^{\sigma} H^{M,N}_{P,Q}\left[zt^{\mu}(t-x)^{\nu} \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^P \\ (b_k, B_k)_1^Q \end{matrix} \right. \right],$$

$\sigma \in C$, $\mu, \nu \in R^+$, se tiene que

$$Kh_5(t;x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{x^r}{r!}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_c X(s) z^s (-\nu s)_r \cdot \right.$$

$$\left. \left\{ x^{-1} \int_x^{\infty} H^{n,0}_{n,n}\left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} \left(\tau_k + \alpha_k + \frac{1}{\varepsilon_k}, \frac{1}{\varepsilon_k}\right)_1^n \\ \left(\tau_k + \frac{1}{\xi_k}, \frac{1}{\xi_k}\right)_1^n \end{matrix} \right. \right] t^{\sigma+(\mu+\nu)s-r}\, dt \right\} ds \right] \quad (19)$$

después de usar (6),

$$Kh_5(t;x) = K^{(\tau_k),(\alpha_k)}_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n} h_5(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H^{M+n+1,N}_{P+n+1,Q+n+1}\left[zx^{\nu+\mu} \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^P, (0,\nu), \left(\tau_k + \alpha_k - \frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k}, \frac{(\mu+\nu)}{\varepsilon_k}\right)_1^n \\ (r,\nu), \left(\tau_k - \frac{(\sigma-r)}{\xi_k}, \frac{(\mu+\nu)}{\xi_k}\right)_1^n, (b_k, B_k)_1^Q \end{matrix} \right. \right] \quad (20)$$

$\max_{1\le k\le N} \mathrm{Re}\left(\frac{a_k - 1}{A_k}\right) < \min_{1\le k\le n}\left(\frac{\tau_k \xi_k + 1}{\mu+\nu}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma+1}{\mu+\nu}\right)$, $\min_{1\le k\le M} \mathrm{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > -\frac{1}{\nu}$,

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k}$, μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

$$\text{Si } h_6(t;x) = t^{\sigma} H^{M,N}_{P,Q}\left[zt^{-\mu}(t-x)^{-\nu} \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^P \\ (b_k, B_k)_1^Q \end{matrix} \right. \right]$$

$\sigma \in C$, $\mu, \nu \in R^+$, se tiene

$$Kh_6(t;x) = K^{(\tau_k),(\alpha_k)}_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n} h_6(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H^{M,N+n+1}_{P+n+1,Q+n+1}\left[zx^{-(\nu+\mu)} \left| \begin{matrix} (1-r,\nu), \left(1 - \tau_k + \frac{(\sigma-r)}{\xi_k}, \frac{(\mu+\nu)}{\xi_k}\right)_1^n, (a_k, A_k)_1^P \\ (b_k, B_k)_1^Q, \left(1 - \tau_k - \alpha_k + \frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k}, \frac{(\mu+\nu)}{\varepsilon_k}\right)_1^n, (1,\nu) \end{matrix} \right. \right] \quad (21)$$

con $\min_{1\le k\le M} \mathrm{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma+1}{\mu+\nu}\right) - \min_{1\le k\le n}\left(\frac{\tau_k \xi_k + 1}{\mu+\nu}\right)$,

$\max_{1\le k\le N} \mathrm{Re}\left(\frac{a_k - 1}{A_k}\right) < \frac{1}{\nu}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k}$,

μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

$$\text{Si } h_7(t;x) = t^{\sigma} H^{M,N}_{P,Q}\left[zt^{\mu}(t-x)^{-\nu} \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^P \\ (b_k, B_k)_1^Q \end{matrix} \right. \right]$$

$\sigma \in C$, $\mu, \nu \in R^+$,

$$Kh_7(t;x) = x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\prod_{k=1}^{M} \Gamma(b_k - B_k s) \prod_{k=1}^{N} \Gamma(1 - a_k + A_k s)\, \Gamma(r+\nu s)}{\prod_{k=M+1}^{Q} \Gamma(1 - b_k + B_k s) \prod_{k=N+1}^{P} \Gamma(a_k + A_k s)\, \Gamma(\nu s)} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\tau_k - \frac{(\sigma-r)}{\xi_k} - \frac{(\mu-\nu)s}{\xi_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\tau_k + \alpha_k - \frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k} - \frac{(\mu-\nu)s}{\varepsilon_k}\right)} \left(x^{\mu-\nu} z\right)^s \right\} ds. \quad (22)$$

En este último resultado debe tomarse en cuenta el signo de $\mu-\nu$, para poder aplicar la definición de la función H de Fox; por lo cual se requiere considerar tres casos:

i.- Si $\mu > \nu$

$$Kh_7(t;x) = K^{(\tau_k),(\alpha_k)}_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n} h_7(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H^{M+n,N+1}_{P+n+1,Q+n+1}\left[zx^{\mu-\nu} \left| \begin{matrix} (1-r,\nu), (a_k, A_k)_1^P, \left(\tau_k + \alpha_k - \frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k}, \frac{(\mu-\nu)}{\varepsilon_k}\right)_1^n \\ \left(\tau_k - \frac{(\sigma-r)}{\xi_k}, \frac{(\mu-\nu)}{\xi_k}\right)_1^n, (b_k, B_k)_1^Q, (1,\nu) \end{matrix} \right. \right] \quad (23)$$

con $\max_{1\le k\le N} \mathrm{Re}\left(\frac{a_k - 1}{A_k}\right) < \min\left(\min_{1\le k\le n}\left(\frac{\tau_k \xi_k + 1}{\mu-\nu}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma+1}{\mu-\nu}\right), \frac{1}{\nu}\right)$,

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k}$, μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

ii.- Si $\mu < \nu$

$$Kh_7(t;x) = K_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n}^{(\tau_k),(\alpha_k)} h_7(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H_{P+n+1,Q+n+1}^{M,N+n+1}\left[zx^{\mu-\nu} \middle| \begin{matrix} (1-r,\nu),\left(1-\tau_k+\frac{(\sigma+r)}{\xi_k},\frac{(\nu-\mu)}{\xi_k}\right)_1^n,(a_k,A_k)_1^P \\ (b_k,B_k)_1^Q,(1,\nu),\left(1-\tau_k-\alpha_k+\frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k},\frac{(\nu-\mu)}{\varepsilon_k}\right)_1^n \end{matrix} \right] \quad (24)$$

con $\min\limits_{1\le k\le M} \operatorname{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma+1}{\nu-\mu}\right) - \min\limits_{1\le k\le n}\left(\frac{\tau_k\xi_k+1}{\nu-\mu}\right)$,

$\max\limits_{1\le k\le N} \operatorname{Re}\left(\frac{a_k-1}{A_k}\right) < \frac{1}{\nu}$, $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_k}$,

μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

iii.- Si $\mu = \nu$

$$Kh_7(t;x) = K_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n}^{(\tau_k),(\alpha_k)} h_7(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\tau_k-\frac{(\sigma-r)}{\xi_k}\right)}{r!\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\tau_k+\alpha_k-\frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k}\right)} H_{P+1,Q+1}^{M,N+1}\left[z \middle| \begin{matrix} (1-r,\nu),(a_k,A_k)_1^P \\ (b_k,B_k)_1^Q,(1,\nu) \end{matrix} \right] \quad (25)$$

con $\min\limits_{1\le k\le n}(\tau_k\xi_k+1) > \operatorname{Re}(\sigma)+1$, $\max\limits_{1\le k\le N} \operatorname{Re}\left(\frac{a_k-1}{A_k}\right) < \frac{1}{\nu}$, $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k > 0$,

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_k}$, μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

Si $h_8(t;x) = t^{\sigma} H_{P,Q}^{M,N}\left[zt^{-\mu}(t-x)^{\nu} \middle| \begin{matrix} (a_k,A_k)_1^P \\ (b_k,B_k)_1^Q \end{matrix} \right]$,

$\sigma \in C$, $\mu,\nu \in R^+$, resulta

$$Kh_8(t;x) = x^{\sigma}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\prod_{k=1}^{M}\Gamma(b_k-B_ks)\prod_{k=1}^{N}\Gamma(1-a_k+A_ks)\Gamma(r-\nu s)}{\prod_{k=M+1}^{Q}\Gamma(1-b_k+B_ks)\prod_{k=N+1}^{P}\Gamma(a_k+A_ks)\Gamma(-\nu s)}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\tau_k-\frac{(\sigma-r)}{\xi_k}-\frac{(\nu-\mu)s}{\xi_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\tau_k+\alpha_k-\frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k}-\frac{(\nu-\mu)s}{\varepsilon_k}\right)}\left(x^{\nu-\mu}z\right)^s\right\} ds. \quad (26)$$

De igual forma que en (22), se deben considerar tres casos:

i.- Si $\mu > \nu$

$$Kh_8(t;x) = K_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n}^{(\tau_k),(\alpha_k)} h_8(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H_{P+n+1,Q+n+1}^{M+1,N+n}\left[zx^{\nu-\mu} \middle| \begin{matrix} \left(1-\tau_k+\frac{(\sigma-r)}{\xi_k},\frac{(\mu-\nu)}{\xi_k}\right)_1^n,(a_k,A_k)_1^P,(0,\nu) \\ (r,\nu),(b_k,B_k)_1^Q,\left(1-\tau_k-\alpha_k+\frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k},\frac{(\mu-\nu)}{\varepsilon_k}\right)_1^n \end{matrix} \right] \quad (27)$$

con $\min\limits_{1\le k\le M} \operatorname{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > \max\left(\operatorname{Re}\left(\frac{\sigma+1}{\mu-\nu}\right) - \min\limits_{1\le k\le n}\left(\frac{\tau_k\xi_k+1}{\mu-\nu}\right), -\frac{1}{\nu}\right)$,

$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_k}$, μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

ii.- Si $\mu < \nu$

$$Kh_8(t;x) = K_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n}^{(\tau_k),(\alpha_k)} h_8(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} H_{P+n+1,Q+n+1}^{M+n+1,N}\left[zx^{\nu-\mu} \middle| \begin{matrix} (a_k,A_k)_1^P,(0,\nu),\left(\tau_k+\alpha_k-\frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k},\frac{(\nu-\mu)}{\varepsilon_k}\right)_1^n \\ (r,\nu),\left(\tau_k-\frac{(\sigma-r)}{\xi_k},\frac{(\nu-\mu)}{\xi_k}\right)_1^n,(b_k,B_k)_1^Q \end{matrix} \right] \quad (28)$$

con $\max\limits_{1\le k\le N} \operatorname{Re}\left(\frac{a_k-1}{A_k}\right) < \min\limits_{1\le k\le n}\left(\frac{\tau_k\xi_k+1}{\nu-\mu}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma+1}{\nu-\mu}\right)$,

$\min\limits_{1\le k\le M} \operatorname{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > -\frac{1}{\nu}$, $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_k}$,

μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

iii.- Si $\mu = \nu$

$$Kh_8(t;x) = K_{(\varepsilon_k),(\xi_k),n}^{(\tau_k),(\alpha_k)} h_8(t;x) =$$

$$x^{\sigma} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\tau_k-\frac{(\sigma-r)}{\xi_k}\right)}{r!\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\tau_k+\alpha_k-\frac{(\sigma-r)}{\varepsilon_k}\right)} H_{P+1,Q+1}^{M+1,N}\left[z \middle| \begin{matrix} (a_k,A_k)_1^P,(0,\nu) \\ (r,\nu),(b_k,B_k)_1^Q \end{matrix} \right] \quad (29)$$

con $\min\limits_{1\le k\le n}(\tau_k\xi_k+1) > \operatorname{Re}(\sigma)+1$, $\min\limits_{1\le k\le M} \operatorname{Re}\left(\frac{b_k}{B_k}\right) > -\frac{1}{\nu}$, $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k > 0$,

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi_k} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_k}$, μ y $\nu \in R^+$, $\sigma \in C$.

Como casos particulares se tienen los siguientes:

— Para $\beta_k = \lambda_k$, $k = 1,\ldots,m$ se obtienen los resultados correspondientes para los operadores múltiples de Erdélyi-Kober (representando también composiciones de operadores de Erdélyi-Kober, en el sentido propio) de Kiryakova [7].

— Cuando $\beta_k = \lambda_k = 1$, $k = 1,\ldots,m$ los resultados corresponden a los operadores que tienen la función G de Meijer como núcleo [7].

Referencias Bibliográficas

1. McBride A. C. and Roach G. F. (eds): Fractional Calculus. Research Notes in Math. 138 (Proc. of a Conf. Glasgow, 1984), Pitman Adv. Publ. Program, London, 1985.

2. B. Ross (ed.): Fractional Calculus and its Applications. Lecture Notes in Math. 457 (Proc. of a Conf. New Haven, 1974), Springer-Verlag, New York, 1975.
3. S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev: Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications/In Russian/ Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987.
4. I.N. Sneddon: The use in mathematical physics of Erdélyi-Kober operators and of some of their generalizations. Lecture Notes in Math. 457, Springer-Verlag, New York (1975), 37-79.
5. K. Nishimoto (ed.): Fractional Calculus and its Applications. (Proc. International Conf. Tokyo), Nihon Univ., 1990.
6. L. Galué, S.L. Kalla and H.M. Srivastava: Further results on an H-function generalized fractional calculus. Journal of Fractional Calculus. Vol. 4 (1993), 36-47.
7. V. Kiryakova: Generalized Fractional Calculus and Applications. Longman, Harlow, 1994 (co-publ. J. Wiley & Sons, N. York).
8. S.L. Kalla and V.S. Kiryakova: An H-function generalized fractional calculus based upon composition of Erdélyi-Kober operators in Lp. Math. Japonica 35 (1990), 1151-1171.
9. S.L. Kalla and L. Galué: Generalized fractional calculus based upon composition of some basic operators. Recent Advances in Fractional Calculus (ed. R. N. Kalia). Global Publ., USA (1993), 145-178.
10. V. Kiryakova: All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions. J. Physics A: Math. & Gen. 30 (1997), 5085-5103.
11. H.M. Srivastava, K. C. Gupta and S. P. Goyal: The H-Functions of One and Two Variables with Applications. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.
12. C. Fox: The G and H-functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Math. Soc., 98 (1961), 395-429.
13. M. Saigo, R.K. Saxena and J. Ram: On the fractional calculus operator associated with the H-function. Ganita Sandesh. Vol. 6, No. 1(1992), 36-47.
14. A.M. Mathai and R.K. Saxena: Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1973.

Recibido el 22 de Septiembre de 1997
En forma revisada el 18 de Marzo de 1998